Métodos Numéricos: Propagación de ondas

Enrique Zuazua[1, 2, 3]

[1]Chair in Applied Analysis, Alexander von Humboldt-Professorship, Department of Mathematics, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg 91058 Erlangen, Germany
[2]Chair of Computational Mathematics, Fundación Deusto, Av. de las Universidades, 24, 48007 Bilbao, Basque Country, Spain
[3]Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain

Abstract

En estas notas recogemos de los resúmenes de algunas de las clases impartidas en el curso de doctorado 02-03 de la UAM denominado "Métodos Numéricos" y dedicado esencialmente al estudio de fenómenos de propagación de ondas y su análisis numérico.

Contents

1 Movimiento armónico en una dimensión

El modelo más simple de vibraciones es el correspondiente al de una masa puntual desplazándose a lo largo de una linea recta con una aceleración orientada hacia un punto fijo y proporcional a la distancia a ese punto. Este es precisamente el movimiento asociado a un simple sistema masa-muelle, en el que el muelle es el responsable de la aceleración de la masa sujeta al mismo.

El movimiento descrito por la masa es lo que se denomina *movimiento armónico simple*.

Las ecuaciones que gobiernan este movimiento son

$$mx'' = -kx \tag{1.1}$$

o,

$$mx'' + kx = 0. \tag{1.2}$$

En estas ecuaciones $x = x(t)$ representa la distancia de la masa al punto fijo, m es la masa de la partícula y k es la constante de rigidez del muelle.

En (1.1) y en todo lo que sigue x' denota la derivada de x con respecto al tiempo. Ocasionalmente utilizaremos también otras notaciones $x' = dx/dt$.

Introduciendo la constante

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \tag{1.3}$$

el sistema (1.2) puede ser reescrito como

$$x'' + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.4}$$

cuya solución general es

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi). \tag{1.5}$$

en esta expresión en la que A es la amplitud de oscilación, ω_0 su frecuencia y ϕ la fase inicial del movimiento, se observa que el movimiento descrito por la masa es puramente oscilante.

Habida cuenta que se trata de una ecuación de orden dos en tiempo, las genuinas variables del sistema no son solamente la posición $x = x(t)$ de la masa sino también su velocidad

$$v = x' = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi). \tag{1.6}$$

Obviamente, la trayectoria $t \to (x, x')$ describe una elipse de ecuación

$$| x' |^2 + \omega_0^2 x^2 = cte., \tag{1.7}$$

en el plano de fases.

El hecho de que la trayectoria quede atrapada en la elipse (1.7) puede obtenerse fácilmente a través de un argumento de conservación de energía. En efecto, multiplicando en (1.4) por x' deducimos que

$$\left(x'' + \omega_0^2 x\right) x' = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \mid x' \mid^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \mid x \mid^2\right] = 0. \tag{1.8}$$

Esta identidad confirma que la energía total de la vibración

$$e(t) = \frac{1}{2} \mid x' \mid^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \mid x \mid^2 \tag{1.9}$$

se conserva en tiempo y permite determinar la elipse (1.7) en la que la trayectoria permanece.

Es evidente que dos oscilaciones armónicas con la misma frecuencia ω_0 que se superponen generan una nueva oscilación armónica de la misma frecuencia. Por otra parte es fácil calcular la amplitud y fase de la nueva oscilación a partir de las dos originales. Pero esto deja de ser cierto cuando las frecuencias no son las mismas, dando lugar a un fenómeno que, como veremos más adelante, jugará un papel importante en el análisis numérico de las ondas.

Con el objeto de analizar este nuevo fenómeno de superposición conviene reescribir las soluciones en la forma de exponenciales complejas

$$x_1 = A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)}; \; x_2 = A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}. \tag{1.10}$$

Cuando el cociente de las dos frecuencias ω_1 y ω_2 es un número racional, la superposición de estos dos movimientos

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}$$

da lugar a un movimiento periódico de frecuencia igual al máximo común divisor de ω_1 y ω_2. Cuando el ratio ω_1/ω_2 es irracional la superposición de x_1 y x_2 no tiene ninguna propiedad de periodicidad temporal.

El caso en que ambas frecuencias sean muy próximas es particularmente interesante. Supongamos que

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega. \tag{1.11}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A_1 e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \phi_2)} \\ &= \left[A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i(\phi_2 + \Delta\omega t)}\right] e^{i\omega_1 t} \\ &= A(t) e^{i(\omega_1 t + \phi(t))}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2 - \Delta\omega t)} \tag{1.13}$$

y

$$\operatorname{tg}\phi(t) = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \operatorname{sen}(\phi_2 + \Delta\omega t)}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos(\phi_2 + \Delta\omega t)}. \tag{1.14}$$

Esto permite interpretar la oscilación obtenida por superposición como un movimiento armónico simple aproximado con frecuencia ω_1 y con una amplitud y fase variando lentamente con frecuencia $\Delta\omega/2\pi$.

El resultado de esta vibración es semejante al de una vibración de frecuencia $\Delta\omega/2\pi$ modulada a través de la función de amplitud (1.13).

La dinámica analizada hasta ahora es puramente conservativa. Pero en la mayoría de sistemas de origen físico la disipación está presente. El rozamiento debido al desplazamiento sobre una superficie, o la resistemcia producida por el movimiento en el seno de un fluido viscoso son dos ejemplos claros. En este último caso, por ejemplo, el efecto disipativo consiste en que el movimiento se ve afectado por una fuerza proporcional a la velocidad pero de signo contrario. Obtenemos asi el sistema

$$mx'' + Rx' + kx = 0, \tag{1.15}$$

donde R es la constante de resistencia mecánica.

Es fácil calcular la solución general de (1.15) como superposición de las dos soluciones fundamentales obtenidas resolviendo el polinomio característico de (1.15):

$$m\lambda^2 + R\lambda + k = 0. \tag{1.16}$$

Obtenemos las dos raíces

$$\lambda_\pm = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4mk}}{2m} \tag{1.17}$$

De (1.17) es fácil deducir que:

* Cuando $0 < R < 2\sqrt{mk}$, es decir, para tasas de disipación suficientemente pequeñas, los autovalores $\lambda_\pm$ son complejos con parte real $-R/2m$. De este modo las soluciones de (1.15) admiten la expresión

  $$x(t) = e^{-Rt/2m}\left[\alpha_+ e^{i\sqrt{R^2-4mk}t/2m} + \alpha_- e^{-i\sqrt{R^2-4mk}t/2m}\right].$$

  Las soluciones son por tanto oscilaciones armónicas exponencialmente amortiguadas.

  Conviene también observar que en este rango de valores de R, la tasa de decaimiento exponencial $R/2m$, depende de manera lineal y creciente de R.

* Cuando $R > 2\sqrt{mk}$ los dos autovalores $\lambda_\pm$ son reales y por tanto las soluciones no oscilan. En este caso la tasa exponencial de decaimiento de la solución general (1.15) viene dada por el autovalor λ_+ al que corresponde la solución fundamental con menor decaimiento.

* De este modo la función $\gamma(R)$ que establece la tasa exponencial de decaimiento toma los valores:

$$\gamma(R) = \begin{cases} \frac{R}{2m}, & \text{cuando} \quad 0 < R < 2\sqrt{mk} \\ \frac{R}{2m} - \frac{\sqrt{R^2-4mk}}{2m}, & \text{cuando} \quad R > 2\sqrt{mk}. \end{cases}$$

  Esta función es creciente cuando $0 < R < 2\sqrt{mk}$ y decreciente cuando $R > 2\sqrt{mk}$ y alcanza su máximo cuando $R = 2\sqrt{mk}$. En este caso $\lambda_+ = \lambda_-$ y por tanto las soluciones fundamentales de (1.15) son $x_1(t) = e^{-Rt/2m}$ y $x_2(t) = te^{-Rt/2m}$.

  Por tanto, la elección de la constante disipativa R que maximiza la tasa de decaimiento exponencial es

$$R = 2\sqrt{mk},$$

  y la tasa óptima correspondiente

$$\gamma = \frac{R}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

  si bien ésta no se alcanza, en un sentido estricto, puesto que la solución fundamental correspondiente presenta un factor multiplicativo t.

* De este análisis se deduce que, contrariamente a lo que podría indicarnos una primera intuición, la tasa exponencial de decaimiento no es una función creciente del coeficiente de disipación R. De hecho, a medida que $R \to \infty$ la tasa de decaimiento tiende a cero. El hecho que cuando R supera el valor critico $2\sqrt{mk}$ la tasa de decaimiento empieza a decrecer se denomina fenómeno de sobredisipación ("overdamping").

En esta sección hemos estudiado algunos de los aspectos más sencillos del movimiento armónico lineal. Evidentemente, las ecuaciones de ondas y sus aproximaciones numéricas, objetivo de este curso, son de naturaleza mucho más compleja. Pero puede decirse que la ecuación de ondas es en realidad el análogo de la ecuación (1.1) del oscilador armónico en un espacio de Hilbert en dimensión infinita.

Por otra parte, la aproximación numérica de las ecuaciones de ondas conduce de manera natural a versiones vectoriales de la ecuación (1.1) en las que los fenómenos aqui descritos son también relevantes. Surge sin embargo una nueva problemática relativa a la interacción de los diferentes componentes del sistema que se hace más y más compleja a medida que el sistema aumenta de dimensión y se aproxima a la ecuación de ondas original.

En la próxima sección analizamos la ecuación de transporte lineal en la que algunas de estas dificultades pueden ya ser vislumbradas.

2 La ecuación de ondas y sus variantes

En esta sección indicamos algunos ejemplos de ecuaciones y sistemas en Derivadas Parciales de la Física, Mecánica y otras Ciencias en las que, de un modo u otro, intervienen los mismos fenómenos ondulatorios que la ecuación de ondas describe.

Recordemos que, normalmente, cuando nos referimos a la ecuación de ondas, la incógnita es una función escalar $u = u(x,t)$ donde $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ denota la variable espacial y $t \in \mathbf{R}$ la temporal. En las aplicaciones físicas la dimensión espacial es normalmente $n = 1, 2, 3$. *La ecuación de ondas* se escribe entonces

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \tag{2.1}$$

donde $u_t = \partial u/\partial t$ denota la derivación temporal con respecto al tiempo y Δ es al clásico operador de Laplace:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{2.2}$$

La ecuación de ondas en dimensiones espaciales $n = 1$ y 2 permite modelizar las pequeñas vibraciones de cuerdas y membranas, mientras que en tres dimensiones espaciales interviene en la propagación del potencial de un campo acústico.

Para simplificar la presentación en esta sección introduciremos las ecuaciones en su forma más sencilla. En particular, supondremos que los coeficientes son constantes (lo cual equivale a suponer que el medio considerado es homogéneo) y los normalizamos al valor unidad, lo cual en este caso no supone ninguna pérdida de generalidad como se puede comprobar mediante una simple dilatación/contracción de la variable temporal o espacial.

En el ámbito de las frecuencias, como es habitual en acústica y en el estudio de las vibraciones, la ecuación de ondas puede también reducirse a *la ecuación de Helmholtz*

$$-\Delta u = \lambda u. \tag{2.3}$$

La ecuación de transporte lineal

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0, \tag{2.4}$$

y *la ecuación de Liouville*

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (b_i u)_{x_i} = 0 \tag{2.5}$$

están también intimamente ligadas a la ecuación de ondas. En efecto, en una dimensión espacial, la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{2.6}$$

puede también escribirse como

$$(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = 0, \tag{2.7}$$

o

$$(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u = 0, \tag{2.8}$$

o, lo que es lo mismo, el operador de d'Alembert

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 \tag{2.9}$$

puede factorizarse de las dos siguientes maneras

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x) = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x). \tag{2.10}$$

Vemos pues que el operador de d'Alembert es la composición de dos operadores de transporte.

Conviene también señalar que, cuando los coeficientes b_i son constantes, la ecuación de transporte y de Liouville sólo difieren en un signo, diferencia que puede ser eliminada invirtiendo el sentido del tiempo.

Utilizando las notaciones habituales

$$\nabla u = (\partial_1 u, \cdots, \partial_n u) \tag{2.11}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{2.12}$$

para los operadores gradiente y divergencia y denotando mediante $\cdot$ el producto escalar en $\mathbf{R}^n$ las ecuaciones de transporte y Liouville se pueden escribir respectivamente como

$$u_t + \vec{b} \cdot \nabla u = 0 \tag{2.13}$$

y

$$u_t - \operatorname{div}\left(\vec{b}u\right) = 0. \tag{2.14}$$

La *ecuación de Schrödinger* de la Mecánica Cuántica, que también interviene en el estudio de fibras ópticas es también una ecuación que, en muchos sentidos, se asemeja a la ecuación de ondas:

$$iu_t + \Delta u = 0. \tag{2.15}$$

En este caso, la incógnita u toma valores complejos.

La *ecuación de las placas vibrantes*

$$u_{tt} + \Delta^2 u = 0 \tag{2.16}$$

es también muy similar a la ecuación de ondas. Además puede factorizarse en dos operadores de Schrödinger conjugados

$$\partial_t^2 + \Delta^2 = -\left(i\partial_t + \Delta\right)\left(i\partial_t - \Delta\right). \tag{2.17}$$

En una dimensión espacial la ecuación

$$\partial_t^2 + \partial_x^4 u = 0 \tag{2.18}$$

describe las vibraciones de una viga.

Las siguientes son también variantes de la ecuación de ondas:

$$u_{tt} - u_{xx} + d\,u_t = 0 \quad \textit{(ecuación del telégrafo)}, \tag{2.19}$$

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad \textit{(ecuación de Airy)}, \tag{2.20}$$

$$u_{tt} - \Delta u + u = 0 \quad \textit{(ecuación de Klein-Gordon)}, \tag{2.21}$$

El *sistema de Lamé* para las vibraciones de un cuerpo tridimensional elástico puede también entenderse como un sistema de ecuaciones de ondas acopladas:

$$u_{tt} - \lambda\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div} u = 0. \tag{2.22}$$

En este caso la incógnita u es un vector de tres componentes $u = (u_1, u_2, u_3)$ que describe las deformaciones del cuerpo elástico.

Las ecuaciones que hemos descrito son *lineales* y provienen de ecuaciones y sistemas más complejos de la Mecánica, de carácter no-lineal, a través de linealizaciones, lo cual las hace válidas sólo para pequeños valores de la incógnita u.

El *sistema de Maxwell* para las ondas electromagnéticas posee también muchas de las características de las ecuaciones de ondas:

$$\left\{\begin{array}{c} E_t = \operatorname{rot} B \\ B_t = -\operatorname{rot} E \\ \operatorname{div} B = \operatorname{div} E = 0. \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Aquí rot denota el rotacional de un campo de vectores.

Con el objeto de entender la semejanza de este sistema con la ecuación de ondas (2.6) conviene observar que esta última también puede escribirse en la forma de un sistema hiperbólico de ecuaciones de orden uno:

$$\left\{\begin{array}{l} u_t = v_x \\ v_t = u_x. \end{array}\right. \tag{2.24}$$

Sin embargo, muchas ecuaciones relevantes que intervienen en el estudio de las ondas tienen un carácter no-lineal. Por ejemplo, *la ecuación eikonal,*

$$| \nabla u |= 1 \tag{2.25}$$

interviene en el cálculo de soluciones de ecuaciones de ondas mediante métodos de la Óptica Geométrica.

Lo mismo ocurre con *ecuación de Hamilton-Jacobi*:

$$u_t + H(\nabla u,\, x) = 0. \tag{2.26}$$

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) es una versión no-lineal de la ecuación de Airy que permite analizar la propagación de ondas en canales:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.27}$$

y da lugar a los célebres *solitones*.

En el contexto de la Mecánica de Fluidos los dos ejemplos más relevantes son sin duda *las ecuaciones de Navier-Stokes* para un fluido viscoso homogéneo e incompresible

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u = \nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

y *las ecuaciones de Euler* para fluidos perfectos

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u = \nabla p \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

En estos sistemas u denota el campo de velocidades del fluido y p es la presión.

Las ecuaciones de Burgers viscosa e inviscida son, en algún sentido, versiones unidimensionales de estas ecuaciones

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0, \tag{2.30}$$

$$u_t + uu_x = 0. \tag{2.31}$$

En esta última las soluciones desarrollan ondas de choque en tiempo finito.

Las ecuaciones que hemos citado, aunque numerosas, no son más que algunos de los ejemplos más relevantes de ecuaciones en las que intervienen de un modo u otro fenómenos de propagación de ondas y en las que los contenidos que desarrollaremos en este curso resultarán de utilidad.

3 La fórmula de D'Alembert

Consideramos la ecuación de ondas unidimensional $(1-d)$ en toda la recta real

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0. \tag{3.1}$$

D'Alembert observó que las soluciones de (3.1) pueden escribirse como superposición de dos ondas de transporte

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t). \tag{3.2}$$

Es fácil comprobar que toda función de la forma (3.2) es solución de (3.1).

La fórmula (3.2) muestra que la velocidad de propagación en el modelo (3.1) es uno. En efecto, según (3.2), las soluciones de (3.1) son superposición de ondas de transporte que viajan en el espacio $\mathbf{R}$ a velocidad uno a izquierda y derecha.

Para comprobar que toda solución de (3.1) es de la forma (3.2) basta observar que el operador de d'Alembert $\partial_t^2 - \partial_x^2$ puede descomponerse del modo siguiente:

$$u_{tt} - u_{xx} = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)\, u = 0. \tag{3.3}$$

Introduciendo la variable auxiliar

$$v = (\partial_t + \partial_x)\, u, \tag{3.4}$$

la ecuación se escribe como

$$(\partial_t - \partial_x)\, v = v_t - v_x = 0, \tag{3.5}$$

de modo que

$$v = h(x+t). \tag{3.6}$$

La ecuación (3.4) se reduce entonces a

$$u_t + u_x = h(x+t). \tag{3.7}$$

Para su resolución observamos que la función

$$w(t) = u(t + x_0, t)$$

verifica

$$w'(t) = h(2t + x_0)$$

cuya solución es

$$w(t) = \frac{H(2t+x_0)}{2} + w(0) = \frac{H(2t+x_0)}{2} + u(x_0, 0), \tag{3.8}$$

donde H es una primitiva de h.

Por lo tanto, como
$$u(x,t) = w(t)$$
con $x_0 = x - t$ obtenemos
$$u(x,t) = \frac{H(x+t)}{2} + u(x-t,\, 0) \tag{3.9}$$
lo cual confirma la expresión (3.2).

Esta fórmula permite calcular explícitamente la solución del problem de Cauchy:
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\, u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{3.10}$$
En efecto, en vista de la expresión (3.2), e identificando los perfiles f y g en función de los datos iniciales φ y ψ obtenemos que
$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)dy \tag{3.11}$$
es la única solución de (3.10).

4 Resolución de la ecuación de ondas mediante series de Fourier

Consideramos la ecuación de ondas unidimensional $(1-d)$:
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{4.1}$$
Se trata de un modelo sencillo para las vibraciones de una cuerda unidimensional flexible de longitud π, fijada en sus extremos $x = 0, \pi$.

Es fácil representar las soluciones de (4.1) mediante series de Fourier. Para ello escribimos el desarrollo de Fourier de los datos iniciales:
$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(kx),\; u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(kx), \tag{4.2}$$
donde los coeficientes de Fourier vienen dados por las clásicas fórmulas:
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\operatorname{sen}(kx)dx;\; b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_1(x)\operatorname{sen}(kx)dx, \quad k \geq 1. \tag{4.3}$$

La solución de (4.1) viene entonces dada por la fórmula

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kt)+\frac{b_k}{k}\operatorname{sen}(kt)\right)\operatorname{sen}(kx). \tag{4.4}$$

Conviene observar que la evolución temporal de cada uno de los coeficientes de Fourier

$$u_k(t)=a_k\cos(kt)+\frac{b_k}{k}\operatorname{sen}(kt), \tag{4.5}$$

obedece la ecuación del muelle

$$u_k''+k^2u_k=0. \tag{4.6}$$

Para cada una de estas ecuaciones la energía

$$e_k(t)=\frac{1}{2}\left[\mid u_k'(t)\mid^2+k^2\mid u_k(t)\mid^2\right] \tag{4.7}$$

se conserva en tiempo[1]

Superponiendo cada una de las leyes de conservación de las energías e_k, $k\geq 1$, de las diferentes componentes de Fourier de la solución obtenemos la ley de conservación de la energía de las soluciones de (4.1):

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[|u_x(x,t)|^2+|u_t(x,t)|^2\right]dx. \tag{4.8}$$

Se trata de la energía total de la vibración, suma de la energía potencial y de la energía cinética.

Se cumple efectivamente que

$$E(t)=E(0),\ \forall t\geq 0 \tag{4.9}$$

para las soluciones de (4.1).

Esta ley de conservación de energía puede probarse de, al menos, dos modos distintos:

- *Series de Fourier:*

Si utilizamos las propiedades clásicas de ortogonalidad de las funciones trigonométricas

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(jx)dx=\frac{\pi}{2}\delta_{jk},\ \int_0^{\pi}\cos(kx)\cos(jx)=\frac{\pi}{2}\delta_{jk}, \tag{4.10}$$

donde δ_{jk} denota la delta de Kronecker, la ley de conservación (4.9) se deduce efectivamente de la conservación de las energías e_k de (4.7) para cada $k\geq 1$.

- *Método de la energía:*

[1]Para comprobarlo basta multiplicar (4.6) por u_k' y observar que $u_k''u_k'=\frac{1}{2}\left((u_k')^2\right)'$ y $u_ku_k'=\frac{1}{2}\left(u_k^2\right)'$.

La ley de conservación (4.9) puede también obtenerse directamente de (4.1). Basta para ello multiplicar por u_t e integrar con respecto a $x \in (0, \pi)$. Tenemos entonces

$$\int_0^\pi (u_{tt} - u_{xx})\, u_t dx = 0.$$

Por otra parte,

$$\int_0^\pi u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi |u_t(x,t)|^2 \, dx$$

y

$$-\int_0^\pi u_{xx} u_t dx = \int_0^\pi u_x u_{xt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\pi |u_x(x,t)|^2 \, dx.$$

En la última identidad hemos utilizado la fórmula de integración por partes y las condiciones de contorno de modo que, como $u(\cdot, t) = 0$ para $x = 0, \pi$, necesariamente también se tiene $u_t(\cdot, t) = 0$ para $x = 0, \pi$.

Los argumentos anteriores son formales pero la ley de conservación y la estructura de la energía E en (4.8) indican en realidad cuál es el espacio natural para resolver la ecuación de ondas. En efecto, se trata del espacio de Hilbert, también denominado espacio de energía,

$$H = H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi). \tag{4.11}$$

La norma natural en este espacio es

$$|(f, g)|_H = \left[\| f \|^2_{H_0^1(0,\pi)} + \| g \|^2_{L^2(0,\pi)} \right]^{1/2} = \left[\int_0^\pi \left(f_x^2 + g^2 \right) dx \right]^{1/2}. \tag{4.12}$$

Conviene observar que, salvo un factor multiplicativo 1/2 la energía E coindice con el cuadrado de la norma H de (u, u_t).

Deducimos que la norma H de la solución[2] (u, u_t) se conserva a lo largo del tiempo. Esto sugiere que H es el espacio natural para resolver el sistema (4.1). Esto es así y se tiene el siguiente resultado de existencia y unicidad:

"Para todo par de datos iniciales $(u_0, u_1) \in H$, *i.e.* $u_0 \in H_0^1(0, \pi)$ *y* $u_1 \in L^2(0, \pi)$, *existe una única solución* $(u, u_t) \in C([0, \infty); H)$ *de* (4.1). *Esta solución pertenece por tanto a la clase*

$$u \in C\left([0, \infty);\, H_0^1(0, \pi)\right) \cap C^1\left([0, \infty);\, L^2(0, \pi)\right) \tag{4.13}$$

y la energía correspondiente $E(t)$ *de* (4.8) *se conserva en el tiempo".*

[2]En este punto abusamos un tanto de la terminología. En efecto, la solución de (4.1) es la función $u = u(x, t)$. Ahora bien, como (4.1) es una ecuación de orden dos en tiempo es natural escribirla como un sistema de dos ecuaciones de orden uno en tiempo, con dos incógnitas. En este caso el par (u, u_t) puede ser considerado como la solución, lo cual es coherente con el hecho de haber introducido dos datos iniciales en el sistema (4.1).

En lo que respecta al desarrollo en serie de Fourier (4.2)-(4.3) de los datos iniciales, el hecho de que estos pertenezcan a $H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ significa que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [k^2|a_k|^2 + |b_k|^2] < \infty. \tag{4.14}$$

De hecho

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [|u_{0,x}|^2 + |u_1|^2]dx = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{\infty} [k^2|a_k|^2 + |b_k|^2] < \infty. \tag{4.15}$$

Este resultado de existencia y unicidad puede probarse de al menos dos maneras adicionales, además del método de series de Fourier que acabamos de desarrollar:

- la teoría de semigrupos;
- el método de Galerkin.

El mismo tipo de análisis puede ser desarrollado con muy pocas modificaciones en el caso de varias dimensiones espaciales. Basta para ello utilizar los resultados clásicos sobre la descomposición espectral de la ecuación de Laplace.

Con el objeto de presentar los resultados fundamentales en el caso de varias dimensiones consideramos un *abierto* Ω de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$. En este punto la regularidad de Ω no es relevante. Con el objeto de desarrollar las soluciones en series de Fourier es, sin embargo, importante suponer que Ω es *acotado*.

Consideramos entonces la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.16}$$

Aquí y en lo sucesivo Δ denota el clásico operador de Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \tag{4.17}$$

Para $n \geq 1$, (4.16) es claramente una generalización de la ecuación de la cuerda vibrante (4.1). Cuando $n = 2$, (4.16) es un modelo para las vibraciones de una membrana que, en reposo, ocupa el dominio Ω del plano. Cuando $n = 3$, (4.16) describe la propagación de la presión de las ondas acústicas. Sin embargo, desde un punto de vista matemático, la ecuación (4.16) puede tratarse de modo semejante en cualquier dimensión espacial.

Consideramos ahora el problema espectral:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi & \text{en} \quad \Omega \\ \varphi = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.18}$$

Es bien sabido (véase [2] o [6], por ejemplo) que los autovalores $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ de (4.18) constituyen una sucesión creciente de números positivos que tiende a infinito

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \to \infty.$$

El primero de los autovalores es simple. Es habitual repetir el resto de acuerdo a su multiplicidad. De este modo, existe una sucesión de autofunciones $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$, donde φ_j es una autofunción asociada al autovalor λ_j, que constituye una base ortonormal de $L^2(\Omega)$. Es decir, se tiene, en particular,

$$\int_\Omega \varphi_j \varphi_k dx = \delta_{jk}. \tag{4.19}$$

De acuerdo a (4.19), multiplicando la ecuación (4.18) correspondiente a λ_k por φ_j e integrando en Ω, gracias a la fórmula de Green obtenemos que

$$\int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k dx = \lambda_j \int_\Omega \varphi_j \varphi_k dx = \lambda_j \delta_{jk} = \lambda_k \delta_{jk}. \tag{4.20}$$

De este modo se deduce que las autofunciones son también ortogonales en $H_0^1(\Omega)$. Más concretamente, la sucesión $\left\{\varphi_j/\sqrt{\lambda_j}\right\}_{j\geq 1}$ constituye una base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$.

Utilizando esta base de funciones propias del Laplaciano podemos resolver la ecuación de ondas (4.16) como lo hicimos en una variable espacial. Para ello desarrollamos los datos iniciales (u_0, u_1) de (4.16) del modo siguiente

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x);\; u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x). \tag{4.21}$$

Buscamos entonces la solución u de (4.16) en la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x). \tag{4.22}$$

Observamos entonces que los coeficientes $\{u_k\}$ han de resolver la ecuación diferencial:

$$u_k''(t) + \lambda_k u_k(t) = 0,\; t > 0,\; u_k(0) = a_k,\; u_k'(0) = b_k, \tag{4.23}$$

de modo que

$$u_k(t) = a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k} t\right). \tag{4.24}$$

De este modo obtenemos que la solución u de (4.16) admite la expresión

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) \right) \varphi_k(x). \tag{4.25}$$

La similitud de la expresión (4.4) del caso de una dimensión espacial con la fórmula (4.25) del caso general es evidente. En realidad (4.4) es un caso particular de (4.25). Basta observar que cuando $\Omega = (0, \pi)$, el problema de autovalores para el Laplaciano se convierte en un problema clásico de Sturm-Liouville. El espectro es por tanto explícito:

$$\lambda_k = k^2,\ k \geq 1;\ \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}(kx),\ k \geq 1. \tag{4.26}$$

Con estos datos las expresiones (4.4) y (4.25) coinciden efectivamente.

La energía de las soluciones de (4.16) es en este caso

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\mid \nabla u(x,t) \mid^2 + |u_t(x,t)|^2\right] dx \tag{4.27}$$

y también se conserva en tiempo. Nuevamente la energía es proporcional al cuadrado de la norma en el espacio de la energía $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

En este caso el resultado básico de existencia y unicidad de soluciones dice que:

"Si $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, existe una única solución* $(u, u_t) \in C([0,\infty);\, H)$*, i.e.*

$$u \in C\left([0,\infty);\, H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,\infty);\, L^2(\Omega)\right), \tag{4.28}$$

de (4.16)*. La energía* $E(t)$ *en* (4.27) *es constante en tiempo".*

Conviene también señalar que, si bien la regularidad (4.28) de las soluciones débiles permite interpretar la ecuación de ondas en un sentido débil, el hecho que u sea solución con la regularidad (4.28), junto con la propiedad del operador de Laplace con condiciones de contono de Dirichlet de constituir un isomorfismo de $H_0^1(\Omega)$ en $H^{-1}(\Omega)$, permite deducir que $u \in C^2\left([0,\infty);\, H^{-1}(\Omega)\right)$. De este modo se concluye que la ecuación (4.16) tiene sentido para cada $t > 0$ en el espacio $H^{-1}(\Omega)$.

Acabamos de ver cómo se puede aplicar el método de Fourier para la resolución de la ecuación de ondas. Basta para ello conocer la descomposición espectral del Laplaciano con condiciones de Dirichlet (4.18).

El método de Fourier puede ser adaptado a muchas otras situaciones:

- Condiciones de contorno de Neumann, o mixtas en las que la condición de Dirichlet y Neumann se satisfacen en subconjuntos complementarios de la frontera.

- Ecuaciones más generales con coeficientes dependientes de x de la forma:

  $$\rho(x)u_{tt} - \mathrm{div}(a(x)\nabla u) + q(x)u = 0,$$

  donde ρ, a y q son funciones medibles y acotadas y ρ y a son uniformemente positivas, i.e. existen $\rho_0,\, a_0 > 0$ tales que

  $$\rho(x) \geq \rho_0,\ a(x) \geq a_0,\ p.c.t.\, x \in \Omega.$$

  Pero es cierto también que el método de Fourier tiene sus limitaciones. En particular no permite abordar ecuaciones no lineales, con coeficientes que dependen de x y t, etc. En estos últimos casos, los métodos de Galerkin y la teoría de semi-grupos se muestran mucho más flexibles y útiles.

5 Series de Fourier como método numérico

En la sección anterior hemos visto que la ecuación de ondas puede ser resuelta mediante series de Fourier obteniéndose la expresión

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)+\frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)\right]\varphi_k(x), \tag{5.1}$$

siendo $\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1}$ y $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$ las autofunciones y autovalores del Laplaciano. Como vimos, es conveniente elegir $\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1}$ de modo que constituyan una base ortonormal de $L^2(\Omega)$.

Vimos asimismo que la energía

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\mid \nabla u(x,t)\mid^2+\mid u_t(x,t)\mid^2\right]dx, \tag{5.2}$$

se conserva a lo largo de las trayectorias.

La energía inicial de las soluciones viene dada por

$$E(0)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mid \lambda_k a_k\mid^2+\mid b_k\mid^2\right]. \tag{5.3}$$

Así, la hipótesis de que los datos iniciales sean de energía finita

$$(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega), \tag{5.4}$$

es equivalente a que las sucesiones $\left\{a_k\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k\geqslant 1}$, $\{b_k\}$ pertenezcan al espacio de las sucesiones de cuadrado sumable ℓ^2.

En vista del desarrollo en serie (5.1) de las soluciones, parece natural construir un método numérico en el que la aproximación venga dada, simplemente, por las sumas parciales de la serie:

$$u_N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\left[a_k\cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)+\frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)\right]\varphi_k(x). \tag{5.5}$$

La suma finita de u_N en (5.5) proporciona, efectivamente, una aproximación de la solución u representada en la serie de Fourier (5.1). Para comprobarlo consideremos el resto

$$\varepsilon_N=u-u_N=\sum_{k\geqslant N+1}\left[a_k\cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)+\frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)\right]\varphi_k(x). \tag{5.6}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{\Omega}\nabla\varphi_k\cdot\nabla\varphi_j dx=\begin{cases}0, & \text{si} \quad k\neq j\\ \lambda_k, & \text{si} \quad k=j,\end{cases}$$

es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \left|\left|\nabla \varepsilon_N(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{k\geqslant N+1} \lambda_k \Big[a_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) \Big]^2 \\ &\leqslant 2 \sum_{k\geqslant N+1} \left[\lambda_k \mid a_k \mid^2 + \mid b_k \mid^2 \right]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Como la serie (5.3) de la energía inicial es convergente, en virtud de (5.7) deducimos que

$$u_N(t) \to u(t) \text{ en } C\left([0,\infty);\, H_0^1(\Omega)\right), \tag{5.8}$$

cuando $N \to \infty$.

El mismo argumento permite probar que

$$u_{N,t} \to u_t(t) \text{ en } C\left([0,\infty);\, L^2(\Omega)\right). \tag{5.9}$$

De (5.8)-(5.9) deducimos que, cuando los datos iniciales están en el espacio de la energía $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, las sumas parciales (5.5) proporcionan una aproximación eficaz de la solución en dicho espacio, uniformemente en tiempo $t \geqslant 0$.

Cabe por tanto preguntarse sobre la tasa o velocidad de la convergencia. El argumento anterior no proporciona ninguna información en este sentido puesto que la mera convergencia de la serie (5.3) no permite decir nada sobre la velocidad de convergencia de sus sumas parciales.

Con el objeto de obtener tasas de convergencia es necesario hacer hipótesis adicionales sobre los datos iniciales. Supongamos por ejemplo que

$$(u_0,\, u_1) \in \left[H^2 \cap H_0^1(\Omega)\right] \times H_0^1(\Omega). \tag{5.10}$$

En este caso tenemos

$$\sum_{k\geqslant 1} \left[\lambda_k^2 \mid a_k \mid^2 + \lambda_k \mid b_k \mid^2 \right] < \infty. \tag{5.11}$$

En efecto, tal y como veíamos anteriormente en el caso de u_0, el que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ se caracteriza porque sus coeficientes de Fourier $(b_k)_{k\geqslant 1}$ satisfacen

$$\sum_{k\geqslant 1}^{\infty} \lambda_k \mid b_k \mid^2 < \infty. \tag{5.12}$$

Por otra parte, $\parallel \Delta\varphi \parallel_{L^2(\Omega)}$ define una norma equivalente a la inducida por $H^2(\Omega)$ en el subespacio [3] $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$. Por otra parte, se tiene

$$\int_\Omega \Delta\varphi_k \Delta\varphi_j dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j \\ \lambda_k^2 & \text{si} \quad k = j. \end{cases} \tag{5.13}$$

[3] En este punto ultilizamos el resultado clásico de regularidad de las soluciones del problema de Dirichlet para el Laplaciano que garantiza que, si el dominio es de clase C^2 y el segundo miembro está en $L^2(\Omega)$, entonces la solución pertenece a $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.

Deducimos por tanto que

$$\left|\left|\Delta u_0\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k\geqslant 1} \lambda_k^2 \left|a_k\right|^2 \tag{5.14}$$

y, de este modo, observamos que, efectivamente, la serie (5.11) converge.

La información adicional que (5.11) proporciona sobre los coeficientes de Fourier permite obtener tasas de convergencia de u_N hacia u en el espacio de la energía. Por ejemplo, volviendo a (5.7) tenemos, usando el hecho de que $\{\lambda_j\}$ es creciente,

$$\begin{aligned}
\left|\left|\nabla\varepsilon_N(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant 2\sum_{k\geqslant N+1}\left[\lambda_k\left|a_k\right|^2+\left|b_k\right|^2\right]\\
&\leqslant 2\sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{\lambda_k}\left[\lambda_k^2\left|a_k\right|^2+\lambda_k\left|b_k\right|^2\right]\\
&\leqslant \frac{2}{\lambda_{N+1}}\sum_{k\geqslant N+1}\left[\lambda_k^2\left|a_k\right|^2+\lambda_k\left|b_k\right|^2\right]\\
&\leqslant \frac{C}{\lambda_{N+1}}\left|\left|\,(u_0,u_1)\,\right|\right|^2_{H^2\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

El mismo argumento puede ser utilizado para estimar la norma de $\varepsilon_{N,t}$ en $L^2(\Omega)$. De este modo deducimos que

$$\|\,u-u_N\,\|_{L^\infty\left(0,\infty;\,H_0^1(\Omega)\right)\cap W^{1,\infty}(0,\infty;\,L^2(\Omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_{N+1}}}\left|\left|\,(u_0,\,u_1)\,\right|\right|_{H^2\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}. \tag{5.15}$$

Esta desigualdad proporciona estimaciones explícitas sobre la velocidad de convergencia. En efecto, el clásico Teorema de Weyl sobre la distribución asintótica de los autovalores del Laplaciano asegura que

$$\lambda_N \sim c(\Omega)N^{2/n},\ N\to\infty \tag{5.16}$$

donde $c(\Omega)$ es una constante positiva que depende del dominio y n es la dimensión espacial[4].

Combinando (5.15) y (5.16) obtenemos que u_N converge a u en el espacio de la energía, uniformemente en tiempo $t\geqslant 0$, con un orden de $O\left(N^{-1/n}\right)$.

La hipótesis $(u_0,u_1)\in H^2\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ realizada sobre los datos iniciales es sólo una de las posibles. De manera general puede decirse que, cuando los datos iniciales son más regulares que lo que el espacio de la energía exige y verifican las condiciones de compatibilidad adecuadas en relación a las condiciones de contorno, entonces, se puede establecer una estimación sobre la velocidad de convergencia de la aproximación que las sumas parciales del desarrollo en serie de Fourier proporcionan a la solución de la ecuación de ondas.

[4]Es obvio que, por ejemplo, en una dimensión espacial $n=1$, la expresión asintótica en (5.16) coincide con lo que se observa en la expresión explícita del espectro. En efecto, recordemos que, cuando $\Omega=(0,\pi)$, $\lambda_k = k^2$.

Este método de aproximación lo denominaremos *método de Fourier*. Se trata de un método de aproximación sumamente útil en una dimensión espacial puesto que, al disponer de la expresión explícita de las autofunciones φ_k y autovalores de λ_k, la aproximación u_N puede calcularse de manera totalmente explícita. Bastaría para ello con utilizar una fórmula de cuadratura para aproximar el valor (4.3) de los coeficientes de Fourier.

El método de Fourier es sin embargo mucho menos eficaz en varias dimensiones espaciales. En efecto, en ese caso no disponemos de la expresión explícita de las autofunciones y autovalores y su aproximación numérica es un problema tan complejo como el de la propia aproximación de la ecuación de ondas.

Otro de los inconvenientes del método de Fourier es que, cuando la ecuación es no-lineal o tiene coeficientes que depende de (x, t), ya no se puede obtener una expresión explícita de la solución en serie de Fourier y por tanto tampoco de sus aproximaciones.

Es por eso que el método de Fourier tiene una utilidad limitada y que precisamos de métodos más sistemáticos y robustos que funcionen no sólo en casos particulares sino para amplias clases de ecuaciones. En este marco destacan los métodos de diferencias y elementos finitos, que serán el objeto central de este curso.

6 La ecuación de ondas disipativa

Hemos visto cómo el método de Fourier permite representar explícitamente las soluciones de la ecuación de ondas y que proporciona en sí un método numérico de aproximación de las mismas. En esta sección vamos a describir cómo se puede utilizar este método para analizar propiedades cualitativas de ecuaciones de ondas perturbadas. Para ello consideremos el caso de la ecuación de ondas disipativa:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a u_t = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{6.1}$$

Suponemos que Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 1$ y que la constante a es positiva: $a > 0$.

La ecuación de ondas (6.1) incorpora un término disipativo. La manera más natural de interpretar el efecto del término añadido au_t es reescribir la ecuación como

$$u_{tt} - \Delta u = -a u_t. \tag{6.2}$$

En esta expresión se observa que $-au_t$ representa una fuerza que actúa en el domino Ω en cada instante de tiempo. La fuerza aplicada es proporcional a la velocidad u_t, con una constante de proporcionalidad a que supondremos positiva. Por último, se observa que la fuerza aplicada es de signo contrario a la velocidad de modo que cuando $u_t > 0$ (resp. $u_t < 0$) la fuerza aplicada es negativa (resp. positiva).

Para representar las soluciones en series de Fourier desarrollamos en primer lugar los datos iniciales:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x),\; u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x),\; x \in \Omega. \tag{6.3}$$

Aquí y en lo que sigue $\{\varphi_k\}_{k \geqslant 1}$:

$$-\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k \text{ en } \Omega;\; \varphi_k = 0 \text{ en } \partial\Omega. \tag{6.4}$$

Buscamos entonces una solución de (6.1) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k(x) \tag{6.5}$$

con $u_k = u_k(t)$ solución de

$$\begin{cases} u_k'' + \lambda_k u_k + a u_k' = 0, & t > 0 \\ u_k(0) = a_k,\; u_k'(0) = b_k. \end{cases} \tag{6.6}$$

La solución de (6.6) puede calcularse explícitamente. Para ello basta calcular las raíces del polinomio característico

$$\mu^2 + \lambda_k + a\mu = 0, \tag{6.7}$$

que vienen dadas por

$$\mu_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4\lambda_k}}{2}. \tag{6.8}$$

La solución de (6.6) es de la forma

$$u_k(t) = \alpha_+ e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4\lambda_k}}{2}t} + \alpha_- e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4\lambda_k}}{2}t} \tag{6.9}$$

donde las constantes α_- y α_+ son tales que los datos iniciales de (6.6) se verifican, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_+ + \alpha_- = a_k \\ \frac{-a+\sqrt{a^2-4\lambda_k}}{2}\alpha_+ - \frac{\left(a+\sqrt{a^2-4\lambda_k}\right)}{2}\alpha_- = b_k. \end{array} \right. \tag{6.10}$$

Esto es así cuando

$$a^2 \neq 4\lambda_k. \tag{6.11}$$

En caso contrario, cuando $a^2 = 4\lambda_k$, la solución es de la forma

$$u_k(t) = \alpha e^{-at/2} + \beta t e^{-at/2}, \tag{6.12}$$

donde las constantes α y β son tales que se verifican los datos iniciales:

$$\alpha = a_k, \; -\frac{a}{2}\alpha + \beta = b_k. \tag{6.13}$$

A partir de estas expresiones es fácil deducir cuál es el comportamiento cualitativo de las soluciones (6.5) de (6.1). Para ello es conveniente analizar la evolución temporal de la energía:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 \right] dx. \tag{6.14}$$

Es fácil comprobar que la energía E es decreciente. En efecto, multiplicando por u_t en la ecuación (6.1) obtenemos la fórmula de disipación de la energía:

$$\frac{dE}{dt}(t) = -a\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx. \tag{6.15}$$

De esta identidad deducimos que, efectivamente, la energía decrece en el tiempo.

Pero la identidad (6.15) en sí misma no proporciona información precisa sobre el modo en que las soluciones decrecen. Este análisis exige la utilización de las series de Fourier.

Recordemos que, por las propiedades de ortogonalidad de las autofunciones $\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1}$ en $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \left[|u_k'(t)|^2 + \lambda_k |u_k(t)|^2 \right]. \tag{6.16}$$

Introducimos la notación

$$e_k(t) = \frac{1}{2}\Big[|u_k'(t)|^2 + \lambda_k |u_k(t)|^2\Big] \tag{6.17}$$

para la energía de cada una de las componentes de Fourier.

En efecto:

$$E(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\Big[|u_k'(t)|^2 + \lambda_k |u_k(t)|^2\Big]. \tag{6.18}$$

Ahora bien, en el caso genérico en el que (6.9) se cumple (obsérvese que $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$ es un conjunto numerable y que, por tanto, para casi todo $a > 0$ la condición (6.11) se cumple) de la expresión (6.9) deducimos que $e_k(t)$ es una función con un decaimiento exponencial que satisface

$$e_k(t) \leqslant C e_k(0) e^{-\omega_k t} \tag{6.19}$$

donde C es una constante positiva independiente de k y de la solución y ω_k es la tasa exponencial de decaimiento de la $k-$ésima componente de Fourier que viene dada por

$$\omega_k = \begin{cases} \frac{a-\sqrt{a^2-4\lambda_k}}{2} & , \text{ cuando } \quad a^2 > 4\lambda_k \\ \frac{a}{2} & , \text{ cuando } \quad a^2 < 4\lambda_k. \end{cases} \tag{6.20}$$

El caso crítico $a^2 = 4\lambda_k$ será considerado más adelante.

En el caso en que la condición (6.11) no se cumple tenemos un resultado ligeramente distinto

$$e_k(t) \leqslant C e_k(0) t e^{-\omega_k t}, \tag{6.21}$$

con

$$\omega_k = a/2. \tag{6.22}$$

Combinando estos resultados sobre el decaimiento de cada componente de Fourier y (6.18) deducimos que

$$E(t) \leqslant C E(0) e^{-\omega t}, \tag{6.23}$$

con

$$\omega = \omega(a) = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{si} \quad a^2 < 4\lambda_1, \\ \frac{a-\sqrt{a^2-4\lambda_1}}{2} & \text{si} \quad a^2 > 4\lambda_1, \end{cases} \tag{6.24}$$

teniendo en cuenta también que en el caso crítico en que

$$a^2 = 4\lambda_1, \tag{6.25}$$

tenemos un decaimiento ligeramente inferior

$$E(t) \leqslant C E(0) t e^{-\frac{a}{2}t}. \tag{6.26}$$

En cualquier caso vemos que la función

$$a \to \omega(a) \tag{6.27}$$

que al potencial disipativo a le asocia la tasa exponencial de decaimiento de la energía de las soluciones tiene las siguientes propiedades:

* $\omega(a)$ crece linealmente para $a \in [0,\, 2\sqrt{\lambda_1}]$;
* $\omega(a)$ decrece cuando $a > 2\sqrt{\lambda_1}$;
* $\omega(a) \searrow 0$ cuando $a \nearrow \infty$;
* El máximo de $\omega(a)$ se alcanza cuando (6.25) se cumple, es decir, para el potencial disipativo

$$a = 2\sqrt{\lambda_1}. \tag{6.28}$$

En particular vemos que, contrariamente a lo que una primera intuición podría sugerir, la tasa de decaimiento de las soluciones, $\omega(a)$, no es una función monótona creciente del potencial disipativo a, ni tiende a infinito cuando $a \nearrow \infty$ sino que, la cantidad de disipación que el sistema (6.1) puede soportar se satura cuando se alcanza el valor crítico (6.28) del potencial disipativo y a partir de ese momento, para mayores valores de a, la tasa de decaimiento comienza a decrecer. Esto es lo que se conoce como fenómeno de sobredisipación ("overdamping"en inglés). A partir del valor (6.28) del potencial disipativo, el decaimiento empeora.

Pero ésto es así cuando se consideran globalmente todas las posibles soluciones de (6.1) o, lo que es lo mismo, se tienen en cuenta todas las componentes de Fourier de la solución. Las expresiones (6.9) y (6.20) muestran que, si se consideran únicamente las altas frecuencias de Fourier correspondientes a autovalores que satisfacen

$$4\lambda_k \geqslant a^2, \tag{6.29}$$

entonces la energía de las soluciones decrece con una tasa exponencial $a/2$.

Por tanto, a pesar de que de manera global el fenómeno de sobredisipación se produce, las altas frecuencias si que presentan un comportamiento más acorde con la intuición de modo que su tasa de decaimiento aumenta linealmente con el potencial disipativo a.

Este fenómeno de sobredisipación no ocurre en otros modelos más sencillos. Por ejemplo, si consideramos la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + au = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.30}$$

utilizando su desarrollo en serie de Fourier es muy fácil probar que

$$\| u(t) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant e^{-\frac{(\lambda_1+a)}{2}t} \| u_0 \|_{L^2(\Omega)}, \forall t > 0 \tag{6.31}$$

para toda solución y todo potencial disipativo a. Vemos pues que en este caso la tasa de decaimiento aumenta de manera lineal con el potencial disipativo.

¿Qué es lo que distingue la ecuación de ondas de la del calor y hace que en la primera se produzca un fenómeno de sobredisipación? La respuesta es sencilla: La ecuación de ondas es de orden dos en tiempo y sus genuinas incógnitas son u y u_t. Un solo potencial disipativo es incapaz de aumentar arbitrariamente la tasa de decaimiento.

Esto se pone claramente de manifiesto cuando escribimos la ecuación de ondas (6.1) en forma de sistema. Tenemos

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = \Delta u - av. \end{cases} \tag{6.32}$$

En la segunda ecuación de (6.32) vemos que el potencial a disipa efectivamente la segunda componente $v = u_t$ del sistema. Uno podría pensar que de (6.32) se desprende que la primera componente u no se disipa. Pero esto no es así, ambas lo hacen a través del acoplamiento del sistema pero sin que se pueda evitar el fenómeno de sobredisipación.

El remedio parece entonces sencillo. Utilizamos dos potenciales distintos $a > 0$ y $b > 0$ que afecten tanto la componente u_t como u. Llegamos así al sistema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + au_t + bu = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{6.33}$$

En este caso la energía del sistema es

$$E_b(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \Big[|u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 + bu^2(x,t) \Big] dx \tag{6.34}$$

y satisface

$$\frac{dE_b}{dt}(t) = -a \int_\Omega u_t^2(x,t) dx. \tag{6.35}$$

El análisis de Fourier proporciona una expresión de las soluciones de (6.33) de la forma (6.5) donde, ahora, cada coeficiente de Fourier es solución de

$$u_k'' + (\lambda_k + b)u + au' = 0. \tag{6.36}$$

las raíces del polinomio característico son ahora

$$\mu_\pm^b = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(\lambda_k + b)}}{2}. \tag{6.37}$$

De este modo vemos que, para cualquier $a > 0$, si tomamos $b > 0$ suficientemente grande de modo que

$$a^2 < 4(\lambda_1 + b) \tag{6.38}$$

cada componente de Fourier decae con una tasa exponencial

$$\omega_k^b(a) = -\frac{a}{2}.$$

Vemos pues que eligiendo b de acuerdo a (6.38) se puede garantizar que la energía E_b satisface

$$E_b(t) \leqslant C E_b(0) e^{-\frac{a}{2}t}$$

evitándose así el fenómeno de sobredisipación.

Un análisis análogo permite describir el modo en que el espectro de la ecuación de ondas se convierte en el del calor a lo largo de la familia uniparamétrica de ecuaciones:

$$\varepsilon u_{tt} - \Delta u + u_t = 0. \tag{6.39}$$

En efecto, se observa que, en el límite cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene la ecuación del calor:

$$u_t - \Delta u = 0. \tag{6.40}$$

Es interesante analizar cómo el espectro de la ecuación de ondas disipativa, esencialmente localizado a lo largo de una recta vertical del plano complejo se convierte en un espectro localizado en el semieje real negativo. El hecho de que el orden del sistema pase de ser dos a ser uno también queda de manifiesto en este proceso límite puesto que la mitad de los autovalores de la ecuación de ondas se desvanecen tendiendo a menos infinito.

7 La ecuación de ondas en el contexto de la Teoría de Semigrupos

En las secciones anteriores hemos descrito cómo la ecuación de ondas puede ser resuelta mediante series de Fourier. Sin embargo, tal y como señalamos, este método carece de la generalidad que desearíamos puesto que no permite analizar ecuaciones con coeficientes dependientes de (x, t), ecuaciones no-lineales, etc.

En esta sección vamos a indicar el modo en que la ecuación de ondas puede enmarcarse en el contexto de la teoría de semigrupos que se muestra mucho más flexible a la hora de abordar sus variantes.

Consideremos pues la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0,\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, que supondremos acotado para simplificar la presentación, si bien esta hipótesis no es en absoluto esencial.

Conviene escribir la ecuación de ondas como un sistema de orden uno:

$$\begin{cases} u_t &= v \\ v_t &= \Delta u. \end{cases} \tag{7.2}$$

De este modo la incógnita genuina del sistema es el par $U = (u, v) = (u,\ u_t)$, lo cual coincide con nuestra intuición según la cual la verdadera incógnita no es sólamente la *posición* u sino también la *velocidad* u_t. Por otra parte, esto explica que en (4.1) tomemos dos datos iniciales u_0 y u_1 para u y u_t respectivamente.

En la variable vectorial U el sistema (7.2) puede escribirse formalmente como[5]

$$U_t = AU \tag{7.3}$$

donde A es el operador lineal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

siendo I el operador identidad y Δ el operador de Laplace.

Pero la escritura (7.3)-(7.4) es puramente formal. En efecto, como es bien sabido, en el marco de los espacios de Hilbert (o de Banach) de dimensión infinita, una definición

[5]En este punto abusamos de la notación, pues U se trataría del vector columna $\binom{u}{u_t}$ si bien, para simplificar la escritura a veces lo escribiremos como vector fila.

rigurosa de operador exige no solamente que indiquemos el modo en que actúa sino también su dominio.

Como habíamos indicado anteriormente, el espacio natural para resolver la ecuación de ondas es el espacio de Hilbert

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{7.5}$$

La elección de este espacio es efectivamente natural en vista de los siguientes hechos:

- La energía
$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \Big[\mid \nabla u(x,t) \mid^2 + \mid u_t(x,t) \mid^2 \Big] dx \tag{7.6}$$
se conserva en tiempo, lo cual puede ser comprobado formalmente multiplicando la ecuación de ondas por u_t e integrando en Ω.

  La conservación de la energía sugiere que, efectivamente, es natural buscar soluciones tales que $u \in H^1(\Omega)$ y $u_t \in L^2(\Omega)$.

- La condición de contorno de Dirichlet, $u = 0$ en $\partial\Omega$, sugiere la necesidad de buscar soluciones que se anulen en la frontera. Es bien conocido que, en el marco del espacio de Sobolev H^1, la manera más natural de interpretar esta condición es exigir que $u \in H_0^1(\Omega)$.

El espacio de la energía H es *un espacio de Hilbert* dotado de la norma:

$$\| (f,g) \|_H = \Big[\Big|\Big| f \Big|\Big|^2_{H_0^1(\Omega)} + \Big|\Big| g \Big|\Big|^2_{L^2(\Omega)} \Big]^{1/2}. \tag{7.7}$$

Por otra parte, las normas $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$, $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$ están definidas de la manera usual[6]:

$$\Big|\Big| f \Big|\Big|_{H_0^1(\Omega)} = \Big[\int_\Omega \mid \nabla f \mid^2 dx \Big]^{1/2}; \ \Big|\Big| g \Big|\Big|_{L^2(\Omega)} = \Big[\int_\Omega g^2 dx \Big]^{1/2}. \tag{7.8}$$

Definimos el operador A como un operador lineal no-acotado en H. Para ello establecemos que el dominio del operador A es precisamente el subespacio de los elementos $V \in H$ para los que $AV \in H$. En vista de la estructura de A ésto da como resultado el dominio:

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) : \, v \in H_0^1(\Omega), \, \Delta u \in L^2(\Omega) \right\} \qquad (7.9) \\ &= \left\{ (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) : \, \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

[6]En este punto utilizamos implícitamente el hecho que Ω sea *acotado*. En efecto, si no lo fuese (o si, de manera más general, si Ω no fuese acotado en una dirección) no se podría garantizar que la desigualdad de Poincaré se verifica, lo cual a su vez no permitiría garantizar que la norma definida en (7.8) fuese equivalente a la inducida por $H^1(\Omega)$ sobre el subespacio $H_0^1(\Omega)$.

Cuando el domino Ω es de clase C^2 el resultado clásico de regularidad elíptica que garantiza que las funciones $u \in H_0^1(\Omega)$ tales que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ pertenecen en realidad a $H^2(\Omega)$, permite reescribir el dominio de la manera siguiente

$$D(A) = \Big[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\Big] \times H_0^1(\Omega). \tag{7.10}$$

En este punto conviene subrayar que la hipótesis de que Ω sea regular de clase C^2 no es en absoluto esencial. Todo lo que vamos a decir en lo sucesivo identificando el dominio con (7.10) es también cierto, sin la hipótesis de regularidad del abierto Ω, tomando (7.9) como definición del dominio del operador.

En lo sucesivo supondremos por tanto que Ω, además de ser acotado, es de clase C^2.

Es fácil comprobar que A es un operador anti-adjunto, i.e.

$$A^* = -A. \tag{7.11}$$

Basta para ello utilizar el hecho de que el operador de Laplace A con dominio $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ es un operador autoadjunto.

Pero, de hecho, para comprobar la antisimetría que (7.11) indica basta con realizar el siguiente cálculo elemental:

$$\begin{aligned} \Big(AU,\, \widetilde{U}\Big)_H &= \Big(v,\, \widetilde{u}\Big)_{H_0^1(\Omega)} + \Big(\Delta u,\, \widetilde{v}\Big)_{L^2(\Omega)} \qquad (7.12)\\ &= \int_\Omega \Big[\nabla v \cdot \nabla \widetilde{u} + \Delta u \widetilde{v}\Big] dx = -\int_\Omega \Big[v \Delta \widetilde{u} + \nabla u \cdot \nabla \widetilde{v}\Big] dx \\ &= -\Big(U,\, A\widetilde{U}\Big)_H \end{aligned}$$

para todo $U,\, \widetilde{U} \in D(A)$.

En (7.12) y en lo sucesivo mediante $(\cdot,\cdot)_H$ denotamos el producto escalar en H. En vista de la estructura de H como espacio producto, el producto escalar en H es la suma de los productos escalares en $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ de las primeras y segundas componentes de vector V.

Con esta definición del operador A podemos ahora escribir la ecuación de ondas (7.1) en la forma del siguiente problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} U_t = AU, \quad t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{7.13}$$

donde el dato inicial U_0 es, evidentemente, el vector columna $(u_0,\, u_1)$ de los datos iniciales de (7.1).

Tenemos dos tipos de soluciones de (7.13). Aquéllas que denominaremos *soluciones fuertes* tales que[7]

$$U \in C\Big([0,\infty);\, D(A)\Big) \cap C^1([0,\infty);\, H). \tag{7.14}$$

[7] El dominio $D(A)$ de un operador se puede dotar de estructura Hilbertiana a través de la norma $||u||_{D(A)} = [||u||_H^2 + ||Au||_H^2]^{1/2}$.

En este caso tanto el término de la izquierda como de la derecha de (7.13) son funciones bien definidas que pertenecen al espacio $C([0,\infty);\, H)$ y, por tanto, la ecuación de (7.13) tiene sentido en el espacio H para todo valor de $t > 0$. La segunda ecuación de (7.13) relativa al dato inicial tiene también sentido pues, por la continuidad de U en tiempo a valores en $D(A)$, $U(0)$ está bien definida en $D(A)$. Es por este hecho precisamente que sólo cabe esperar la existencia de soluciones fuertes cuando el dato inicial U_0 de (7.13) pertenece a $D(A)$.

En términos de la posición u y velocidad u_t de la solución de la ecuación de ondas (7.1), la regularidad (7.14) equivale a

$$u \in C\Big([0,\infty);\, H^2 \cap H_0^1(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty);\, H_0^1(\Omega)\Big) \cap C^2\Big([0,\infty);\, L^2(\Omega)\Big). \tag{7.15}$$

Es también claro que (7.15) permite dar un sentido a todas las ecuaciones de (7.1). En particular, la ecuación de ondas se verifica, para cada $t > 0$, en $L^2(\Omega)$ y, por tanto, en particular, para casi todo $x \in \Omega$.

Las *soluciones débiles* de (7.13) son menos regulares. Son en realidad aquéllas que pertenecen al espacio de la energía, i.e.

$$U \in C([0,\infty);\, H) \tag{7.16}$$

o bien

$$u \in C\Big([0,\infty);\, H_0^1(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty);\, L^2(\Omega)\Big). \tag{7.17}$$

Cabe preguntarse por el sentido de (7.13) bajo las condiciones de regularidad (7.16). En efecto, este sentido no está a priori claro pues (7.16) no permite definir, en principio, AU, al no pertenecer U a $D(A)$ ni permite calcular la derivada temporal de U.

A pesar de ello, tiene efectivamente sentido hablar de soluciones débiles de (7.1) o (7.13) y esto se puede ver con más claridad en el contexto de (7.1) y bajo la condición de regularidad (7.17). En efecto, es bien sabido que el operador $-\Delta$ define un isomorfismo de $H_0^1(\Omega)$ en su dual $H^{-1}(\Omega)$. Por tanto, como $u \in C\Big([0,\infty);\, H_0^1(\Omega)\Big)$, tenemos también que $\Delta u \in C\Big([0,\infty);\, H^{-1}(\Omega)\Big)$. Por otra parte, como $u \in C\Big([0,\infty);\, H_0^1(\Omega)\Big)$, se trata en particular de una distribución por lo que su derivada segunda temporal u_{tt} está bien definida en el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega \times (0,\infty))$. La ecuación de ondas (7.1) tiene por tanto sentido en el marco de las distribuciones. Ahora bien, como $\Delta u \in C\Big([0,\infty);\, H^{-1}(\Omega)\Big)$, de la propia ecuación de ondas deducimos que $u_{tt} \in C\Big([0,\infty);\, H^{-1}(\Omega)\Big)$ y entonces la ecuación de ondas tiene sentido, para todo $t > 0$, en $H^{-1}(\Omega)$. Vemos por tanto que las soluciones débiles de la ecuación de ondas, en la clase (7.17), por ser soluciones de la ecuación de ondas, tienen la propiedad de regularidad adicional

$$u \in C^2\Big([0,\infty);\, H^{-1}(\Omega)\Big). \tag{7.18}$$

La teoría de semi-grupos garantiza la existencia y unicidad de soluciones de (7.13) (y por tanto de la ecuación de ondas original) tanto fuertes como débiles. Basta para ello aplicar el Teorema de Hille-Yosida en su versión más elemental (véase, por ejemplo, el capítulo VII del libro [2]).

Con el objeto de enunciar este importante Teorema conviene recordar la noción de operador maximal disipativo.

Definition 7.1 *Un operador $A : D(A) \subset H \to H$ lineal, no acotado, en el espacio de Hilbert H se dice disipativo si*

$$(Av,\, v)_H \leqslant 0,\, \forall v \in D(A). \tag{7.19}$$

Se dice que es maximal-disipativo si, además, satisface la siguiente condición de maximalidad:

$$R(I - A) = H \Leftrightarrow \forall f \in H,\, \exists u \in D(A) \ t.q.\ u - Au = f. \tag{7.20}$$

Bajo esta condición se verifica el siguiente importante Teorema:

Theorem 7.1 *(de Hille-Yosida)*

Sea A un operador maximal-disipativo en un espacio de Hilbert H. Entonces, para todo $u_0 \in D(A)$ existe una función

$$u \in C\Big([0,\infty);\, D(A)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty);\, H\Big) \tag{7.21}$$

única tal que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au \quad en \quad [0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{7.22}$$

Además se tiene

$$\| u(t) \| \leqslant \| u_0 \|_H,\ \Big|\Big| \frac{du}{dt}(t) \Big|\Big|_H = \| Au(t) \|_H \leqslant \| Au_0 \|_H,\, \forall t > 0. \tag{7.23}$$

Es fácil comprobar que el operador A asociado a la ecuación de ondas (7.1) definido anteriormente es maximal disipativo. El hecho de que A sea anti-adjunto ($A^* = -A$) garantiza que tanto A como $-A$ son disipativos en el sentido de la Definición 7.1[8].

En efecto, de (7.12) deducimos que

$$(AU,\, U)_H = -(AU,\, U)_H$$

[8]En el contexto de los sistemas de la Mecánica la palabra “disipativo” tiene un sentido preciso: Se dice que un sistema de evolución es disipativo si la energía de las soluciones decrece en tiempo. Es este precisamente el sentido del término en el marco abstracto en la Teoría de Operadores que se desprende de (7.19). En efecto, multiplicando escalarmente en H la primera ecuación (7.22) por u, en virtud de (7.19) deducimos que $\big(\frac{d}{dt}u(t),\, u(t)\big)_H = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u(t) \|_H^2 =< Au(t),\, u(t),\, u(t)) >\leqslant 0$.

y por tanto

$$(AU,\, U)_H = 0 \tag{7.24}$$

lo cual garantiza la disipatividad de A y $-A$.[9]

Por otra parte, el operador A de la ecuación de ondas verifica también la condición de maximalidad (7.20). En efecto, para comprobarlo basta ver que para todo par $(f, g) \in H$, *i.e.* $f \in H_0^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, existe al menos una solución de la ecuación

$$(I - A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{7.25}$$

con $(u, v) \in D(A) = \Big[H^2 \cap H_0^1(\Omega)\Big] \times H_0^1(\Omega)$. Esto es efectivamente cierto. Dada la forma explícita del operador A el sistema (7.25) se escribe del siguiente modo

$$u - v = f,\; v - \Delta u = g. \tag{7.26}$$

La primera ecuación de (7.26) puede reescribirse como

$$v = u - f \tag{7.27}$$

y entonces la segunda adquiere la forma

$$u - \Delta u = g + f. \tag{7.28}$$

Como $g + f \in L^2(\Omega)$, la segunda ecuación (7.28), que puede escribirse de manera más precisa como

$$\begin{cases} u - \Delta u = f + g & \text{en} \quad \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.29}$$

admite una única solución $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ por los resultados clásicos de existencia, unicidad y regularidad para el problema de Dirichlet. Como $f \in H_0^1(\Omega)$ y $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ la solución v de (7.27) satisface entonces $v \in H_0^1(\Omega)$. Deducimos entonces que (7.25) admite una única solución en $D(A)$, lo cual garantiza la maximalidad de A.

El Teorema 7.1, aplicado a la versión abstracta (7.13) de la ecuación de ondas (7.1) proporciona de manera inmediata la existencia y unicidad de soluciones fuertes. En efecto, se tiene:

[9] Conviene observar que cuando A satisface (7.24) las soluciones de la ecuación abstracta

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t)$$

conservan la energía puesto que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|\Big|u(t)\Big|\Big|_H^2 = (Au(t),\, u(t)) = 0.$$

Theorem 7.2 *Si Ω es un dominio acotado de clase C^2, para cada par de datos iniciales $(u_0, u_1) \in \Big[H^2 \cap H_0^1(\Omega)\Big] \times H_0^1(\Omega)$, la ecuación de ondas posee una única solución fuerte en la clase*

$$u \in C\Big([0,\infty);\, H^2 \cap H_0^1(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty);\, H_0^1(\Omega)\Big) \cap C^2\Big([0,\infty);\, L^2(\Omega)\Big). \tag{7.30}$$

Sólo nos resta deducir la existencia y unicidad de soluciones en el espacio de la energía. Tenemos para ello varias opciones. Una de ellas consiste en analizar el operador de ondas como operador no acotado en el espacio de Hilbert $\widetilde{H} = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ con dominio $H \subset \widetilde{H}$. Es fácil comprobar que el operador A antes definido es también un operador maximal disipativo en este marco funcional. De este modo, como consecuencia del Teorema de Hille-Yosida deducimos que:

Theorem 7.3 *En las hipótesis del Teorema 7.2, si los datos iniciales $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ la ecuación de ondas* (7.1) *admite una única solución en*

$$u \in C\Big([0,\infty); H_0^1(\Omega)\Big) \cap C^1\Big[0,\infty);\, L^2(\Omega)\Big) \cap C^2\Big([0,\infty);\, H^{-1}(\Omega)\Big). \tag{7.31}$$

Conviene observar que ambos teoremas de existencia y unicidad (Teoremas 7.2 y 7.3) proporcionan resultados semejantes pero en espacios que difieren en una derivada en su regularidad.

La posibilidad de obtener soluciones débiles a partir de soluciones fuertes puede también explicarse en el marco del problema abstracto (7.22). En efecto, suponiendo que A es un operador maximal disipativo, consideremos el problema abstracto y definamos la función

$$v(t) = \int_0^t u(s)ds + v_0. \tag{7.32}$$

Integrando a su vez la ecuación de (7.22) con respecto al tiempo obtenemos

$$u(t) - u_0 = A\int_0^t uds$$

que podemos reescribir de la siguiente manera:

$$u(t) = A\int_0^t uds + u_0 \Leftrightarrow v_t = Av - Av_0 + u_0.$$

Por lo tanto, para poder garantizar que también v es una solución del problema abstracto (7.22) basta con elegir v_0 de modo que

$$Av_0 = u_0. \tag{7.33}$$

Supongamos que, dado $u_0 \in H$, (7.33) admite una única solución $v_0 \in D(A)$. Entonces la función v definida en (7.32) satisface

$$\begin{cases} v_t = Av, \quad t > 0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{7.34}$$

En virtud del Teorema de Hille-Yosida, como $v_0 \in D(A)$, la ecuación (7.34) admite una única solución fuerte

$$v \in C\Big([0, \infty);\, D(A)\Big) \cap C^1\Big([0, \infty);\, H\Big). \tag{7.35}$$

De (7.35) deducimos que

$$u = v_t \in C\Big([0, \infty);\, H\Big). \tag{7.36}$$

Vemos de este modo que, cuando $u_0 \in H$, la ecuación abstracta admite una única solución débil en la clase (7.36).

Comentemos brevemente la ecuación (7.33). En la definición de operador maximal disipativo se garantiza que $I - A$ es un operador con rango pleno. Pero nada se dice del operador A. Conviene sin embargo señalar que ésto es irrelevante a la hora de resolver el problema abstracto (7.22). En efecto, introduzcamos el clásico cambio de variables

$$w(t) = e^{\lambda t} u(t), \tag{7.37}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Entonces $w_t = e^{\lambda t}\left[u_t + \lambda u\right]$. Por tanto, u es solución de (7.22) si y sólo si w es solución de

$$\begin{cases} w_t = Aw + \lambda w, \quad t > 0 \\ w(0) = u_0 \end{cases} \tag{7.38}$$

Esto indica que el cambio de variable permite transformar soluciones fuertes (resp. débiles) de (7.22) en soluciones fuertes (resp. débiles) de (7.38) y viceversa.

Por otra parte, cuando A es maximal-disipativo, para $\lambda = -1$, el operador $A - I$ de (7.38) es de rango pleno. Esto permite utilizar el argumento anterior de integración en tiempo para obtener soluciones débiles a partir de las soluciones fuertes directamente en (7.38) cuando $\lambda = -1$ (porque el problema correspondiente a (7.33) podría efectivamente garantizarse que tiene una única solución $v_0 \in D(A)$ para cada $u_0 \in H$).

En el caso de la ecuación de ondas, (7.33) puede resolverse directamente sin apelar al cambio de variables. En efecto, en este caso, el problema (7.33) puede reescribirse de la siguiente manera: Dado $(u_0,\, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ hallar $(v_0,\, v_1) \in \Big[H^2 \cap H_0^1(\Omega)\Big] \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_1 = u_0;\ \Delta v_0 = u_1. \tag{7.39}$$

La primera ecuación de (7.39) proporciona inmediatamente la solución $v_1 \in H_0^1(\Omega)$. Por otra parte, como $u_1 \in L^2(\Omega)$, sabemos que el problema elíptico

$$-\Delta v_0 = -u_1 \text{ en } \Omega;\ v_0 = 0 \text{ en } \partial\Omega, \tag{7.40}$$

admite una única solución $v_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.

Por lo tanto, en el marco de la ecuación de ondas, (7.33) admite una única solución, la cual permite obtener soluciones débiles de la ecuación de ondas a partir de las soluciones fuertes, a través del cambio de variable (7.32).

Como ya hemos indicado anteriormente, en el marco de la ecuación de ondas, el operador de ondas A es antiadjunto, y ésto equivale a la ley de conservación de energía (7.6). Vemos por tanto cómo la Teoría de semigrupos permite recuperar todos los resultados obtenidos mediante series de Fourier, pero con la ventaja de ofrecer un marco mucho más flexible para abordar otras ecuaciones.

Hemos visto que los resultados clásicos de la Teoría de semigrupos permiten construir soluciones fuertes para datos iniciales en $D(A) = H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ y soluciones débiles para datos en $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Pero estos no son más que dos de los posibles ejemplos de marcos funcionales en los que la ecuación de ondas está bien puesta. Otro ejemplo interesante es el de las soluciones ultradébiles con datos iniciales $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. En este caso el espacio natural para las soluciones es $C([0,T]; L^2(\Omega)) \times C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$. Los argumentos anteriores permiten probar de dos maneras distintas este resultado de existencia y unicidad de soluciones ultradébiles. En efecto:

- El cambio de variables (7.32) establece una relación biunívoca entre soluciones ultradébiles u y soluciones débiles v. Como corolario del Teorema 6.3, mediante este cambio de variable, se deduce la existencia y unicidad de soluciones ultradébiles.

- El teorema de Hille-Yosida puede también aplicarse directamente en este marco funcional para obtener la existencia y unicidad de soluciones ultradébiles. Basta para ello considerar el operador A en el espacio $H^{-1}(\Omega) \times [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]'$ con dominio $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \times [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]'$. Las soluciones que el Teorema de Hille-Yosida proporciona pertenecen entonces a la clase

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \cap C^2([0,T]; [H^2 \cap H_0^1(\Omega)]'). \tag{7.41}$$

Observación. Los diferentes marcos funcionales y grados de regularidad de las diversas soluciones que hemos construido y considerado pueden también entenderse en el marco de la representación de las soluciones en series de Fourier. Como ya hemos mencionado anteriormente, la Teoría de semigrupos permite sin embargo construir estas soluciones para una familia mucho más amplia de ecuaciones.

Por ejemplo, si desarrollamos las soluciones de la ecuación de ondas como en (4.25) las soluciones débiles de energía finita corresponden a coeficientes de Fourier tales que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_k|a_k|^2+|b_k|^2]E<\infty. \tag{7.42}$$

Las soluciones fuertes exigen sin embargo condiciones más fuertes sobre los coeficientes de Fourier:

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_k^2|a_k|^2+\lambda_k|b_k|^2]E<\infty. \tag{7.43}$$

Por último, las soluciones ultradébiles exigen simplemente que

$$\sum_{k=1}^{\infty}[|a_k|^2+\lambda_k^{-1}|b_k|^2]E<\infty. \tag{7.44}$$

■

En virtud del Teorema de Hille-Yosida (Teorema 7.1), cuando A es un operador maximal disipativo, es el *generador de un semigrupo* $S(t): H \to H$ que a cada $u_0 \in H$ asocia el valor $u(t) = S(t)u_0$ de la solución del problema abstracto (7.22) en cada instante de tiempo $t > 0$.

El semigrupo $S(t)$ también se denota habitualmente como e^{At}, en vista de la analogía del sistema abstracto (7.22) con el clásico sistema lineal de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en el que A es una matriz.

El semigrupo $\{S(t)\}_{t\geqslant 0} = \{e^{At}\}_{t\geqslant 0}$ es una familia uniparamétrica de operadores lineales acotados en H. En realidad, en virtud de (7.23), $S(t)$ es una contracción para cada $t \geqslant 0$. Por otra parte, el semigrupo verifica las siguientes propiedades:

- $S(0) = I$,
- $t \to S(t)u_0$ es continua de $[0,\infty)$ en H para cada $u_0 \in H$,
- $S(t) \circ S(s) = S(t+s)$.

La última propiedad, denominada propiedad de semigrupo, es debida al carácter autónomo (o invariante por traslaciones temporales) de la ecuación (7.26).

Consideramos por último la ecuación de ondas no-homogénea:

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u = f & \text{en} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ u=0 & \text{en} \quad \partial\Omega\times(0,\infty) \\ u(0)=u_0,\ u_t(0)=u_1 & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{7.45}$$

En este caso (7.45) describe las vibraciones del cuerpo Ω sometido a una fuerza exterior $f = f(x,t)$.

El problema (7.45) también puede ser escrito en el marco de los problemas abstractos que se pueden abordar en el contexto de la Teoría de Semigrupos. En efecto, la primera ecuación de (7.45) puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} u_t &= v \\ v_t &= \Delta u + f, \end{cases} \tag{7.46}$$

que puede también reformularse como el problema abstracto

$$\begin{cases} U_t = AU + F, \quad t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{7.47}$$

donde $U = (u,\, u_t)$, A es el generador del semigrupo de la ecuación de ondas que acabamos de estudiar y

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{7.48}$$

Vemos por tanto que la fuerza externa F aplicada en la versión abstracta (7.47) del sistema (7.45) tiene una primera componente nula mientras que la función f de (7.45) interviene sólo en su segunda componente.

Inspirándonos en la fórmula de variación de las constantes para la resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas, el problema abstracto (7.47) puede escribirse en la forma integral siguiente

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(s)ds = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}F(s)ds, \tag{7.49}$$

siendo $S(t) = e^{At}$ el semigrupo generado por el operador maximal disipativo A.

En virtud de los resultados anteriores sobre las soluciones fuertes y débiles del sistema abstracto (7.22) asociado al operador A, es fácil deducir que:

- Si $F \in L^2(0, T;\, D(A))$, entonces $e^{A(t-s)}F(s) \in L^1(0, t;\, D(A))$.

  Basta para ello utilizar las estimaciones (7.23) que, con las notaciones presentes, garantizan que

  $$\left|\left|e^{A(t-s)}F(s)\right|\right|_H \leqslant \left|\left|F(s)\right|\right|_H, \quad \left|\left|Ae^{A(t-s)}F(s)\right|\right|_H \leqslant \left|\left|AF(s)\right|\right|_H,$$

  para todo $t \geqslant s$ y casi todo $s \in [0, T]$.

  Deducimos entonces que

  $$\int_0^t e^{A(t-s)}F(s)ds \in C([0, T];\, D(A)).$$

Sin embargo, para que podamos garantizar que se tiene una solución fuerte en la clase (7.21) es necesario también que

$$\int_0^t e^{A(t-s)}F(s)ds \in C^1([0,T];\, H)$$

para lo que es también necesario que $F \in C([0,T];\, H)$.

- Si $F \in L^1(0,\, T;\, H)$, entonces $e^{A(t-s)}F(s) \in L^1(0,\, t;\, H)$ para todo $0 \leqslant t \leqslant T$ y por tanto

$$\int_0^t e^{A(t-s)}F(s)ds \in C([0,T];\, H).$$

De estos hechos deducimos los siguientes resultados de existencia y unicidad para el sistema abstracto no homogéneo (7.47):

- Si $U_0 \in D(A)$ y $F \in C([0,T];\, H) \cap L^1(0,T;\, D(A))$ entonces (7.47) admite una única solución fuerte en la clase

$$U \in C([0,T];\, D(A)) \cap C^1([0,T];\, H).$$

  El mismo resultado es válido bajo la hipótesis de que $F \in W^{1,1}(0,T;\, H)$.

- Si $U_0 \in H$ y $F \in L^1(0,T;\, H)$, entonces (7.47) admite una única solución débil. $U \in C([0,T];\, H)$.

Aplicando estos resultados a la ecuación de ondas no-homogénea (7.45) obtenemos los siguientes resultados de existencia y unicidad:

- Si $(u_0,\, u_1) \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ y $f \in C([0,T];\, L^2(\Omega)) \cap L^1(0,T;\, H_0^1(\Omega))$, entonces (7.45) admite una única solución fuerte u en la clase (7.30).

- Si $(u_0,\, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y $f \in L^1(0,T;\, L^2(\Omega))$, entonces (7.45) admite una solución débil

$$u \in C([0,T];\, H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{7.50}$$

En este punto conviene subrayar que, salvo que impongamos condiciones adicionales al segundo miembro f, no podemos garantizar que

$$u \in C^2([0,T];\, H^{-1}(\Omega)). \tag{7.51}$$

En efecto, como $u \in C([0,T];\, H_0^1(\Omega))$ y $-\Delta$ es un isomorfismo de $H_0^1(\Omega)$ en $H^{-1}(\Omega)$, tenemos $-\Delta u \in C([0,T];\, H^{-1}(\Omega))$. Por tanto, para que (7.51) pueda cumplirse, en vista de la ecuación $f = u_{tt} - \Delta u$, es imprescindible que $f \in C([0,T];\, H^{-1}(\Omega))$.

El cambio de variable (7.32) también puede ser aplicado en el marco de la ecuación abstracta (7.47) y permite nuevamente establecer una correspondencia biunívoca entre soluciones fuertes y débiles.

Las mismas técnicas que las desarrolladas en el caso homogéneo pueden ser también utilizadas en el no homogéneo. Esto nos permite, por ejemplo, construir soluciones ultradébiles de (7.45). De este modo obtenemos que si $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ y $F \in L^1(0, T;\, H^{-1}(\Omega))$, la ecuación (7.45) admite una única solución ultra-débil en la clase

$$u \in C([0, T];\, L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T];\, H^{-1}(\Omega)).$$

Además, si $f \in C\Big([0, T];\, \Big[H^2 \cap H_0^1(\Omega)\Big]'\Big)$, esta solución pertenece a

$$u \in C^2\Big([0, T];\, \Big(H^2 \cap H_0^1(\Omega)\Big)'\Big).$$

Pero, hasta ahora, todos los resultados que hemos obtenido sobre la ecuación de ondas mediante técnicas de teoría de semigrupos, pueden también ser obtenidos mediante series de Fourier. Sin embargo, como habíamos mencionado anteriormente, la teoría de semigrupos es indispensable si deseamos abordar ecuaciones más generales con coeficientes variables dependientes de (x, t), no lineales, etc. Ilustramos este hecho analizando el ejemplo de una ecuación de ondas con un potencial $p = p(x, t) \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$, i.e.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + p(x, t)u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x),\, u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{7.52}$$

Nuevamente la ecuación (7.52) puede ser escrita en la forma de un sistema

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = \Delta v - p(x, t)u, \end{cases} \tag{7.53}$$

o, en su versión abstracta,

$$U_t = AU + B(t)U \tag{7.54}$$

donde A es el operador maximal-disipativo asociado a la ecuación de ondas y $B(t) : H \to H$ es un operador lineal acotado dependiente del tiempo:

$$B(t)U = B(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p(x, t)u \end{pmatrix} \tag{7.55}$$

la ecuación abstracta (7.54) puede escribirse como una ecuación integral

$$U(t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)U(s)ds. \tag{7.56}$$

Introduciendo la aplicación

$$[\phi(U)](t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)U(s)ds,\ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{7.57}$$

la ecuación integral (7.56) puede también ser reescrita como un problema de punto fijo

$$U(t) = [\phi(U)](t),\ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{7.58}$$

que puede ser resuelto mediante la aplicación del Teorema de punto fijo de Banach para aplicaciones contractivas.

En efecto, si utilizamos que $B(t)$ es un operador lineal y acotado de H en H, con una cota independiente de $0 \leqslant t \leqslant T$, es fácil comprobar que la aplicación (7.57) constituye una contracción estricta en $C([0,\tau];\,H)$ para un τ suficientemente pequeño ($0 \leqslant \tau \leqslant T$). De este modo obtenemos una única solución $U \in C([0,\tau];\,H)$ que, mediante un argumento de continuación puede ser extendido a una solución global única $U \in C([0,T];\,H)$[10].

Aplicando este resultado abstracto en el caso de la ecuación de ondas (7.52) con potencial obtenemos inmediatamente que: *Si $(u_0,u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, y $p \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$, la ecuación de ondas con potencial (7.52) admite una única solución*

$$u \in C\Big([0,T];\,H_0^1(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0,T];\,L^2(\Omega)\Big).$$

En realidad la estructura (7.55) del operador permite debilitar la hipótesis sobre el potencial p para que el resultado anterior sea válido. En efecto, en la práctica es suficiente que el operador de multiplicación $u \to p(t)u$ envie de manera acotada $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$. Si utilizamos las inclusiones de Sobolev es fácil comprobar que esto es así cuando:

- Si $n = 1$, $p \in L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))$;
- Si $n = 2$, $p \in L^\infty(0,T;\,L^r(\Omega))$, para algún $r > 2$;
- Si $n \geqslant 3$, $p \in L^\infty(0,T;\,L^n(\Omega))$.

Más aún, basta analizar con un poco más de cuidado la prueba del carácter contractivo de la aplicación Φ para observar que las hipótesis L^∞ en la variable t pueden ser debilitadas y sustituidas por hipótesis L^1. Así, el resultado anterior de existencia y unicidad de soluciones débiles para la ecuación de ondas con potencial (7.52) es cierto en cuanto el potencial p satisface las condiciones:

[10] Esto es así puesto que la amplitud de $\tau > 0$ del intervalo temporal en el que podemos aplicar el Teorema de punto fijo a Φ para deducir la existencia local de soluciones, depende exclusivamente de la cota de la que dispongamos sobre la norma del operador B

- $p \in L^1(0,T;\, L^2(\Omega)),$ si $n = 1$.
- $p \in L^1(0,T;\, L^r(\Omega)),$ con $r > 2$, si $n = 2$.
- $p \in L^1(0,T;\, L^n(\Omega)),$ si $n \geqslant 3$.

Los mismos argumentos permiten obtener soluciones fuertes. Pero en este caso habremos de comprobar si el operador abstracto $B(t)$ envia $D(A)$ en $D(A)$. En el marco de la ecuación de ondas con potencial esto supone imponer hipótesis sobre el potencial $p = p(x,t)$ de modo que, para cada t, el operador de multiplicación mediante $p(t)$ envie $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ y que haga ésto de modo que la cota resultante pertenezca a $L^1(0,T)$. Esto, evidentemente, exige hipótesis adicionales sobre la regularidad del potencial p.

Estos argumentos permiten en realidad obtener resultados de existencia y unicidad tanto de soluciones fuertes como débiles para ecuaciones más generales con potenciales de la forma

$$u_{tt} - \Delta u + a(x,t) \cdot \nabla u + b(x,t)u_t + p(x,t)u = 0. \tag{7.59}$$

Consideremos ahora brevemente una ecuación de ondas semilineal

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(u) & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{7.60}$$

En esta ocasión $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no lineal. Nuevamente, la ecuación (7.60) puede ser reescrita en la forma de un sistema

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = \Delta u + f(u) \end{cases} \tag{7.61}$$

que, a su vez, puede ser enmarcado en un sistema semilineal abstracto

$$U_t = AU + F(U) \tag{7.62}$$

donde

$$F(U) = F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix}. \tag{7.63}$$

El problema puede entonces ser reducido a la ecuación integral

$$U(t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}F(U(s))ds \tag{7.64}$$

que, a su vez, es equivalente al problema de punto fijo

$$U(t) = [\phi(U)](t), \tag{7.65}$$

para la función

$$[\phi(U)](t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}F(U(s))ds. \tag{7.66}$$

Sea $R = \| U_0 \|_H$ y B_{2R} la bola de radio $2R$ en H. Supongamos que la no-linealidad F envía H en H de modo que se trate de una función Lipschitziana sobre conjuntos acotados de H, es decir:

$$\begin{aligned} \forall k > 0 \,\exists L_k > 0 : \| F(U_1) - F(U_2) \|_H &\leqslant L_k \| U_1 - U_2 \|_H \\ &\forall U_1,\, U_2 \in H : \| U_1 \|_H,\, \| U_2 \|_H \leqslant k. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Bajo estas hipótesis es fácil comprobar que si $\tau > 0$ es suficientemente pequeño, Φ es una contracción estrictamente en $C([0,\tau];\, B_{2R})$. Esto permite deducir la existencia y unicidad de una solución local (en tiempo) de (7.64) en $C([0,\tau];\, B_{2R})$.

Veamos lo que la hipótesis (7.67) supone sobre la no-linealidad de la ecuación de ondas (7.60). En vista de la forma particular (7.63) de la no-linealidad del modelo abstracto correspondiente basta en realidad con comprobar que f envía $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ de manera Lipschitz sobre conjuntos acotados. Supongamos que la función f se comporta esencialmente como una potencia $p \geqslant 1$. Es decir supongamos que

$$\Big| f(x) - f(y) \Big| \leqslant C(1+ \mid x \mid^{p-1} + \mid y \mid^{p-1}) \mid x - y \mid, \ \forall x,\, y \in \mathbb{R} \tag{7.68}$$

para algún $p \geqslant 1$ y $C > 0$[11].

Necesitamos comprobar si para todo $k > 0$ existe $L_k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \| f(u_1) - f(u_2) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant L_k \| u_1 - u_2 \|_{H_0^1(\Omega)}, \quad &\forall u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) : \\ &\| u_1 \|_{H_0^1(\Omega)}, \| u_2 \|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k. \end{aligned} \tag{7.69}$$

En vista de la hipótesis (7.68) y usando las inclusiones de Sobolev es fácil comprobar que (7.69) se cumple bajo las siguientes restricciones sobre p:

$$\begin{cases} \bullet \text{ Para todo} \quad 1 \leqslant p < \infty, & \text{si} \quad n = 1, 2. \\ \bullet \text{ Para todo} \quad 1 \leqslant p \leqslant \frac{n}{n-2}, & \text{si} \quad n \geqslant 3. \end{cases} \tag{7.70}$$

Deducimos por tanto que: "Bajo estas condiciones sobre el exponente p, si la no-linealidad f satisface la condición de Lipschitz (7.68), para cada par de datos iniciales $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe un $\tau > 0$ y una única solución $u \in C([0,\tau];\, H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\tau];\, L^2(\Omega))$".

Una vez que la solución local en tiempo ha sido obtenida, mediante los mismos argumentos de prolongación que se utilizan en el marco de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO),

[11]Esta hipótesis se cumple, por ejemplo, si $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ y $\limsup_{|x|\to\infty} \dfrac{\mid f'(x) \mid}{\mid x \mid^{p-1}} < \infty$.

esta solución local puede ser prolongada al máximo intervalo de existencia $T_{\max}$ de modo que la solución única de (7.60) se obtiene finalmente en la clase

$$C([0,T_{\max});\ H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T_{\max});\ L^2(\Omega)).$$

Además, para el tiempo máximo de existencia se verifica la siguiente alternativa: O bien $T_{\max} = \infty$ (*existencia global*) y por lo tanto la solución está definida para todo tiempo, o bien $T_{\max} < \infty$ (*explosión en tiempo finito*) y en este caso

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \| u(t) \|_{H_0^1(\Omega)} + \| u_t(t) \|_{L^2(\Omega)} = \infty. \tag{7.71}$$

El fenómeno que subyace a esta alternativa es fácil de entender. Mientras que la solución se mantiene acotada puede ser prolongada en el tiempo, con un paso temporal que depende continuamente de la cota de la solución. Por lo tanto, la única manera en que la solución pueda no ser prolongada a todos los tiempos es si explota en tiempo finito.

Mediante una mera hipótesis de crecimiento del tipo (7.68) sobre la no-linealidad es imposible determinar si se produce explosión en tiempo finito o no y para ésto son necesarias hipótesis adicinales sobre el “signo” de la no-linealidad.

Consideremos en primer lugar el caso en que la no-linealidad f tiene el “buen signo”:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mid u \mid^{p-1} u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{7.72}$$

En este caso, evidentemente, la condición (7.68) se cumple y bajo las hipótesis (7.70) se deduce la existencia y unicidad local (en tiempo) de soluciones de energía finita de (7.72). Además, mientras la solución existe, su energía se conserva. En este caso la energía viene dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[\mid \nabla u(x,t) \mid^2 + \mid u_t(x,t) \mid^2 \Big] dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega \mid u(x,t) \mid^{p+1} dx. \tag{7.73}$$

Como la energía $E(t)$ se conserva y claramente mayora al cuadrado de la norma de (u, u_t) en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ deducimos inmediatamente que (7.71) es imposible. De este modo concluimos que, bajo la condición (7.70), para cada par de datos iniciales $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe una única solución global

$$u \in C([0,\infty);\ H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty);\ L^2(\Omega)) \tag{7.74}$$

y que la energía $E(t)$ de la solución definida en (7.73) se conserva para todo $t \geqslant 0$.

La situación cambia completamente para no-linealidades con “mal-signo”:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = \mid u \mid^{p-1} u & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{7.75}$$

La existencia y unicidad de soluciones locales (en tiempo) es igualmente cierta en este caso. Pero no se puede decir lo mismo acerca de la existencia global. Para el sistema (7.75), la energía, que se observa mientras las soluciones existen es

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega [\mid \nabla u(x,t) \mid^2 + \mid u_t(x,t) \mid^2] dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \mid u(x,t) \mid^{p+1} dx \tag{7.76}$$

pero, el que esta energía permanezca constante o acotada es perfectamente compatible con la explosión (7.71) de las soluciones en tiempo finito. De hecho, en este caso, las soluciones pueden efectivamente explotar en tiempo finito. Para convencerse de este hecho basta ver que existen soluciones de la EDO

$$x'' = \mid x \mid^{p-1} x \tag{7.77}$$

que, cuando $p > 1$, explotan en tiempo finito, en un tiempo que tiende a cero cuando el tamaño de los datos iniciales tiende a infinito. El hecho de que las soluciones de la ecuación de ondas dependan exclusivamente de los datos iniciales en la base del cono característico permite entonces construir datos iniciales, independientes de x en una bola de Ω, y de modo que en el interior del cono correspondiente coinciden con la solución de la ODE (7.77) y por tanto explotan en tiempo finito.

Esta construcción permite efectivamente probar que, para todo $p > 1$ y todo abierto no vacío Ω de $\mathbb{R}^n$, existen datos iniciales $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ para los que la solución local de (7.75) explota en tiempo finito.

Hemos ilustrado el modo en que la Teoría de semigrupos permite resolver la ecuación de ondas y sus variantes. Veamos ahora algunas de las ideas fundamentales de la demostración del Teorema fundamental de esta teoría: El Teorema 7.1 de Hille-Yosida.

La idea central de la demostración de Hille-Yosida, que permite utilizar la propiedad del operador A de ser maximal-disipativo, es introducir y usar la regularización de Yosida del operador A:

$$A_\lambda = -\frac{1}{\lambda}(I - (I - \lambda A)^{-1}). \tag{7.78}$$

Es fácil comprobar que, formalmente, A_λ converge a A cuando $\lambda \to 0$. Para ello basta analizar la expresión algebraica de la derecha de (7.78) en el caso de números reales:

$$-\frac{1}{\lambda}\Big[1 - \frac{1}{1-\lambda x}\Big] = -\frac{1}{\lambda}\Big[\frac{1-\lambda x - 1}{1-\lambda x}\Big] = \frac{x}{1-\lambda x} \to x,\ \lambda \to 0.$$

Pero para que la definición (7.78) tenga rigurosamente sentido es primeramente preciso probar que el operador $I - \lambda A$ es inversible. La hipótesis de maximalidad sobre A garantiza que esto es así cuando $\lambda = 1$. Veamos que ésto permite probar que $I - \lambda A$ es inversible para todo $\lambda > 1/2$. En efecto, reescribimos la ecuación

$$x - \lambda A x = y \tag{7.79}$$

como

$$x - Ax = \frac{1}{\lambda}y + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x,$$

o, lo que es lo mismo,

$$x = (I - A)^{-1}\Big[\frac{1}{\lambda}y + \Big(1 - \frac{1}{\lambda}\Big)x\Big]. \tag{7.80}$$

Es fácil comprobar que cuando $\mid 1 - 1/\lambda \mid < 1$ el segundo miembro de (7.80) admite una única solución para el Teorema de punto fijo de Banach.

Iterando este argumento se puede comprobar que $(I - \lambda A)^{-1}$ está bien definido para todo $\lambda > 0$. Además

$$\| (I - \lambda A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(H,H)} \leqslant 1. \tag{7.81}$$

En efecto, como A es disipativo, $\langle Ax,\, x\rangle \leqslant 0$ y por tanto, si $x = (I - \lambda A)^{-1}y$ tenemos

$$\langle (I - \lambda A)^{-1}y,\, y\rangle = \langle x,\, (I - \lambda A)x\rangle = \langle x\, x\rangle - \lambda\langle x\, Ax\rangle \geqslant \langle x,\, x\rangle = \| x \|_H^2 = \| (I - \lambda A)^{-1}y \|_H^2,$$

de donde se deduce que, efectivamente,

$$\| (I - \lambda A)^{-1}y \|_H \leqslant \| y \|_H, \quad \forall y \in H, \tag{7.82}$$

lo cual equivale a (7.81).

Deducimos por tanto que A_λ, para cada $\lambda > 0$, es un operador lineal y acotado de H en H.

Esto nos permite resolver la ecuación abstracta

$$\begin{cases} u' = A_\lambda u, \quad t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{7.83}$$

Como si se tratase de una EDO.

En efecto, como A_λ es un operador lineal y acotado, $e^{A_\lambda t}$ se puede definir, como en el caso matricial, mediante el desarrollo en serie de potencias de la exponencial

$$e^{A_\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_\lambda t)^k}{k!}. \tag{7.84}$$

Es fácil comprobar que para cada $\lambda > 0$ y $t > 0$, $e^{A_\lambda t}$ define un operador lineal y acotado de H en H. Además

$$u_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}u_0 \in C^\infty([0, \infty);\, H) \tag{7.85}$$

y es la única solución de (7.83).

La regularización de Yosida genera entonces un semigrupo $S_\lambda(t) = e^{A_\lambda t}$.

Además, para todo $\lambda > 0$, A_λ hereda la propiedad de A de ser disipativo, de modo que

$$\langle A_\lambda x,\, x\rangle \leqslant 0,\, \forall x \in H,\, \forall \lambda > 0. \tag{7.86}$$

Entonces

$$\| u_\lambda(t) \|_H \leqslant \| u_0 \|, \left\| \frac{du_\lambda(t)}{dt} \right\|_H = \| A_\lambda u_\lambda(t) \|_H \leqslant \| A_\lambda u_0 \|_H, \, \forall t > 0, \, \forall \lambda > 0. \tag{7.87}$$

Para comprobar (7.86) basta proceder del modo siguiente

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda x, \, x \rangle &= \langle A_\lambda x, \, x - (I - \lambda A)^{-1} x \rangle + \langle A_\lambda x, \, (I - \lambda A)^{-1} x \rangle \\ &= -\lambda \| A_\lambda x \|^2 + \langle A_\lambda x, \, (I - \lambda A)^{-1} x \rangle \\ &= -\lambda \| A_\lambda x \|^2 + \langle A(I - \lambda A)^{-1} x, \, (I - \lambda A)^{-1} x \rangle \leqslant -\lambda \| A_\lambda x \|^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Como, al menos formalmente, $A_\lambda \to A$ cuando $\lambda \to 0$, en virtud de las cotas uniformes (7.87) de las soluciones de las ecuaciones aproximadas (7.83) en las que el operador A ha sido sustituido por su regularización de Yosida A_λ, cabe esperar que la solución u de (7.22) en el Teorema de Hille-Yosida se obtenga como límite cuando $\lambda \to 0$ de las soluciones aproximadas u_λ.

La clave de la demostración del Teorema de Hille-Yosida consiste en ver que, cuando $u_0 \in D(A)$, $\{u_\lambda(t)\}_{\lambda > 0}$ constituye una sucesión de Cauchy cuando $\lambda \to 0$ en $C([0, \infty); \, H)$.

En efecto. tenemos

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} = A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu$$

y por tanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_\lambda - u_\mu \|_H^2 = \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \, u_\lambda - u_\mu \rangle.$$

Pero

$$\begin{aligned} &\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \, u_\lambda - u_\mu \rangle = \\ &= \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \, u_\lambda - (I - \lambda A)^{-1} + (I - \lambda A)^{-1} - (I - \mu A)^{-1} u_\mu + (I - \mu A)^{-1} u_\mu - u_\mu \rangle \\ &= \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \, -\lambda A_\lambda u_\lambda + \mu A_\mu u_\mu \rangle \\ &\quad + \langle A((I - \lambda A)^{-1} u_\lambda - (I - \mu A)^{-1} u_\mu), \, (I - \lambda A)^{-1} u_\lambda - (I - \mu A)^{-1} u_\mu \rangle \\ &\leqslant \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \, -\lambda A_\lambda u_\lambda + \mu A_\mu x_\mu \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_\lambda - u_\mu \|_H^2 \leqslant 2(\lambda + \mu) \| Au_0 \|_H^2 \, . \tag{7.88}$$

En este punto hemos utilizado la segunda cota de (7.87) junto con $\| A_\lambda x \|_H \leqslant \| Ax \|_H$, para todo $x \in H$ y $\lambda > 0$, propiedad esta que se deduce fácilmente de la identidad $A_\lambda = (I - \lambda A)^{-1} A$.

La estimación (7.88) proporciona el carácter de Cauchy de la sucesión u_λ en $C([0, \infty); \, H)$ que habíamos enunciado.

El mismo argumento permite probar que si $u_0 \in D(A^2)$, entonces du_λ / dt es también de Cauchy en $C([0, \infty); \, H)$. Esto permite pasar al límite en (7.83) cuando $\lambda \to 0$ y obtener la solución del problema abstracto (7.22) que el Teorema de Hille-Yosida enuncia cuando

$u_0 \in D(A)$. Como $D(A^2)$ es denso en $D(A)$, un argumento de densidad permite concluir la existencia de solución para datos $u_0 \in D(A)$, tal y como se enuncia en el Teorema 7.1.

El lector interesado en una demostración completa del Teorema de Hille-Yosida puede consultar el capítulo VII del libro de H. Brezis [2]. En el libro de T. Cazenave y A. Haraux [3] se da también una extensión de este resultado a espacios de Banach y diversas aplicaciones a ecuaciones de evolución semilineales entre las que se incluyen la ecuación del calor, de ondas y de Schrödinger.

8 La ecuación de transporte lineal

Las ecuaciones que modelizan fenómenos de propagación de ondas y vibraciones son típicamente Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) de orden dos. Sin embargo en todas ellas subyacen las ecuaciones de transporte de orden uno que analizamos en esta sección.

El modelo más sencillo es

$$u_t + u_x = 0. \tag{8.1}$$

Es fácil comprobar que $u = u(x,t)$ es solución de esta ecuación si y sólo si es constante a lo largo de las *líneas características*

$$x + t = cte. \tag{8.2}$$

De este modo deducimos que las soluciones de (8.1) son de la forma

$$u = f(x-t), \tag{8.3}$$

donde f es el perfil de la solución en el instante inicial $t = 0$, i.e.

$$u(x,0) = f(x). \tag{8.4}$$

La solución (8.3) es entonces una simple onda de transporte pura en la que el perfil f se transporta (avanza) en el eje real a velocidad constante uno[12] .

[12] Si bien en este caso la ecuación puede resolverse explícitamente, el problema (8.1) entra también el marco de la Teoría de Semigrupos. En efecto, basta considerar el espacio de Hilbert $H = L^2(\mathbf{R})$ y el operador $A = -\partial_x$ con dominio $D(A) = H^1(\mathbf{R})$ para que el problema (8.1) entre en el marco abstracto del Teorema de Hille-Yosida. En efecto, el operador A así definido es maximal disipativo. Para ver que es disipativo basta con observar que $< Au, u >_{L^2(\mathbf{R})} = -\int_{\mathbf{R}} \partial_x u u dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \partial_x (u^2) dx = 0$. Además A es maximal. En efecto, dado $f \in L^2(\mathbf{R})$, existe una única solución $u \in H^1(\mathbf{R})$ de $u + \partial_x u = f$. Esta solución puede calcularse explícitamente y se obtiene: $u(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s) e^{s-x} ds = \int_{-\infty}^{0} f(z+x) e^z dz$. Tomando normas en $L^2(\mathbf{R})$ y aplicando la desigualdad de Minkowski se deduce fácilmente que $||u||_{L^2(\mathbf{R})} \leq \int_{-\infty}^{0} ||f||_{L^2(\mathbf{R})} e^z dz = ||f||_{L^2(\mathbf{R})}$. Como $u_x = f - u$ vemos inmediatamente que, efectivamente, u pertenece a $H^1(\mathbf{R})$.

Al invertir el sentido del tiempo (i.e. haciendo el cambio de variable $t \to -t$) la ecuación (8.1) se transforma en

$$u_t - u_x = 0 \tag{8.5}$$

cuyas soluciones son ahora de la forma

$$u = g(x + t), \tag{8.6}$$

tratándose de ondas viajeras que se propagan en dirección opuesta a velocidad uno.

Vemos por tanto que las soluciones de la ecuación de transporte pueden calcularse de manera explícita y que en ellas se observa un sencillo fenómeno de transporte lineal sin deformación.

Esta ecuación es por tanto un excelente laboratorio para experimentar algunas de las ideas más sencillas del análisis numérico.

Consideremos pues un paso de discretización $h > 0$ en la variable espacial e introduzcamos el mallado $\{x_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$, $x_j = jh$.

Buscamos una semi-discretización (continua en tiempo y discreta en espacio) que reduzca la EDP (8.1) a un sistema de ecuaciones diferenciales cuya solución proporcione una aproximación $u_j(t)$ de la solución $u = u(x, t)$ de (8.1) en el punto $x = x_j$.

La manera más sencilla de construir esta semi-discretización es utilizar el desarrollo de Taylor para introducir una aproximación de la derivación parcial en la variable espacial.Son varias las posibilidades:

$$u_x(x_j, t) \sim \frac{u(x_{j+1}, t) - u(x_j, t)}{h} \sim \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h}, \tag{8.7}$$

$$u_x(x_j, t) \sim \frac{u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)}{h} \sim \frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h} \tag{8.8}$$

$$u_x(x_j, t) \sim \frac{u(x_{j+1}, t) - u(x_{j-1}, t)}{2h} \sim \frac{u_{j+1}(t) - u_{j-1}(t)}{2h}. \tag{8.9}$$

Cada una de estas elecciones corresponde a un determinado sentido de avance a lo largo del eje x. En efecto (8.7) y (8.8) y (8.9) corresponden a diferencias progresivas, regresivas y centradas respectivamente.

Cada una de estas elecciones proporciona un sistema semi-discreto diferente de aproximación de la EDP (8.1) en diferencias finitas:

- *Esquema progresivo:*

$$u_j'(t) + \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} = 0,\ j \in \mathbf{Z},\ t > 0, \tag{8.10}$$

- *Esquema regresivo:*

$$u_j'(t) + \frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h} = 0,\ j \in \mathbf{Z},\ t > 0, \tag{8.11}$$

- *Esquema centrado:*

$$u_j'(t)+\frac{u_{j+1}(t)-u_{j-1}(t)}{2h}=0,\ j\in\mathbf{Z},\ t>0. \tag{8.12}$$

Estos sistemas constituyen un conjunto numerable de ecuaciones diferenciales de orden uno lineales acopladas.

Al tratarse de sistema infinitos su resolución no entra en el marco de la teoría clásica de EDO. Sin embargo, es fácil verificar que su solución existe y es única sin necesidad de utilizar la Teoría de Semigrupos desarrollada en la sección anterior. Para ello basta considerar el espacio de Hilbert $H=\ell^2$ de las sucesiones de cuadrado sumables. La solución de cualquiera de estas ecuaciones semi-discretas puede entonces verse como un elemento de este espacio: $\vec{u}=\{u_j\}_{j\in\mathbf{Z}}\in\ell^2$. Estos sistemas pueden escribirse entonces en forma abstracta

$$\frac{d}{dt}\vec{u}=A_h\vec{u}. \tag{8.13}$$

Es fácil comprobar que en cada uno de los casos anteriores el operador A_h involucrado puede representarse a través de una matriz infinita, tridiagonal y acotada con norma $1/h$. Se trata pues de ecuaciones de evolución en espacios de Hilbert de dimensión infinita pero en las que el generador A_h está acotado. Esto nos permite calcular el semigrupo e^{A_ht} mediante la representación en desarrollo de serie de potencias de la exponencial. Obtenemos así que estas ecuaciones generan semigrupos en $H=\ell^2$. De este modo deducimos que para cada dato inicial dado en ℓ^2 cada una de estas ecuaciones admite una única solución $C^\infty(\mathbf{R},\ell^2)$ que toma ese dato en el instante $t=0$. Las soluciones dependen en realidad de manera analítica con respecto a la variable temporal.

Todos estos esquemas son consistentes con la ecuación de transporte. Es decir, al llevar a estos esquemas una solución regular de la ecuación de transporte continua vemos que se produce un error que tiende a cero a medida que $h\to 0$.

La mejor manera de analizar la estabilidad es a través del método de von Neumann. Así, introduciendo

$$\check{u}(\theta,t)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}u_j(t)e^{i\theta j} \tag{8.14}$$

obtenemos que $\check{u}$, en cada uno de los casos, satisface

$$\check{u}'(\theta,t)+\left(\frac{e^{-i\theta}-1}{h}\right)\check{u}(\theta,t)=0,\ t>0, \tag{8.15}$$

$$\check{u}'(\theta,t)+\left(\frac{1-e^{i\theta}}{h}\right)\check{u}(\theta,t)=0,\ t>0, \tag{8.16}$$

$$\check{u}'(\theta,t)+\left(\frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2h}\right)\check{u}(\theta,t)=0,\ t>0. \tag{8.17}$$

La transformada discreta de Fourier no sólo tiene la virtud de transformar los sistemas de ecuaciones semi-discretas (8.10)-(8.12) en ecuaciones diferenciales con parámetro θ (8.15)-(8.17) que son inmediatas de resolver, sino que define también una isometríca de ℓ^2 a valores en $L(0, 2\pi)$. En efecto, la fórmula (8.14) puede invertirse fácilmente. de hecho tenemos

$$u_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \check{u}(\theta, t)e^{-ij\theta}d\theta. \tag{8.18}$$

Además

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\check{u}(\theta, t)|^2 d\theta = \sum_{j\in\mathbf{Z}} |u_j(t)|^2. \tag{8.19}$$

Obtenemos por tanto

$$\check{u}(\theta, t) = e^{a_h(\theta)t}\check{u}(\theta, 0) \tag{8.20}$$

donde $a_h(\theta)$ varía de un caso a otro. De manera más precisa se tiene

$$a(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-i\theta}}{h}, & \text{(esquema progresivo)} \\ \dfrac{e^{i\theta}-1}{h}, & \text{(esquema regresivo)} \\ \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2h}, & \text{(esquema centrado).} \end{cases} \tag{8.21}$$

Como es bien sabido, la convergencia de un método numérico exige su estabilidad[13] y ésta pasa por que $Re\, a_h(\theta)$ permanezca acotada superiormente cuando $h \to 0$ uniformemente en $\theta \in [0, 2\pi)$. Verifiquemos si esta propiedad se cumple en cada uno de los casos:

- *Esquema progresivo:* Tenemos

$$a_h(\theta) = \frac{1-e^{i\theta}}{h} = \frac{1-\cos(\theta)}{h} - \frac{i\,\mathrm{sen}(\theta)}{h}. \tag{8.22}$$

  Por tanto

$$Re\, a_h(\theta) = \frac{1-\cos(\theta)}{h}.$$

[13] En este punto estamos haciendo uso del clásico Teorema de Lax que dice que la convergencia de un esquema es equivalente a su estabilidad más consistencia. En el caso más sencillo de la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, podemos interpretar este resultado del siguiente modo. Aproximemos este problema por otro de características semejantes $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$. Suponemos que $b_\varepsilon \to b$ cuando $\varepsilon \to 0$. Deseamos probar que $x_\varepsilon \to x$. Para ello hacemos las dos siguientes hipótesis: a) $A_\varepsilon y \to Ay$ para todo y (*consistencia*) y b) Las matrices inversas $(A_\varepsilon)^{-1}$ están uniformemente acotadas (*estabilidad*). Deducimos entonces la convergencia de las soluciones: $x_\varepsilon \to x$ cuando $\varepsilon \to 0$. En efecto, tenemos $A_\varepsilon(x_\varepsilon - x) = b_\varepsilon - b + (A - A_\varepsilon)x = r_\varepsilon$. Por las hipótesis realizadas sobre la aproximación deducimos que $r_\varepsilon \to 0$. La hipótesis de estabilidad garantiza entonces que $x_\varepsilon - x \to 0$. El Teorema de Lax generaliza este resultado al caso de las EDP y sus aproximaciones numéricas. La ecuación $Ax = b$ del ejemplo anterior juega el papel de la EDP, la ecuación cuya solución deseamos aproximar. La ecuación aproximada $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$ juega el papel de la aproximación numérica, y ε es el parámetro destinado a tender a cero, lo mismo que hace h en las aproximaciones numéricas.

Obviamente,

$$Re\, a_h(\theta) \nearrow \infty,\ h \to 0,\ \forall 0 < \theta < 2\pi, \tag{8.23}$$

lo cual demuestra la falta de estabilidad y por tanto de convergencia de este esquema.

- *Esquema regresivo:* En este caso

$$a_h(\theta) = \frac{e^{-i\theta} - 1}{h} = \frac{\cos(\theta) - 1}{h} - \frac{i \operatorname{sen} \theta}{h} \tag{8.24}$$

de modo que

$$Re\, a_h(\theta) = \frac{\cos(\theta) - 1}{h} \leq 0,\ \forall \theta \in [0, 2\pi). \tag{8.25}$$

La estabilidad del esquema está por tanto garantizada. Esto demuestra que el esquema es también convergente, propiedad que analizaremos más adelante.

- *Esquema centrado:* En este caso

$$a_h(\theta) = \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2h} = -\frac{i \operatorname{sen} \theta}{h}. \tag{8.26}$$

Obviamente,

$$Re\, a_h(\theta) = 0 \tag{8.27}$$

por lo que este esquema es también estable y convergente.

En realidad bastaría verificar las propiedades geométricas más elementales asociadas a la evolución temporal que la ecuación continua y semi-discreta generan para ver que el esquema progresivo no puede de ningún modo ser convergente y que, sin embargo, los otros dos esquemas pueden perfectamente serlo.

En efecto, en virtud de la expresión explícita (8.3) de la solución de la ecuación de transporte (8.1), observamos que el dominio de dependencia de la solución en el punto (x, t) se reduce al punto $x - t$ en el instante inicial. Veamos ahora cuáles son los dominio de dependencia en los esquemas discretos.

En el esquema progresivo, fijado un punto $x = x_j$, vemos que la ecuación que gobierna la dinámica de $u_j(t)$ depende de $u_{j+1}(t)$, la aproximación de la solución en el nodo x_{j+1} inmediatamente a la derecha de x_j, que a su vez depende de $u_{j+1}(t)$, etc. Vemos pues que, en este caso, el sistema semi-discreto depende del valor del dato inicial a la derecha de x_j mientras que el único valor relevante para la solución real es el punto $x - t$ que está al lado opuesto, a la izquierda de x.

Por lo tanto el esquema semi-discreto progresivo viola la condición indispensable para la convergencia de un esquema numérico según la cual *el dominio de dependencia del esquema* *numérico ha de contener el dominio de dependencia de la ecuación original*[14].

Sin embargo, los otros dos esquemas si que verifican esta propiedad geométrica, lo cual garantiza su convergencia.

El esquema progresivo para la ecuación de transporte que consideramos suele normalmente denominarse "upwind", que viene a significar algo asi como "a favor de la correinte". Con este término se pone de manifiesto que en los problemas en los que está presente el fenómeno de transporte, el sentido y orientación del mismo ha de ser tenido en cuenta a la hora de diseñar métodos numéricos convergentes.

El análisis que acabamos de realizar indica que:

∗ Las ondas continuas se propagan en el espacio-tiempo con una velocidad y dirección determinadas.

∗ Los esquemas numéricos, a pesar de estar basados en un mecanismo aparentemente coherentes de discretización, pueden generar ondas que se propagan con velocidades y direcciones distintas y no converger a medida que el paso del mallado tiende a cero.

Los tres esquemas que hemos analizado son en principio coherentes. En realidad en la terminología del Análisis Numérico se dice que son esquemas consistentes. De manera más precisa, mientras que el esquema progresivo y regresivo son consistentes de orden 1, el esquema centrado es consistente de orden 2. En efecto, supongamos que u es una solución suficientemente regular de la ecuación de transporte (8.1) (basta con que u tenga una derivada continua en la variable tiempo y tres en la variable espacial).

Sea entonces

$$\underline{u}_j(t) = u(x_j, t), \tag{8.28}$$

la restricción de (8.1) a los puntos del mallado.

Para analizar la consistencia de los esquemas numéricos introducidos consideramos $\left(\underline{u}_j\right)_{j\in\mathbf{Z}}$ como una solución aproximada de dicho esquema[15].

[14]Se trata efectivamente de una condición necesaria para la convergencia de un método numérico. Cuando no se cumple, hay puntos del dominio de dependencia del problema continuo que no pertenecen al del problema discreto. En estas circunstancias, modificando los datos iniciales en esos puntos, podemos conseguir alterar la solución del problema continuo sin que la del problema discreto sufra ningún cambio. Esto excluye cualquier posibilidad de convergencia del método numérico.

[15] Conviene subrayar que, a la hora de comprobar la consistencia de un método numérico, lo que comunmente se hace es considerar la solución del problema continuo como una solución aproximada del esquema discreto y no al revés, como podría esperarse en la medida en que el esquema numérico tiene como objeto aproximar la ecuación continua. Así, el error de truncatura es el resto resultante de considerar la solución del problema continuo como una solución aproximada del problema discreto. Cuando el error de truncatura τ es del orden de $O(h^p)$ se dice que el método es consistente de orden p.

Tenemos entonces, en el caso de esquema progresivo

$$\begin{aligned} \underline{u}_j' + \frac{\underline{u}_{j+1} - \underline{u}_j}{h} &= u_t(x_j,t) + \frac{u(x_{j+1},t) - u(x_j,t)}{h} \\ &= u_t(x_j,t) + u(x_j,t) + \frac{h\, u_x(x_j,t) + O\left(h^2\right) - u(x_j,t)}{h} \\ &= u_t(x_j,t) + u_x(x_j,t) + O(h) = O(h), \end{aligned} \tag{8.29}$$

lo cual indica que se trata efectivamente de un esquema consistente de orden 1.

Por último, el esquema centrado es consistente de orden 2:

$$\begin{aligned} \underline{u}_j' + \frac{\underline{u}_{j+1} - \underline{u}_{j-1}}{2h} &= u_t(x_j,t) + \frac{u(x_{j+1},t) - u(x_{j-1},t)}{2h} \\ &= u_t(x_j,t) + \Big[u(x_j,t) + hu_x(x_j,t) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_j,t) + O(h^3) \\ &\qquad -u(x_j,t) + hu_x(x_j,t) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_j,t) + O\left(h^3\right) \Big] \Big/ h, \\ &= u_t(x_j,t) + u_x(x_j,t) + O\left(h^2\right) = O\left(h^2\right). \end{aligned} \tag{8.30}$$

En virtud del Teorema de equivalencia de P. Lax que garantiza que la convergencia equivale a la consistencia más la estabilidad cabe entonces esperar que el esquema regresivo sea convergente de orden 1 y que el centrado sea convergente de orden 2.

Comprobémoslo. Consideremos en primer lugar el esquema regresivo y analicemos el error

$$\varepsilon_j(t) = \underline{u}_j(t) - u_j(t) = u(x_j,t) - u_j(t), \tag{8.31}$$

es decir la diferencia entre la solución real y la numérica sobre los puntos del mallado. Para simplificar la presentación suponemos que el dato inicial es continuo[16], lo cual permite tomar datos iniciales exactos en el esquema semi-discreto:

$$u_j(0) = f(x_j),\ j \in \mathbf{Z}. \tag{8.32}$$

En virtud del análisis de consistencia anterior, sustrayendo la ecuación verificada por $\underline{u}_j$ y u_j deducimos que

$$\begin{cases} \varepsilon_j' + \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}}{h} = O_j(h),\ j \in \mathbf{Z},\ t > 0 \\ \varepsilon_j(0) = 0,\ j \in \mathbf{Z}. \end{cases} \tag{8.33}$$

Multiplicando en (8.33) por ε_j y sumando en $j \in \mathbf{Z}$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\varepsilon_j(t)|^2\right] + \frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left(\varepsilon_j^2 - \varepsilon_{j-1}\varepsilon_j\right) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} O_j(h)\varepsilon_j.$$

[16]Si el dato inicial no fuese continuo sino solamente localmente integrable, por ejemplo, tomaríamos como dato inicial para el problema discreto una media del dato inicial $f = f(x)$ en torno a los puntos del mallado. Por ejemplo, $u_j(0) = \frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(s)ds$.

En este punto conviene observar que

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left(\varepsilon_j^2-\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j\right) &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left(\varepsilon_j^2+\varepsilon_{j-1}^2-2\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left(\varepsilon_j-\varepsilon_{j-1}\right)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Por tanto la identidad de energía anterior puede reescribirse del siguiente modo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\varepsilon_j(t)|^2\right]+\frac{1}{2h}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left(\varepsilon_j(t)-\varepsilon_{j-1}(t)\right)^2=\sum_{j\in\mathbf{Z}}O_j(h)\varepsilon_j(t). \tag{8.34}$$

En este punto introducimos la norma en ℓ^2, el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable a escala h:

$$|(\varepsilon_j)|_h=\left[h\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\varepsilon_j|^2\right]^{1/2}. \tag{8.35}$$

En lo sucesivo utilizaremos la notación vectorial $\vec{\varepsilon}$ para denotar el vector infinito numerable de componentes $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbf{Z}}$.

Conviene observar que (8.35) es una aproximación discreta de la norma continua en $L^2(\mathbf{R})$ en el mallado de paso h.

Con esta notación, y denotando mediante $\tau_{-1}\vec{\varepsilon}$ la sucesión trasladada una unidad con componentes $(\varepsilon_{j-1})_{j\in\mathbf{Z}}$, la identidad (8.34) puede reescribirse del modo siguiente:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\vec{\varepsilon}(t)\right|_h^2+\frac{1}{2h}\left|\vec{\varepsilon}(t)-\tau_{-1}\vec{\varepsilon}(t)\right|_h^2=h\sum_{j\in\mathbf{Z}}O_j(h)\varepsilon_j(t)\leq\left|\vec{O}(h)\right|_h\left|\varepsilon_j(t)\right|_h. \tag{8.36}$$

De esta desigualdad se deduce que

$$\frac{d}{dt}\left|\vec{\varepsilon}(t)\right|_h\leq\left|\vec{O}(h)\right|_h$$

de donde se sigue que

$$\left|\vec{\varepsilon}(t)\right|_h\leq\int_0^t\left|\vec{O}(h)\right|_h ds \tag{8.37}$$

puesto que $\vec{\varepsilon}(0)=0$.

En este punto tenemos que analizar el error de truncatura $\vec{O}(h)$. En vista del análisis de la consistencia realizado previamente se observa que cada componente $O_j(h)$ del error es de la forma

$$O_j(h)=\frac{h}{2}u_{xx}\left(\xi_j,t\right)$$

donde ξ_j es un punto en el intervalo $[x_{j-1},x_j]$.

Con el objeto de concluir la prueba de la convergencia suponemos que el dato inicial $f = f(x)$ es de clase C^2 y de soporte compacto: $f \in C_c^2(\mathbf{R})$. Entonces, la solución u, cuya forma explícita fue derivada en (8.3), tiene la misma propiedad para todo $t > 0$ y además:

$$\max_{x\in\mathbf{R},\, t\geq 0} |u_{xx}(x,t)| = C < \infty,$$

de donde, habida cuenta que el soporte de u_{xx} está contenido en una traslación del soporte compacto de f, se sigue que

$$\left|\vec{O}(h)\right|_h \leq Ch,\ \forall t \geq 0,\ \forall h > 0. \tag{8.38}$$

Combinando (8.37)-(8.38) se concluye que

$$|\vec{\varepsilon}(t)|_h \leq Cth,\ \forall t \geq 0,\ \forall h > 0, \tag{8.39}$$

lo cual concluye la demostración de que el método semi-discreto de diferencias finitas regresivas es convergente de orden uno.

El método empleado en la prueba de la convergencia es el denominado método de la energía y está basado en la siguiente ley de energía que las soluciones del problema semi-discreto verifican

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j\in\mathbf{Z}} |u_j(t)|^2 + h\sum_{j\in\mathbf{Z}} \left\{\frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h}\right\}^2 = 0$$

y que, con las notaciones anteriores, puede reescribirse como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|\vec{u}(t)|_h^2 + h\,|\vec{u}(t)|_{1,h}^2 = 0. \tag{8.40}$$

Aquí y en lo sucesivo $\|\cdot\|_{1,h}$ denota la versión discreta de la semi-norma $\left(\int_{\mathbf{R}} u_x^2 dx\right)^{1/2}$, i.e.

$$|\vec{u}|_{1,h} = \left[h\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left|\frac{u_j - u_{j-1}}{h}\right|^2\right]^{1/2}. \tag{8.41}$$

Conviene comparar (8.40) con la ley de conservación de la energía para la ecuación de transporte continua (8.1) donde, multiplicando por u e integrando con respecto a x se deduce que

$$\frac{d}{dt} \parallel u(t) \parallel_{L^2(\mathbf{R})}^2 = 0. \tag{8.42}$$

Obviamente, la ley de conservación de energía (8.42) para el problema continuo (8.1) es perfectamente coherente con la forma explícita (8.3) de la solución (8.1).

Sin embargo, es de señalar que, en contraste con la ley de conservación de energía (8.42) de la ecuación continua (8.1), la identidad (8.40) establece el carácter disipativo del esquema semi-discreto regresivo. Este carácter disipativo no está reñido con la convergencia del esquema cuando $h \to 0$, esencialmente por dos razones:

* La tasa de disipación del esquema semi-discreto decrece a medida que $h \to 0$, tal y como se observa con claridad en (8.40).

* El carácter disipativo del equema numérico contribuye a su estabilidad.

Verifiquemos la ley de energía de los otros dos esquemas considerados.

En el esquema progresivo tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j\in\mathbf{Z}}|u_j(t)|^2+\sum_{j\in\mathbf{Z}}\frac{(u_{j+1}-u_j)}{h}u_j=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j\in\mathbf{Z}}|u_j(t)|^2-\frac{1}{2h}\sum_{j\in\mathbf{Z}}|u_{j+1}-u_j|^2=0. \quad (8.43)$$

En esta identidad queda claramente de manifiesto el carácter anti-disipativo del método progresivo, causante de su inestabilidad.

En el caso del esquema centrado tenemos sin embargo

$$\frac{d}{dt}\sum_{j\in\mathbf{Z}}|u_j(t)|^2=0, \quad (8.44)$$

identidad que garantiza su carácter puramente conservativo y su estabilidad.

Las propiedades disipativas, anti-disipativas y conservativas de los esquemas regresivo, progresivo y centrado pueden interpretarse fácilmente de la siguiente manera.

Consideremos por ejemplo el esquema regresivo en el que hemos adoptado la siguiente aproximación de la derivada espacial

$$u_x(x,t)\sim\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}.$$

Un análisis más cuidadoso indica que, en realidad,

$$\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}=u_x(x,t)-\frac{h}{2}u_{xx}(x,t)+O(h^2).$$

Por lo tanto, el esquema regresivo es en realidad una aproximación de orden dos de la ecuación de transporte perturbada

$$u_t+u_x-\frac{h}{2}u_{xx}=0. \quad (8.45)$$

La ecuación (8.45) es una aproximación parabólica o viscosa de la ecuación de transporte puro [17] (8.1). Multiplicando en (8.45) por u e integrando en x deducimos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}}u^2(x,t)dx+\frac{h}{2}\int_{\mathbf{R}}u_x^2(x,t)dx=0, \quad (8.46)$$

[17] No es difícil comprobar que la ecuación (8.45) genera un semigrupo de contracciones en $L^2(\mathbf{R})$ para cada $h>0$ y que, dado un dato inicial $f\in L^2(\mathbf{R})$, la solución $u_h=u_h(x,t)$ de (8.45) converge a la solución de la ecuación de transporte puro $u(x,t)=f(x-t)$, cuando $h\to 0$ en $L^2(\mathbf{R})$ para cada $t>0$. Para ello basta observar que $v_h(x,t)=u_h(x+t,t)$ es solución de la ecuación del calor $v_t-hv_{xx}=0$ que, tras el cambio de variables $w_h(x,t)=v_h(x,t/h)$, se convierte en una solución de la ecuación del calor $w_t-w_{xx}=0$. Así, vemos que $v_h(x,t)=[G_h(t)*f](x)$ siendo G_h el núcleo del calor reescalado: $G_h(x,t)=(4\pi ht)^{-1/2}\exp(-x^2/4ht)$. De esta expresión se deduce fácilmente que $v_h(x,t)\to f(x)$ en $L^2(\mathbf{R})$, para cada $t>0$, o, lo que es lo mismo, $u_h(x,t)\to f(x-t)$.

lo cual refleja el carácter disipativo del término de regularización $-hu_{xx}/2$ añadido en la ecuación (8.45) y supone, claramente, la versión continua de la ley de disipación de energía (8.40) del esquema regresivo.

El mismo argumento permite detectar el carácter inestable de la aproximación progresiva puesto que

$$\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} = u_x(x,t) + \frac{h}{2}u_{xx}(x,t) + O(h^2). \tag{8.47}$$

En este caso, el esquema progresivo resulta ser una aproximación de orden dos de la EDP de segundo orden

$$u_t + u_x + \frac{h}{2}u_{xx} = 0. \tag{8.48}$$

En esta ocasión (8.48) es una ecuación parabólica retrógrada de carácter inestable[18]

tal y como queda de manifiesto en la ley de amplificación de la energía que las soluciones de (8.48) satisfacen

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}} u^2(x,t)dx = \frac{h}{2}\int_{\mathbf{R}} u_x^2(x,t)dx. \tag{8.49}$$

Sin embargo, este argumento permite confirmar el carácter puramente conservativo de la aproximación centrada. En efecto:

$$\frac{u(x+h,t)-u(x-h,t)}{2h} = u_x(x,t) + \frac{h^2}{3!}\partial_x^3 u(x,t) + \cdots + \frac{h^{2\ell}}{(2\ell+1)!}\partial_x^{2\ell+1}u(x,t) + \cdots . \tag{8.50}$$

Es fácil comprobar, en efecto, que cualquiera de las aproximaciones de la ecuación de transporte (8.1) obtenidas truncando el desarrollo en serie de potencias (8.50) de la forma

$$u_t + \sum_{\ell=0}^{L} \frac{h^{2\ell}}{(2\ell+1)!}\partial_x^{2\ell+1} = 0 \tag{8.51}$$

Tiene un carácter puramente conservativo.

Las ecuaciones (8.51) tienen sin embargo un carácter dispersivo que analizaremos más adelante.

En relación a la ecuación de transporte (8.5) en la que el sentido de progresión de las ondas ha sido invertido, como es de esperar, se tiene que el esquema regresivo es inestable y no converge mientras que el progresivo y centrado son convergentes de orden 1 y 2, respectivamente.

[18]La inestabilidad de esta ecuación a medida que $h \to 0$ se pone claramente de manifiesto a través del cambio de variable $v_h(x,t) = u_h(x+t,t)$. En este caso, se trata de una solución de la ecuación del calor retrógrada $v_t + hv_{xx} = 0$ que, tras el cambio de variables $w_h(x,t) = v_h(x,t/h)$, se convierte en una solución de la ecuación del calor retrógrada normalizada $w_t + w_{xx} = 0$. Así, vemos que $v_h(x,t) = [G_h(\tau - t) * v_h(\cdot,\tau)](x)$, para cada par de instantes de tiempo $0 < t < \tau$, siendo G_h el núcleo del calor reescalado: $G_h(x,t) = (4\pi ht)^{-1/2}\exp(-x^2/4ht)$. De esta expresión, aplicada con $t = 0$ de modo que $v_h(x,t) = f(x)$, se deduce fácilmente que $v_h(x,t)$ no está acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R}))$, para ningún $T > 0$.

Para concluir esta sección consideremos el siguiente esquema completamente discreto para la aproximación de (8.1):

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{2\Delta t} + \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta x} = 0. \tag{8.52}$$

Aquí y en lo sucesivo utilizamos las notaciones habituales de modo que Δt y Δx denotan los pasos del mallado en la dirección temporal y espacial respectivamente. Por otra parte, u_j^k denota la aproximación de la solución continua $u = u(x,t)$ de (8.1) en el punto $(x,t) = (x_j, t_k) = (j\Delta x, k\Delta t)$.

El esquema (8.52) está perfectamente centrado tanto en la variable espacial como temporal y se denomina esquema "leap-frog".

Se trata de un esquema consistente de orden 2 y puede ser escrito en la forma

$$u_j^{k+1} = u_j^{k-1} + \mu \left[u_{j-1}^k - u_{j+1}^k\right] \tag{8.53}$$

donde μ es el número de Courant:

$$\mu = \Delta t / \Delta x. \tag{8.54}$$

El método de von Neumann permite analizar fácilmente la estabilidad del esquema. En este caso, la transformada de Fourier $\breve{u}^k(\theta)$ de la solución de (8.53) satisface

$$\breve{u}^{k+1}(\theta) = \breve{u}^{k-1}(\theta) + \mu \left[e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right] \breve{u}^k(\theta) = \breve{u}^{k-1}(\theta) - 2i\mu \operatorname{sen}(\theta) \breve{u}^k(\theta),$$

es decir,

$$\breve{u}^{k+1}(\theta) + 2i\mu \operatorname{sen}(\theta) \breve{u}^k(\theta) - \breve{u}^{k-1}(\theta) = 0. \tag{8.55}$$

En (8.55) vemos que cada componente de Fourier $\breve{u}^k(\theta)$ satisface un esquema de evolución discreto de dos pasos cuyos coeficientes dependen de $\theta \in [0, 2\pi)$. Basta por tanto verificar si se satisface el criterio de la raíz. En este caso los ceros del polinomio característico del esquema (8.55) son

$$\lambda_\pm(\theta) = -i\mu \operatorname{sen}(\theta) \pm \sqrt{-\mu^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + 1}. \tag{8.56}$$

Conviene entonces distinguir los tres siguientes casos:

- *Caso 1:* $\mu < 1$.

  En este caso

  $$|\lambda_\pm|^2 = \left[\mu^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 1 - \mu^2 \operatorname{sen}^2 \theta\right] = 1$$

  con lo cual la estabilidad queda garantizada al ser las raices $\lambda_\pm$ simples.

- *Caso 2:* $\mu = 1$.

  En este caso límite se observa que cuando $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$ el discriminante se anula. Tenemos entonces raíces dobles de módulo unidad, lo cual produce la inestabilidad del esquema.

- *Caso 3:* $\mu > 1$.

  En este caso, cuando $\theta \sim \pi/2$ tenemos que

  $$-4\mu^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + 4 < 0$$

  y por lo tanto los ceros son de la forma

  $$\lambda_\pm(\theta) = -i \left[\mu \operatorname{sen} \theta \mp \sqrt{\mu^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1} \right].$$

  La raíz de mayor módulo es la que corresponde al signo negativo. En este caso tenemos

  $$|\lambda_-(\theta)| = \mu \operatorname{sen} \theta + \sqrt{\mu^2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1} > 1$$

  puesto que $\mu \operatorname{sen} \theta > 1$.

  El método es por tanto inestable en este caso.

De este análisis deducimos que el método completamente discreto de leap-frog es convergente de orden dos si y sólo si $\mu \leq 1$.

Es fácil comprobar también que $\mu \leq 1$ es precisamente la condición que garantiza que el dominio de dependencia del esquema discreto contiene el de la ecuación continua.

Señalemos por último que el método consistente en sustituir el esquema numérico por una aproximación semejante escrita en términos de EDP puede también aplicarse en este caso. Obtendríamos ahora aproximaciones conservativas pero dispersivas de la ecuación de transporte de la forma

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{(\Delta t)^{2m}}{(2m+1)!} \partial_t^{2m+1} + \sum_{\ell=0}^{L} \frac{(\Delta x)^{2\ell}}{(2\ell+1)!} \partial_x^{2\ell+1} = 0 \tag{8.57}$$

Tomando por ejemplo $L = M = 1$ obtenemos la ecuación:

$$\partial_t u + \partial_x u + \frac{(\Delta t)^2}{6} \partial_t^3 u + \frac{(\Delta x)^2}{6} \partial_x^3 u = 0.$$

Ahora bien, la ecuación de transporte indica que $\partial_t u = -\partial_x u$ y por tanto $\partial_t^2 = \partial_x^2$, de modo que la ecuación anterior puede escribirse del modo siguiente:

$$\partial_t [u + \frac{(\Delta t)^2}{6} \partial_x^2 u] + \partial_x [u + \frac{(\Delta x)^2}{6} \partial_x^2 u] = 0.$$

En esta última expresión es fácil comprobar el carácter conservativo de estas aproximaciones. En efecto, multiplicando en la ecuación por u e integrando en $\mathbb{R}$ obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t \Big(u + \frac{(\Delta t)^2}{6} \partial_x^2 u \Big) u dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x \Big(u + \frac{(\Delta x)^2}{6} \partial_x^2 u \Big) u dx + 0.$$

Ahora bien, tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t u u dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx; \quad \int_{\mathbb{R}} \partial_x^3 u\, u dx = -\int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u\, \partial_x u\, dx = 0.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t \partial_x^2 u\, u dx = -\int_{\mathbb{R}} \partial_t \partial_x u \partial_x u dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \mid \partial_x u \mid^2 dx; \quad \int_{\mathbb{R}} \partial_x u\, u dx = 0.$$

Obtenemos así la ley de conservación de la energía:

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \Big[u^2 - \frac{(\Delta t)^2}{6} \mid u_x \mid^2 \Big] dx\Big] = 0$$

Vemos sin embargo que el efecto dispersivo introducido por el esquema numérico hace que no sea la norma de u en $L^2(\mathbb{R})$ la que se conserve en tiempo sino la cantidad:

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(u^2 - \frac{(\Delta t)^2}{6} \mid u_x \mid^2 \Big) dx$$

que, incluso puede ser negativa si la función u oscila rápidamente. Conviene sin embargo no olvidar que en las soluciones numéricas su máxima oscilación está limitada por el paso del mallado, por lo que esta cantidad nunca se puede hacer negativa en ellas.

Son muchos los esquemas completamente discretos que surgen de manera natural en la aproximación de la ecuación de transporte (8.1), además del esquema "leap-frog" ya estudiado. La mayoría de ellos aparecen al realizar una aproximación discreta en tiempo de un esquema semidiscreto, pero no siempre es así. Obviamente, en caso de proceder a la obtención del esquema completamente discreto mediante la discretización temporal de un esquema semi-discreto, elegiremos uno que sea convergente puesto que si el esquema semi-discreto de partida fuese divergente, el esquema completamente discreto obtenido tampoco convergería.

En vista de este hecho, conviene excluir inmediatamente los esquemas completamente discretos derivados del esquema semi-discreto progresivo (8.10) puesto que ya vimos que es inestable y por tanto divergente.

Sin embargo, como el esquema regresivo (8.11) es convergente parece natural introducir el esquema de Euler regresivo

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + \frac{u_j^k - u_{j-1}^k}{\Delta x} = 0 \tag{8.58}$$

o su versión implícita

$$\frac{u^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} + \frac{u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x} = 0 \tag{8.59}$$

Nos referiremos a estos esquemas con ER (Euler regresivo explícito) y ERI (Euler regresivo implícito), respectivamente.

Ambos esquemas son de un paso temporal y consistentes de orden uno. Comprobemos pues su estabilidad.

El esquema ER puede reescribirse como

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \mu(u_{j-1}^k - u_j^k). \tag{8.60}$$

El análisis de von Neumann conduce al esquema discreto

$$\breve{u}^{k+1}(\theta) = \breve{u}^k(\theta) + \mu(e^{-i\theta}\breve{u}^k(\theta) - \breve{u}^k(\theta)) = \Big[1 + \mu(e^{-i\theta} - 1)\Big]\breve{u}^k(\theta) \tag{8.61}$$

Para su estabilidad basta entonces comprobar si $\mid 1 + \mu(e^{-i\theta} - 1) \mid \leqslant 1$. Como

$$1 + \mu(e^{-i\theta} - 1) \;=\; 1 + \mu[\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta - 1] = 1 + \mu(\cos\theta - 1) - i\mu\operatorname{sen}\theta$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mid 1 + \mu(e^{-i\theta} - 1) \mid^2 &= (1 + \mu(\cos\theta - 1))^2 + \mu^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= 1 + \mu^2(\cos\theta - 1)^2 + 2\mu(\cos\theta - 1) + \mu^2\operatorname{sen}^2\theta^2 \\ &= 1 + \mu^2(\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta) + 2\mu(\cos\theta - 1) + \mu^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\mu \end{aligned}$$

de donde deducimos que es estable, y por tanto convergente de orden uno, si y sólo si

$$\mid 1 - 2\mu \mid \leqslant 1 \Leftrightarrow \mu \leqslant 1. \tag{8.62}$$

Es fácil comprobar que esta condición de estabilidad es precisamente la que se obtiene al imponer que el dominio de dependencia del esquema discreto contenga al de la ecuación de transporte continua.

En el caso del ERI tenemos

$$u_j^{k+1} = u_j^k - \mu(u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1})$$

que al aplicar la transformada de Fourier, se convierte en

$$\breve{u}^{k+1}(\theta) = \breve{u}^k(\theta) - \mu(\breve{u}^{k+1}(\theta) - e^{i\theta}\breve{u}^{k+1}(\theta)), \tag{8.63}$$

es decir,

$$\Big[1 + \mu(1 - e^{-i\theta})\Big]\breve{u}^{k+1}(\theta) = \breve{u}^k(\theta),$$

o

$$\breve{u}^{k+1}(\theta) = [1 + \mu(1 - e^{-i\theta})]^{-1}\breve{u}^k(\theta). \tag{8.64}$$

La condición de estabilidad es entonces en este caso $\mid 1 + \mu(1 - e^{-i\theta}) \mid \geqslant 1$. Como

$$1 + \mu(1 - e^{-i\theta}) = 1 + \mu(1 - \cos\theta) + i\mu\operatorname{sen}\theta$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mid 1+\mu(1-e^{-i\theta}) \mid^2 &= (1+\mu(1-\cos\theta))^2+\mu^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ &= 1+\mu^2(1+\cos^2\theta-2\cos\theta)+2\mu(1-\cos\theta)+\mu^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= 1+2\mu(1-\cos\theta)+2\mu^2(1-\cos\theta) \geqslant 1 \end{aligned}$$

y por tanto el método es incondicionalmente estable.

A primera vista puede resultar sorprendente que el método ERI sea convergente para cualquier valor del número de Courant pues cabría preguntarse si la condición de inclusión de los dominios de dependencia se cumple con independencia del valor de μ. Esto es efectivamente así puesto que en el esquema discreto (8.59) el cálculo de u_j^{k+1} involucra a u_{j-1}^{k+1}, cuyo valor a su vez involucra a $u_{j-2}^{k+1}, \cdots$. Vemos pues que el dominio de dependencia de ERI es el conjunto de todos los nodos del mallado, con independencia del valor de μ.

De hecho cabe preguntarse sobre cual es el modo de resolver el sistema (8.59). Este sistema, con la notación vectorial habitual puede escribirse en la forma

$$B_\mu \overrightarrow{u}^{k+1} = \overrightarrow{u}^k$$

donde B_μ es una matriz infinita con valores $1+\mu$ en la subdiagonal. Se trata por tanto de una matriz infinita "triangular inferior" que define un operador acotado de ℓ^2 en ℓ^2. Pero, ¿se puede invertir el operador B_μ?

Para comprobar que esto es efectivamente así, conviene utilizar el análisis de von Neumann. En efecto, el sistema equivalente (8.63) se resuelve inmediatamente y tiene como solución (8.64). Además, tal y como hemos visto en el análisis de la estabilidad del esquema

$$\mid \check{u}^{k+1}(\theta) \mid \leqslant \mid \check{u}^k(\theta) \mid, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi).$$

Deducimos por tanto que

$$\begin{aligned} \| (u_j^{k+1})_{j\in\mathbb{Z}} \|_{\ell^2}^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mid u_j^{k+1} \mid^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid \check{u}^{k+1}(\theta) \mid^2 d\theta \\ \leqslant \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid \check{u}^k(\theta) \mid^2 d\theta = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mid u_j^k \mid^2 = \| (u_j^k)_{j\in\mathbb{Z}} \|_{\ell^2}^2 \end{aligned}$$

de modo que B_μ^{-1} está bien definido y es un operador acotado de ℓ^2 en ℓ^2 con norma no superior a uno. Vemos pues que la transformada discreta de Fourier permite probar la resolubilidad del sistema algebráico (8.59) que el método ERI plantea.

Evidentemente hay muchos otros esquemas que pueden considerarse. Por ejemplo, el esquema de Crank-Nicolson (CN) inspirado en la regla del trapecio para la resolución de ecuaciones diferenciales y en la diferencia finita centrada para la aproximación de la derivada espacial:

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\Big[\frac{u_{j+1}^k-u_{j-1}^k}{2\Delta x}+\frac{u_{j+1}^{k+1}-u_{j-1}^{k+1}}{2\Delta x}\Big]. \tag{8.65}$$

El método CN es convergente de orden dos para cualquier valor del parámetro de Courant μ. Vemos pues que CN preserva la propiedad que el método ERI de converger para todo valor de μ, pero tiene además la propiedad de ser de orden dos. El orden dos proviene de la combinación de los dos hechos siguientes: a) La utilización de diferencias centradas en la aproximación de la derivada espacial, lo cual da, efectivamente, una aproximación de orden dos de la derivada espacial; b) La utilización del método del trapecio en la aproximación de la derivada temporal, que es también un método de orden dos, aunque esta vez en tiempo.

Nuevamente (8.65) es un sistema implícito. Pero se puede ver que es resoluble utilizando el argumento que hemos usado para el método ERI, mediante la transformada discreta de Fourier.

Existen otros muchos métodos que proporcionan aproximaciones convergentes de la ecuación de transporte. Tenemos por ejemplo de "leap-frog" de orden cuatro (LF4):

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\Delta t} = -\Big[\frac{4}{3}\Big[\frac{u_{j+1}^k-u_{j-1}^k}{2\Delta x}\Big] - \frac{1}{3}\Big[\frac{u_{j+2}^k-u_{j-2}^k}{4\Delta x}\Big]\Big] \tag{8.66}$$

que es de orden dos en tiempo y orden cuatro en espacio.

En todos los métodos descritos hasta ahora puede observarse que han sido derivados en dos pasos, discretizando primero la variable espacial y después la temporal. Sin ir más lejos es obvio que (8.66) proviene de una semi-discretización de la forma

$$u_j'(t) = -\Big[\frac{4}{3}\Big[\frac{u_{j+1}(t)-u_{j-1}(t)}{2\Delta x}\Big] - \frac{1}{3}\Big[\frac{u_{j+2}(t)-u_{j-2}(t)}{4\Delta x}\Big]\Big] \tag{8.67}$$

que es efectivamente consistente con la ecuación de transporte. El paso de (8.67) a (8.66) es claro. Basta con utilizar el esquema de dos pasos

$$\frac{y^{k+1}-y^{k-1}}{2\Delta t} = f(y^k)$$

para la resolución de la ecuación diferencial

$$y'(t) = f(y(t)).$$

Pero, como decíamos, no todos los métodos discretos provienen de discretizar en tiempo una semi-discretización. Por ejemplo el método de la derivada oblicua es de la forma

$$u_j^{k+2} = (1-2\mu)\Big(u_j^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}\Big) + u_{j-1}^k. \tag{8.68}$$

Se trata de un método de orden dos. Para ver que, efectivamente, es un método consistente con la ecuación de transporte lo escribimos como

$$\frac{u_j^{k+2}-u_{j-1}^k-u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{\Delta t} = -2\frac{(u_j^{k+1}-u_{j-1}^{k+1})}{\Delta x},$$

o, de manera más clara aún,

$$\frac{1}{2}\Big[\frac{u_j^{k+2}-u_j^{k+1}}{\Delta t}+\frac{u_{j-1}^{k+1}-u_{j-1}^{k}}{\Delta t}\Big]+\frac{u_j^{k+1}-u_{j-1}^{k+1}}{\Delta x}=0, \tag{8.69}$$

expresión en la que queda claramente de manifiesto la analogía del esquema discreto con la ecuación de transporte continua.

Citemos por último los esquemas de Lax-Wendroff

$$u_j^{k+1}=\frac{1}{2}\mu(1+\mu)u_{j-1}^k+(1-\mu^2)u_j^k-\frac{1}{2}\mu(1-\mu)u_{j+1}^k \tag{8.70}$$

y el esquema de Lax-Friedrichs

$$u_j^{k+1}=\frac{1}{2}(1-\mu)u_{j-1}^k+\frac{1}{2}(1+\mu)u_{j+1}^k. \tag{8.71}$$

El esquema de Lax-Friedrichs puede escribirse en la forma

$$\frac{u_j^{k+1}-\frac{1}{2}(u_{j-1}^k+u_{j+1}^k)}{\Delta t}=-\frac{u_{j+1}^k-u_{j-1}^k}{2\Delta x} \tag{8.72}$$

en la que queda claramente de manifiesto la consistencia con la ecuación de transporte. En esta expresión se observa que este esquema se obtiene a partir de la semi-discretización centrada realizando una discretización explícita de la derivada temporal en la que el valor u_j^k de la discretización más típica de u_t, (i.e. $(u_j^{k+1}-u_j^k)/\Delta t$) ha sido sustituido por la media de los valores u_{j-1}^k y u_{j+1}^k.

Es fácil comprobar que (8.72) es una aproximación difusiva de la ecuación de transporte. En efecto, basta aplicar formalmente en (8.72) el desarrollo de Taylor para observar que (8.72) da lugar en realidad a la siguiente corrección difusiva de la ecuación de transporte:

$$u_t-\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}u_{xx}+u_x=0,$$

que es análoga a la que obtuvimos para el esquema semi-discreto regresivo.

Obviamente, se trata de un esquema discreto. Es de orden uno y tiene la propiedad de conservar la masa de la solución. En efecto, definimos la masa de la solución discreta como

$$m^k=\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j^k.$$

Basta entonces sumar con respecto a $j\in\mathbb{Z}$ en (8.71) para obtener que las soluciones del esquema de Lax-Friedrichs satisfacen $m^{k+1}=m^k$. Esto es una versión discreta de la propiedad de conservación de la masa que las soluciones $u(x,t)=f(x-t)$ de (8.1) satisfacen, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}}u(x,t)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Esta propiedad de conservación de la masa juega un papel relevante en la aproximación numérica de las ecuaciones de transporte no-lineales, como la ecuación de Burgers, y los esquemas que la verifican se dicen *conservativos*.

Es fácil comprobar que el esquema de Lax-Friedrichs es estable (y, por tanto, convergente de orden uno) si y sólo

$$\mu = \Delta t/\Delta x \leqslant 1.$$

El esquema de Lax-Wendroff es consistente de orden dos y es fácil comprobar que es también un esquema conservativo y es convergente bajo la misma condición $\mu \leqslant 1$.

9 Dispersión numérica y velocidad de grupo

En el apartado anterior hemos estudiado la convergencia de diversos esquemas semi-discretos y completamente discretos de aproximación de la ecuación continua (8.1). Hemos comprobado que esquemas numéricos convergentes pueden introducir efectos disipativos o anti-disipativos que pueden ser respectivamente la causa de su estabilidad o inestabilidad o, por el contrario, ser puramente conservativos.

Sin embargo con independencia de su carácter convergente o divergente la mayoría de los esquemas numéricos tienen un carácter dispersivo. Por dispersión entendemos la propiedad de un sistema dinámico continuo o discreto en tiempo de propagar a diferentes velocidades las diversas componentes de la solución.

La ecuación de transporte (8.1) es precisamente un ejemplo claro de sistema no dispersivo pues, como vimos en la sección 8, todas sus soluciones son ondas de transporte puras que se propagan en el espacio a velocidad uno. Este hecho, obvio de la expresión explícita de la solución (8.3), puede también comprobarse a través del análisis de Fourier.

En efecto, consideremos soluciones u de (8.1) de la forma

$$u = e^{i\omega t} e^{i\xi x}, \tag{9.1}$$

es decir soluciones sinusoidales en variables separadas de frecuencia temporal ω y longitud de onda espacial $2\pi/\xi$, i.e. número de onda ξ.

Es fácil comprobar que u de la forma (9.1) es solución de (8.1) si y sólo si

$$\omega = -\xi. \tag{9.2}$$

En este caso la solución (9.1) adquiere la forma

$$u(x,t) = e^{i\omega(t-x)} \tag{9.3}$$

y se confirma lo observado en (8.3) en el sentido que las soluciones de (8.1) son meras ondas de transporte progresivas con velocidad uno.

La relación (9.2) es la que se denomina *relación de dispersión* para la ecuación de transporte (8.1).

Analicemos ahora, por ejemplo, el esquema semi-discreto regresivo que, como vimos en la sección anterior, es convergente de orden uno:

$$u_j' + \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = 0. \tag{9.4}$$

Buscamos ahora soluciones de la forma

$$u_j(t) = e^{i\omega t} e^{i\xi x_j}. \tag{9.5}$$

Llevando la expresión (9.5) a la ecuación (9.4) obtenemos la ecuación

$$i\omega + \frac{1 - e^{-i\xi h}}{h} = 0,$$

es decir

$$\omega = \frac{i}{h}\left[1 - e^{-i\xi h}\right]. \tag{9.6}$$

La ecuación (9.6) es la relación de dispersión para el esquema semi-discreto (9.4).

Un simple desarrollo de Taylor permite comprobar que, en una primera aproximación, (9.6) coincide con la relación de dispersión (9.2) de la ecuación de transporte continua. En efecto,

$$\frac{i}{h}\left[1 - e^{-i\xi h}\right] = \frac{i}{h}\left[1 - \left[1 - i\xi h - \frac{\xi^2 h^2}{2} + O(h^3)\right]\right] = -\xi + \frac{i\xi^2 h}{2} + O(h^2). \tag{9.7}$$

En virtud de (9.6) la solución (9.5) de (9.4) puede escribirse en la forma

$$u_j(t) = e^{i\xi(x_j + \frac{\omega}{\xi}t)},$$

de donde vemos que la solución semi-discreta es una onda de transporte progresiva que avanza a una velocidad

$$c_h(\xi) = -\frac{\omega_h(\xi)}{\xi} = -\frac{i}{h\xi}(1 - e^{-i\xi h}) = 1 - \frac{i\xi h}{2} + O(h^2), \tag{9.8}$$

denominada *velocidad de fase*.

En la expresión (9.8) queda claramente de manifiesto el carácter dispersivo de la ecuación semi-discreta, en la medida en que la velocidad de propagación de la onda depende de la longitud de la misma.

Pero, cabría argumentar que la expresión (9.8) es un número complejo, por lo que no representa realmente una velocidad de transporte en el espacio físico. Esto es debido al efecto disipativo que el esquema (9.4) introduce y que quedó claramente de manifiesto en su análogo continuo (8.45).

Consideremos ahora el esquema centrado

$$u_j' + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = 0, \tag{9.9}$$

que, como vimos en la sección 8, es convergente de orden 2 y puramente conservativo.

En este caso se obtiene la relación de dispersión

$$i\omega + \frac{e^{i\xi h} - e^{-i\xi h}}{2h} = 0.$$

Es decir,

$$i\omega + \frac{i\,\mathrm{sen}(\xi h)}{h} = 0$$

o, equivalentemente,

$$\omega = -\frac{\mathrm{sen}(h\xi)}{h}. \tag{9.10}$$

Nuevamente observamos que (9.10) es una aproximación de la relación de dispersión (9.2) de la ecuación de transporte continua. De (9.10) se deduce que la velocidad de propagación de las ondas semi-discretas es en este caso

$$c_h(\xi) = \frac{\mathrm{sen}(\xi h)}{\xi h} = 1 - \frac{\xi^2 h^2}{3!} + O(h^4). \tag{9.11}$$

Comprobamos por lo tanto que las ondas en el medio semi-discreto se propagan más lentamente que en el medio continuo si bien, fijada la longitud de onda espacial, la velocidad de propagación $c_h(\xi)$, cuando $h \to 0$, converge a la velocidad de propagación en el caso continuo $c \equiv 1$. Obviamente, la convergencia de las velocidades de propagación está motivada por el hecho que el esquema sea convergente. En efecto, el esquema numérico no podría ser convergente si para algunas longitudes de onda las velocidades de propagación no convergiesen cuando el paso del mallado tiende a cero.

Consideremos por último el esquema "leap-frog" completamente discreto (8.52). En este caso buscamos ondas discretas de la forma

$$u_j^k = e^{i\omega\Delta t_k} e^{i\xi x_j} = e^{i\omega k\Delta t} e^{i\xi j\Delta x}. \tag{9.12}$$

Obtenemos entonces la relación de dispersión:

$$\frac{e^{i\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t}}{2\Delta t} + \frac{e^{i\xi\Delta x} - e^{-i\xi\Delta x}}{2\Delta x} = 0$$

que, en función del número de Courant $\mu = \Delta t/\Delta x$, puede reeescribirse como

$$\mathrm{sen}(\omega\Delta t) = -\mu\,\mathrm{sen}(\xi\Delta x),$$

o, de otro modo,

$$\omega = -\frac{1}{\Delta t}\mathrm{arcsen}\left[\mu\,\mathrm{sen}(\xi\Delta x)\right]. \tag{9.13}$$

Nuevamente es evidente que a medida que $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ la relación de dispersión (9.13) se aproxima a la de la ecuación de transporte continua.

El caso

$$\mu = 1 \tag{9.14}$$

es particularmente interesante puesto que la relación de dispersión (9.13) se reduce a

$$\omega = -\xi \tag{9.15}$$

que es precisamente la correspondiente a la ecuación de transporte continua. En este caso las ondas discretas se propagan a velocidad constante idénticamente igual a uno, como lo hacen en el caso continuo.

Con el objeto de entender esta coincidencia de las velocidades de propagación continua y discretas conviene reescribir el esquema discreto con $\mu = 1$. Se obtiene en este caso

$$u_j^{k+1} - u_j^{k-1} + u_{j+1}^k - u_{j-1}^k = 0.$$

Es decir

$$u_j^{k+1} + u_{j+1}^k = u_j^{k-1} + u_{j-1}^k. \tag{9.16}$$

Habida cuenta que las soluciones de la ecuación de transporte continua son de la forma $u = f(x - t)$, se comprueba que, en este caso, son también soluciones exactas del esquema discreto (9.16) con $\mu = 1$. El esquema numérico es por tanto en este caso de orden infinito y reproduce de manera exacta las soluciones de la ecuación de transporte continua sobre los puntos del mallado.

Pero esto ocurre sólo cuando $\mu = 1$. Cuando $0 < \mu < 1$ el esquema es convergente pero también dispersivo. En efecto, en este caso la velocidad de propagación es

$$c_h(\xi) = \frac{1}{\Delta t \xi} \operatorname{arcsen}\left[\mu \operatorname{sen}(\xi \Delta x)\right]. \tag{9.17}$$

Nuevamente observamos que, para cualquier valor del número de Courant $0 < \mu < 1$:

- $c_h(\xi) \to 1$, $h \to 0$, $\forall \xi$;
- $| c_h(\xi) | < 1$, $\forall h > 0$, $\forall \xi$.

La velocidad $c_h(\xi)$ describe de manera adecuada la propagación de las ondas semidiscretas o discretas que involucran un solo modo de Fourier. Son las que llamaremos ondas monocromáticas. Pero, tal y como vimos en la sección 1 en el marco del análisis del movimiento armónico simple, cuando se superponen dos ondas con velocidades de propagación semejantes pero no idénticas surgen paquetes de ondas que pueden propagarse a velocidades distintas. Con el objeto de entender este fenómeno es conveniente introducir la noción de *velocidad de grupo*.

Para introducir esta noción consideremos cualquiera de los anteriores esquemas semidiscretos que admite soluciones de la forma

$$u_j(t) = e^{i\omega_h(\xi)t} e^{i\xi x_j}. \tag{9.18}$$

Superponiendo dos soluciones de esta forma con longitudes de ondas ξ y $\xi + \Delta\xi$ respectivamente obtenemos una nueva solución

$$u_{\Delta\xi,j}(t) = \frac{e^{i\omega_h(\xi)t} e^{i\xi x_j} - e^{i\omega_h(\xi+\Delta\xi)t} e^{i(\xi+\Delta\xi)x_j}}{\Delta\xi}$$

cuyo límite, cuando $\Delta\xi \to 0$, viene dado por

$$w_j(t) = -i[\omega_h'(\xi)t + x_j] e^{i\omega_h(\xi)t} e^{i\xi x_j}.$$

El resultado es un nuevo tipo de onda, producto de la solución (9.18) que se propaga a la velocidad de fase habitual $c_h(\xi)$ con la onda $g(x,t) = -i[\omega_h'(\xi)t + x_j]$ que se propaga a velocidad $\omega_h'(\xi)$ que se denomina *velocidad de grupo*.

La velocidad de grupo es la que determina la propagación de paquetes de ondas conteniendo varias ondas de números de onda semejantes. Para comprobar este hecho basta con considerar la solución que se obtendría a partir de un dato inicial $f = f(x)$ con transformada de Fourier $F(\xi)$. La solución tendría entonces la expresión [19]:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i(\omega_h(\xi)t + \xi x)} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{it(\omega_h(\xi) + \xi x/t)} d\xi. \tag{9.19}$$

Supongamos ahora que fijamos el valor de x/t, lo cual corresponde a mover el origen de referencia a velocidad $x/t = cte$. Evidentemente, cuando $t \to \infty$ la exponencial del integrando oscila más y más con respecto a la variable ξ y tiende a cero en un sentido débil haciendo que la integral tienda a anularse. Esta cancelación ocurre efectivamente para todos los valores de ξ salvo para aquéllos en los que

$$\frac{d}{d\xi}(\omega_h(\xi) + \xi x/t) = 0. \tag{9.20}$$

Este hecho puede probarse de manera rigurosa mediante el Teorema de la Fase Estacionaria (TFE) (véase [6]).

La ecuación (9.20) puede también escribirse del modo siguiente:

$$\omega_h'(\xi) = -x/t. \tag{9.21}$$

Esta relación indica que, a medida que nos trasladamos en el espacio a velocidad x/t, sólo podemos ver las componentes cuyo número de onda ξ satisfaga la relación (9.20), o,

[19] Evitamos aquí las constantes multiplicativas de la transformada y antitransformada de Fourier que en nada afectan al fenómeno cualitativo que pretendemos ilustrar.

dicho de otro modo, la energía asociada al número de onda ξ se propaga a una *velocidad de grupo*

$$C_h(\xi) = -\omega_h'(\xi). \tag{9.22}$$

Conviene en este punto señalar que la velocidad de fase $c_h(\xi)$ y la velocidad de grupo $C_h(\xi)$, en general, no coinciden. Analicemos este hecho en los ejemplos que hemos introducido más arriba.

En el caso de la ecuación de transporte continua teníamos que $w(\xi) = -\xi$ para todo ξ. En este caso, obviamente $c_h(\xi) \equiv C_h(\xi) \equiv 1$, lo cual indica que todas las ondas se propagan a velociad uno en este modelo.

Sin embargo en el esquema semi-discreto regresivo teníamos que

$$\omega = \frac{i}{h}\left[1 - e^{-i\xi h}\right]; \quad c_h(\xi) = -\frac{\omega_h(\xi)}{\xi} = 1 - \frac{i\xi h}{2} + O(h^2), \tag{9.23}$$

mientras la velocidad de grupo viene dada por la expresión

$$C_h(\xi) = -\omega_h'(\xi) = e^{-i\xi h} = 1 - i\xi h + O(h^2), \tag{9.24}$$

Se observa efectivamente una sutil diferencia entre las expresiones obtenidas en (9.23) y (9.24).

Consideramos ahora el esquema centrado en el que, como veíamos anteriormente,

$$\omega = -\frac{\operatorname{sen}(h\xi)}{h}; \quad c_h(\xi) = \frac{\operatorname{sen}(\xi h)}{\xi h} = 1 - \frac{\xi^2 h^2}{6} + O(h^4). \tag{9.25}$$

En este caso la velocidad de grupo es

$$C_h(\xi) = \cos(\xi h) = 1 - \frac{\xi^2 h^2}{2} + O(h^4). \tag{9.26}$$

Nuevamente se observa una ligera diferencia en las expresiones de velocidad de fase y de grupo.

Consideremos por último el esquema completamente discreto de "leap-frog". En aquél caso veíamos que

$$\omega_h(\xi) = \frac{-1}{\Delta t}\operatorname{arcsen}\left[\mu \operatorname{sen}(\xi \Delta x)\right]; \quad c_h(\xi) = \frac{1}{\Delta t \xi}\operatorname{arcsen}\left[\mu \operatorname{sen}(\xi \Delta x)\right]. \tag{9.27}$$

Sin embargo, la velocidad de grupo viene dada por la expresión:

$$C_h(\xi) = \frac{\Delta x \mu \cos(\xi \Delta x)}{\Delta t \sqrt{1 - \mu^2 \operatorname{sen}^2(\xi \Delta x)}}, \tag{9.28}$$

que, nuevamente, difiere de la velocidad de fase, salvo en el caso $\mu = 1$ en el que $c_h(\xi) \equiv C_h(\xi) \equiv 1$.

Estas, aparentemente, pequeñas diferencias entre la velocidad de fase y de grupo pueden sin embargo ser la causa de comportamientos inesperados de las soluciones de los esquemas numéricos.

Hemos antes mencionado que el Teorema de la Fase Estacionaria (TFE) juega un papel fundamental a la hora de entender el fenómeno de la velocidad de grupo. El lector interesado en una presentación básica pero completa de este Teorema puede consultar la sección 4.5.3 del libro de Evans [6].

El TFE parte de la observación siguiente: Si $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{p\cdot x}{\varepsilon}} a(x)dx = O(\varepsilon^m),\ \varepsilon \to 0 \tag{9.29}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ y $m \geqslant 1$.

En (9.29) se pone de manifiesto el hecho de que la integral se anula a un orden arbitrariamente grande cuando $\varepsilon \to 0$. Esto, evidentemente, no es así porque el integrando tienda a cero en módulo. Todo lo contrario, tenemos $\mid e^{ip\cdot x/\varepsilon} a(x) \mid = \mid a(x) \mid$ para todo $\varepsilon > 0$. Sin embargo es el carácter rápidamente oscilante de la exponencial compleja del integrando lo que hace que la integral se anule a cualquier orden. La prueba de (9.29) es muy sencilla. Basta integrar por partes teniendo en cuenta que

$$e^{ip\cdot x/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{p_k}\frac{\partial}{\partial x_k}(e^{ip\cdot x/\varepsilon}).$$

El número de integrales por partes que podemos realizar es ilimitado pues la función $a = a(x)$ es de clase C^∞. Además, al ser su soporte compacto, las integrales por partes no aportan términos de frontera.

En el caso en que en la exponencial aparecen términos cuadráticos obtenemos la expresión

$$\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2\varepsilon}y\cdot Ay} a(y)dy = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\,(A)}}{\mid \det A \mid^{1/2}}(a(0) + O(\varepsilon))$$

para todo $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, A matriz real, simétrica, no singular, siendo $\det A$ el determinante de A y $\mathrm{sgn}\,(A)$ su signatura, i.e. el número de autovalores positivos de A menos el número de autovalores negativos. Este resultado se prueba primero en el caso diagonal para después abordar el caso general utilizando una rotación que permita representar A como una matriz diagonal en la base de sus autovectores.

Estos resultados, junto con el desarrollo de Taylor, permiten describir el comportamiento de la integral

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i\phi(y)}{\varepsilon}} a(y)dy$$

para una función real, regular ϕ general.

En efecto, suponiendo que $\nabla\phi$ sólo se anula en un número finito de puntos $y_1 \cdots, y_N$ del soporte de la función a y que las matrices $D^2\phi(y_k)$ no son singulares, $k = 1, \cdots, N$; obtenemos que

$$I_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{n/2} \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{\frac{i\phi(y_k)}{\varepsilon}}}{|\det D^2\phi(y_k)|^{1/2}} e^{i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\,(D^2\phi(y_k))}(a(y_k) + O(\varepsilon)).$$

Las pruebas detalladas de estos resultados se encuentran en 4.5.4. del libro de Evans [6].

10 Transformada discreta de Fourier a escala h

En la sección 8 hemos introducido y utilizado el método de von Neumann para el análisis de la estabilidad de un esquema numérico que está basado en la utilización de una transformada discreta de Fourier que permite:

* Definir una isometría entre ℓ^2 y $L^2(0, 2\pi)$;
* Transformar un esquema en diferencias en una ecuación diferencial dependiente de un parámetro $\theta \in [0, 2\pi)$.

La transformada de Fourier que introducimos en su momento, sin embargo, no tiene en cuenta el paso h del mallado puesto que se aplica meramente sobre sucesiones en ℓ^2, sin tener en cuenta el mallado al que están asociadas. Con el objeto de analizar el comportamiento de las soluciones cuando $h \to 0$ es conveniente introducir una *transformada de Fourier a escala h,* cuyo límite cuando $h \to 0$ sea la clásica transformada de Fourier, de modo que recuperemos en el límite la ecuación en derivadas parciales.

Recordemos en primer lugar la definición clásica de la transformada de Fourier continua

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx = \mathcal{F}(f). \tag{10.1}$$

Es bien sabido que la transformada de Fourier define una isometría de $L^2(\mathbb{R})$ en sí mismo. La transformada inversa de Fourier viene dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{10.2}$$

Una de las mayores utilidades de la transformada continua de Fourier es su posible utilización para la resolución de EDP con coeficientes constantes. En esto la siguiente propiedad juega un papel fundamental[20]

$$\widehat{\partial_x f}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi). \tag{10.3}$$

[20] El lector interesado en un estudio de las propiedades básicas de la Transformada de Fourier y su aplicación a las EDP puede consultar los textos de F. John [12] y J. Rauch [16].

Por ejemplo, gracias a la propiedad (10.3), la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0, \tag{10.4}$$

mediante la aplicación de la transformada de Fourier en la variable x, se convierte en

$$\widehat{u}_t + i\xi\widehat{u} = 0 \tag{10.5}$$

de donde deducimos que

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-i\xi t}\widehat{f}(\xi). \tag{10.6}$$

La expresión (10.6) ya nos confirma el carácter conservativo de la ecuación de transporte (10.4) puesto que proporciona la identidad

$$\mid \widehat{u}(\xi, t) \mid = \mid \widehat{f}(\xi) \mid, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0 \tag{10.7}$$

que, tras integración en $\xi \in \mathbb{R}$, asegura que

$$\parallel \widehat{u}(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R})} = \parallel \widehat{f} \parallel_{L^2(\mathbb{R})}, \forall t > 0 \tag{10.8}$$

lo cual, a su vez, por el carácter isométrico de la transformada de Fourier, garantiza que

$$\parallel u(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R})} = \parallel f \parallel_{L^2(\mathbb{R})}, \forall t > 0. \tag{10.9}$$

Introduzcamos pues ahora la transformada discreta de Fourier a escala h, una de cuyas propiedades más relevantes será que, en el límite cuando $h \to 0$, recuperaremos la transformada continua de Fourier que acabamos de definir.

Dada la sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ proveniente de un mallado espacial de paso h (i.e. de modo que $f_j \sim f(x_j)$ con $x_j = jh$), definimos la transformada discreta de Fourier a escala h como

$$\overset{\sqcap}{f}(\xi) = h \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j e^{-i\xi hj}, \quad -\frac{\pi}{h} \leqslant \xi \leqslant \frac{\pi}{h}. \tag{10.10}$$

Denotamos la transformada discreta de Fourier mediante el símbolo $\overset{\sqcap}{\cdot}$ para distinguirla de la transformada continua. A pesar de que la transformada (10.10) depende del parámetro h, no lo expresamos explícitamente en la notación para aligerarla.

Vemos que la imagen mediante la transformada discreta de Fourier de una sucesión de paso h es una función continua con soporte en el intervalo $[-\pi/h, \pi/h]$. Obviamente, a medida que $h \to 0$, este soporte converge a toda la recta real. Este hecho refleja una de las propiedades fundamentales de la transformada de Fourier, a medida que el carácter oscilante de la función en el espacio físico aumenta, su transformada de Fourier se amplifica para las altas frecuencias. La sucesión discreta de paso h puede verse como una función que oscila a escala h (basta para ello extender la sucesión discreta de valores a una función constante o lineal a trozos definida en toda la recta real). El soporte de su transformada de Fourier aumenta, consecuentemente.

La transformada de Fourier discreta puede invertirse con facilidad. Tenemos

$$f_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \overset{\sqcap}{f}(\xi) e^{i\xi hj} d\xi \tag{10.11}$$

La analogía entre las fórmulas (10.1) y (10.2) de la transformada continua de Fourier y (10.10)-(10.11) de la transforma discreta a escala h son evidentes. Mientras que (10.10) se asemeja a una suma de Riemann de la integral (10.1) que define la transformada continua de Fourier sobre la partición $x_j = jh$, $j \in \mathbb{Z}$, la transformada discreta inversa (10.11) es simplemente una versión truncada de la integral (10.2) que define la transformada inversa de Fourier.

Es fácil también comprobar que la transformada discreta define una isometría:

$$\| \vec{f} \|_h^2 = h \sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} | \overset{\sqcap}{f}(\xi) |^2 \, d\xi = \frac{1}{2\pi}\left|\left|\overset{\sqcap}{f}\right|\right|^2_{L^2(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})}. \tag{10.12}$$

Esto, evidentemente, no es más que la versión discreta de la identidad de Parseval para la transformada de Fourier

$$\left|\left|f\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} | \widehat{f}(\xi) |^2 \, d\xi = \frac{1}{2\pi}\left|\left|\widehat{f}\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{10.13}$$

La relación entre transformada continua y discreta se hace más clara aún si utilizamos la *función cardinal* (también denominada función *cardinal de Whittaker* of *función de Shannon*, por su papel relevante en teoría de la comunicación):

$$\psi_0(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x/h)}{\pi x/h}. \tag{10.14}$$

Denotamos mediante ψ_j su trasladada al punto $x_j = jh$, i.e.

$$\psi_j(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi(x - x_j)/h)}{\pi(x - x_j)/h}. \tag{10.15}$$

Dada una función discreta $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de paso h definimos entonces la función continua

$$f^*(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j \psi_j(x). \tag{10.16}$$

Es fácil comprobar que la función continua f^* interpola la sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. En efecto,

$$f^*(x_j) = f_j, \ \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{10.17}$$

Esto es simplemente debido a que

$$\psi_j(x_k) = \delta_{jk},\ \forall j,k \in \mathbb{Z}. \tag{10.18}$$

La función cardinal ψ_0 tiene además la interesante propiedad que[21]

$$\widehat{\psi}_0(\xi) = h 1_{(-\pi/h,\,\pi/h)}(\xi). \tag{10.19}$$

Su transformada de Fourier es por tanto, módulo un factor multiplicativo h, la función característica del intervalo $\Big(-\dfrac{\pi}{h}, \dfrac{\pi}{h}\Big)$.

Es fácil probar que, como ψ_j se obtiene de ψ_0 mediante una nueva traslación, entonces

$$\widehat{\psi}_j(\xi) = e^{-i\xi jh}\widehat{\psi}_0(\xi). \tag{10.20}$$

Por otra parte, utilizando la identidad de Plancherel obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_j(x)\psi_k(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_j(\xi)\overline{\widehat{\psi}_k}(\xi)d\xi = \frac{h^2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i\xi h(k-j)}d\xi = h\delta_{jk}. \tag{10.21}$$

Vemos por tanto que las funciones $\{\psi_j(x)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ son ortogonales. De esta propiedad de ortogonalidad deducimos fácilmente que

$$\Big|\Big|f^*\Big|\Big|^2_{L^2(\mathbb{R})} = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mid f_j \mid^2 . \tag{10.22}$$

Por tanto, la extensión continua f^* de sucesiones de paso h define en realidad una isometría de ℓ^2 en un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$.

Por otra parte, la transformada continua de Fourier de la función f^* está íntimamente ligada a la transformada discreta de la sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. En efecto,

$$\widehat{f^*}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j\widehat{\psi_j}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j e^{-i\xi jh}\widehat{\psi_0}(\xi) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j e^{-i\xi jh} 1_{(-\pi/h,\,\pi/h)} = \overset{\sqcap}{f}(\xi).$$

Vemos pues que *la transformada discreta de Fourier no es más que la transformada continua aplicada a la interpolación de la sucesión mediante la función cardinal.*

Estos resultados, probados por Whitakker en 1915 y utilizados en 1949 por Shannon, contribuyendo de manera decisiva a la teoría de la comunicación, indican que una función de *banda limitada* (cuya transformada de Fourier se anula fuera del intervalo $\xi \in [-B,\, B]$), puede ser reconstruida a través de la interpolación mediante la función cardinal a partir del muestreo de sus valores en los puntos $x_j = jh$, siempre que $h \leqslant \pi/B$. Retomaremos esta cuestión en la siguiente sección.

[21]Para comprobarlo observamos que $\partial_\xi 1_{[-A,A]} = \delta_A - \delta_{-A}$. Además $\mathcal{F}^{-1}(\partial_\xi 1_{[-A,A]}) = -i\xi\mathcal{F}^{-1}(1_{[-A,A]})$ y, por otra parte, $\mathcal{F}^{-1}(\delta_A - \delta_{-A}) = \frac{1}{2\pi}(e^{ixA} - e^{-ixA}) = \frac{i}{\pi}\,\mathrm{sen}(xA)$. De estas identidades deducimos (10.19) fácilmente, utilizando el hecho que la transformada de Fourier es un isomorfismo.

11 Revisión de la ecuación de transporte y sus aproximaciones a través de la transformada discreta de Fourier

Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0;\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

Sabemos que la solución es una onda de transporte pura

$$u(x,t) = f(x-t). \tag{11.2}$$

Esta expresión puede también obtenerse mediante la transformación de Fourier. En efecto, como veíamos en (10.5),

$$\widehat{u}_t + i\xi\widehat{u} = 0,\ \xi \in \mathbb{R},\ t > 0, \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}, \tag{11.3}$$

de donde deducimos que

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-i\xi t}\widehat{f}(\xi). \tag{11.4}$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-i\xi t}\widehat{f}(\xi)) = f(x-t). \tag{11.5}$$

En este último punto hemos usado el hecho de que la transformada de Fourier de la masa de Dirac es la constante unidad ($\widehat{\delta_0} \equiv 1$) o, equivalentemente, $\widehat{\delta_{x_0}} \equiv e^{-i\xi x_0}$.

Retomemos ahora el problema de la aproximación numérica de la solución.

Suponiendo que el dato inicial f es continuo, es natural tomar los datos discretos

$$f_j = f(x_j) = f(jh),\ j \in \mathbb{Z}, \tag{11.6}$$

lo cual supone realizar un muestreo de la función f.

Gracias a la fórmula de sumación de Poisson[22] es fácil comprobar que:

$$\overset{\sqcap}{f}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + k\omega_0),\ \forall -\pi/h \leqslant \xi \leqslant \pi/h, \tag{11.7}$$

[22] La fórmula de sumación de Poisson asegura que $\sum_{j\in\mathbf{Z}} f(j) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(2\pi k)$. Para comprobar esta fórmula basta considerar la función $g(x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} f(x+j)$, observar que es periódica de período uno y aplicar su desarrollo en series de Fourier. Los términos del sumando de la derecha son precisamente sus coeficientes de Fourier en la base $e^{i2\pi kx}$. Al aplicar este desarrollo en $x = 0$ obtenemos esta fórmula de sumación de Poisson. Al aplicar esta identidad a escala h a la función $f(x)e^{-i\xi x}$ obtenemos la identidad (11.7).

donde

$$\omega_0 = 2\pi/h. \tag{11.8}$$

Si el dato inicial f es de banda limitada o, más precisamente, si $\widehat{f}(\xi) = 0$ para todo ξ tal que $\mid \xi \mid > \pi/h$, tenemos entonces

$$\overset{\sqcap}{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \tag{11.9}$$

y por tanto el muestreo del dato inicial sobre los puntos del mallado no introduce error alguno.

Sin embargo, cuando f no es de banda limitada, en virtud de (11.7), las componentes de $\widehat{f}$ de altas frecuencias se superponen con las de la banda principal $[-\pi/h,\, \pi/h]$ dando lugar a lo que se conoce como fenómeno de *aliasing*. En este caso, la tranformada discreta de Fourier de la sucesión obtenida al muestrar f a lo largo de la sucesión $x_j = jh$ no permite recuperar la tranformada de Fourier de f y por tanto no permite codificar todas las características de la función f.

De este análisis deducimos que una función f es de banda limitada si y sólo si se obtiene como una función de la forma f^* a través de las funciones de Shannon a partir de su muestreo a lo largo de la sucesión $x_j = jh$.

En la práctica es por tanto recomendable aproximar en primer lugar la función $f(x)$ para una familia de funciones de banda limitada

$$f_h(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\widehat{f}(\xi) 1_{(-\pi/h,\, \pi/h)}(\xi)\Big) \tag{11.10}$$

que tienen la virtud de converger a f en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$ y de forma que su muestreo no introduzca ningún error.[23]

Pero, dejando de lado los errores introducidos por la aproximación de los datos iniciales, consideremos el generado por los esquemas numéricos. Consideramos por tanto el esquema semi-discreto regresivo y progresivo (8.10) y (8.11) que, como vimos, son convergentes y divergentes respectivamente.

Revisión del esquema semi-discreto regresivo.

Consideremos en primer lugar el esquema

$$u_j'(t) + \frac{u_j(t) - u_{j-1}(t)}{h} = 0,\ j \in \mathbb{Z},\ t > 0. \tag{11.11}$$

Aplicando la transformada discreta de Fourier a escala h obtenemos

$$\frac{d}{dt}\overset{\sqcap}{u}(\xi, t) + \frac{1}{h}(1 - e^{-i\xi h})\overset{\sqcap}{u}(\xi, t) = 0,\ t > 0,\ \xi \in [-\pi/h,\, \pi/h]. \tag{11.12}$$

[23]La prueba de la convergencia de f_h a f en $L^2(\mathbb{R})$ se realiza combinando el Teorema de la Convergencia Dominada con el hecho de que $\mathcal{F}$ sea una isometría en $L^2(\mathbb{R})$.

En este punto hemos utilizado la siguiente propiedad fundamental de la transformada discreta de Fourier:

$$(\tau_{-1}f)^{\sqcap}(\xi) = h\sum_{j\in\mathbb{Z}} f_{j-1}e^{-i\xi jh} = e^{-i\xi h}h\sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j e^{-i\xi jh} = e^{-i\xi h}\overset{\sqcap}{f}(\xi). \qquad (11.13)$$

La proximidad entre la ecuación de transporte continua (11.1) y la aproximación semi-discreta regresiva (11.11) es evidente. El coeficiente

$$\omega_h(\xi) = \frac{1}{h}(1 - e^{-i\xi h}) \qquad (11.14)$$

que interviene en la ecuación diferencial (11.12) converge, cuando $h \to 0$, de manera evidente, al coeficiente

$$\omega(\xi) = i\xi \qquad (11.15)$$

correspondiente a la ecuación de transporte continua.

De hecho, mediante el desarrollo de Taylor se observa que

$$\omega_h(\xi) = i\xi + \frac{\xi^2 h}{2} + \cdots . \qquad (11.16)$$

En la expresión (11.16) se observa que, efectivamente, para cada $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\omega_h(\xi) \to \omega(\xi) \text{ cuando } h \to 0. \qquad (11.17)$$

Además en (11.16) volvemos a constatar el carácter difusivo de la aproximación regresiva. En efecto, esto queda de manifiesto en que el primer término corrector en (11.16) $(\xi^2 h/2)$ sea real y positivo.

Conviene sin embargo observar que la convergencia (11.17) es sólamente uniforme en conjuntos R_h en los que

$$\max_{\omega\in R_h} \xi^2 h \to 0, \; h \to 0. \qquad (11.18)$$

En otras palabras, la convergencia de los *símbolos* (11.17) sólo se produce en regiones en las que

$$\mid \xi \mid = O(h^{-1/2}), \; h \to 0. \qquad (11.19)$$

Sin embargo, conviene señalar que la convergencia (11.17) interesa para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$. En efecto, en el límite cuando $h \to 0$, la banda de frecuencias del dato inicial continuo $f = f(x)$ de la ecuación de transporte es toda la recta real. Por otra parte, a medida que $h \to 0$, la banda de frecuencias de los datos iniciales del problema discreto $[-\pi/h, \pi/h]$ aumenta hasta cubrir toda la recta real.

En virtud de que la convergencia (11.17) es uniforme en conjuntos de la forma (11.19) es fácil ver que las soluciones del problema discreto convergen a las del continuo para datos con una banda de frecuencias limitada, independiente de h. La estabilidad del esquema permite después extender esta convergencia a un dato inicial cualquiera $f \in L^2(\mathbb{R})$.

En efecto, en virtud de (11.12) tenemos

$$\overset{\sqcap}{u}(\xi,t) = e^{-\omega_h(\xi)t}\overset{\sqcap}{f}(\xi) = e^{-\frac{1}{h}(1-e^{-i\xi h})t}\overset{\sqcap}{f}(\xi) = e^{-\frac{1}{h}(1-\cos(\xi h))t}e^{-i\,\mathrm{sen}(\xi h)t/h}\overset{\sqcap}{f}(\xi).$$

Aplicando la anti-transformada discreta de Fourier tenemos

$$u_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-\frac{1}{h}(1-\cos(\xi h))t}e^{i\xi(jh-\mathrm{sen}(\xi h)t/\xi h)}\overset{\sqcap}{f}(\xi)d\xi. \tag{11.20}$$

En virtud de (11.9) sabemos que, si f es de banda acotada, $\overset{\sqcap}{f} \equiv \widehat{f}$, para h suficientemente pequeño. Bajo estas hipótesis es por tanto evidente que la solución del problema numérico puede reescribirse como

$$u_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{-\frac{1}{h}(1-\cos(\xi h)t)}e^{i\xi t(jh-\mathrm{sen}(\xi h)/\xi h)t}\widehat{f}(\xi)d\xi, \tag{11.21}$$

donde $B > 0$ es tal que $\mathrm{sop}(\widehat{f}) \subset [-B, B]$.

Elegimos ahora $j \in \mathbb{Z}$ de modo que $jh = x_0$, siendo $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto fijado. Evidentemente, esto supone elegir $j = x_0/h$ que, para que $j \in \mathbb{Z}$, exige a su vez tomar una sucesión determinada de $h \to 0$. Bajo esta condición ($x_0 = jh$), deberíamos ser capaces de ver que la expresión (11.21) converge, cuando $h \to 0$, al valor de la solución continua $u(x_0,t) = f(x_0 - t)$. Veámos que esto es efectivamente así. Cuando $h \to 0$, el integrando de (11.21) converge a $e^{i\xi(x_0-t)}\widehat{f}(\xi)$. La aplicación del Teorema de la convergencia dominada permite entonces ver que el límite de (11.21) es

$$u(x_0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{i\xi(x_0-t)}\widehat{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{i\xi x_0}e^{-i\xi t}\widehat{f}(\xi)d\xi = f(x_0-t), \tag{11.22}$$

que coincide con la solución del problema continuo, gracias a la hipótesis de que f sea de banda limitada.

En realidad, bajo estas hipótesis, se puede probar que la convergencia de la solución discreta a la continua tiene lugar en la norma L^2. Se puede ver esto de dos maneras. Tomando normas discretas de diferencias en ℓ^2 o bien tomando normas continuas en $L^2(\mathbb{R})$ observando que la expresión (11.21) de la solución del esquema numérico puede extenderse a una función continua con respecto a la variable espacial x, dependiente del parámetro h:

$$u_h(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{-\frac{1}{h}(1-\cos(\xi h))t}e^{i\xi(x-\mathrm{sen}(\xi h)t/\xi h)}\widehat{f}(\xi)d\xi. \tag{11.23}$$

Combinando (11.22) y (11.23) vemos que, tanto la solución continua como la discreta pueden ser escritas de un modo semejante mediante la transformada inversa de Fourier

$$u_h(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{t}{h}(1-\cos(\xi h))}e^{-i\,\mathrm{sen}(\xi h)t/h}\widehat{f}\Big](x) \tag{11.24}$$

y

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-i\xi t}\widehat{f}\Big](x). \tag{11.25}$$

Para comprobar que $u_h(t) \to u(t)$ en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$ basta entonces ver que

$$e^{-\frac{t}{h}(1-\cos(\xi h))}e^{i\,\mathrm{sen}(\xi h)t/h}\widehat{f}(\xi) \to e^{-i\xi t}\widehat{f}(\xi) \text{ en } L^2(\mathbb{R})$$

cuando $h \to 0$. Teniendo en cuenta que f es, por hipótesis, de banda acotada, vemos que esto es equivalente a que

$$\int_{-B}^{B} \Big|e^{-\frac{t}{h}(1-\cos(\xi h))}e^{-i\,\mathrm{sen}(\xi h)t/h} - e^{-i\xi t}\Big|^2 \mid \widehat{f}(\xi) \mid^2 d\xi \to 0$$

y esto, efectivamente, ocurre en virtud del Teorema de la convergencia dominada.

Esto confirma la convergencia del esquema regresivo para datos iniciales con banda acotada. Para considerar el caso general, dado $f \in L^2(\mathbb{R})$ basta introducir su aproximación

$$f_B(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\widehat{f}(\xi)1_{(-B,B)}(\xi)\Big)$$

que es, por definición, una función de banda acotada tal que

$$f_B \to f \text{ en } L^2(\mathbb{R}) \text{ cuando } B \to \infty.$$

Denotamos mediante u y u_B la solución de la ecuación de transporte con datos f y f_B respectivamente. Como

$$\| u(t) - u_B(t) \|_{L^2(\mathbb{R})} = \| f - f_B \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

vemos que

$$u_B \to u \text{ en } L^\infty(0,\infty;\, L^2(\mathbb{R})),\ B \to \infty.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $B_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\| u - u_{B_0} \|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{R}))} \leqslant \varepsilon/2.$$

Fijado este valor de B_0 y resolviendo la ecuación semi-discreta con dato inicial f_{B_0} muestreado sobre el mallado tenemos que

$$u_{h,B_0}(t) \to u_{B_0}(t),\ h \to 0, \text{ en } L^2(\mathbb{R})$$

para cada $t > 0$. Por tanto, para h suficientemente pequeño

$$\| u(t) - u_{h,B_0}(t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \| u(t) - u_{B_0}(t) \|_{L^2(\mathbb{R})} + \| u_{B_0}(t) - u_{h,B_0}(t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Esto demuestra la convergencia para datos iniciales obtenidos muestreando una aproximación del dato inicial de banda acotada. Evidentemente, gracias a la estabilidad del esquema numérico, se puede obtener el mismo resultado de convergencia para cualquier elección de la aproximación de los datos iniciales que converja al dato inicial del problema continuo.

Revisión del esquema semi-discreto progresivo.

Consideramos ahora el caso progresivo que, como vimos, es inestable y divergente. Analicémoslo pues con la herramienta que las transformadas de Fourier proporcionan.

En este caso el esquema es de la forma

$$u_j'(t) + \frac{u_{j+1} - u_j(t)}{h} = 0,\ j \in \mathbb{Z},\ t > 0. \tag{11.26}$$

Aplicando la transformada discreta de Fourier obtenemos

$$\frac{d}{dt}\overset{\sqcap}{u}(\xi,t) + \frac{1}{h}(e^{i\xi h} - 1)\overset{\sqcap}{u}(\xi,t) = 0,\ t > 0,\ \xi \in [-\pi/h,\ \pi/h], \tag{11.27}$$

de modo que

$$\overset{\sqcap}{u}(\xi,t) = e^{-\frac{1}{h}(e^{i\xi h}-1)t}\overset{\sqcap}{f}(\xi) = e^{\frac{1}{h}(1-\cos(\xi h))t}e^{-i\,\mathrm{sen}(\xi h)t/h}\overset{\sqcap}{f}(\xi). \tag{11.28}$$

Pretendemos ahora ilustrar de manera aún más explícita la ausencia de convergencia de este método. Para ello tomamos un dato inicial f de banda acotada de modo que $\overset{\sqcap}{f} \equiv \widehat{f}$ para h suficientemente pequeño.

Obtenemos así

$$\overset{\sqcap}{u}(\xi,t) = e^{\frac{1}{h}(1-\cos(\xi h))t}e^{-i\,\mathrm{sen}(\xi h)t/h}\widehat{f}(\xi), \tag{11.29}$$

de modo que

$$| \overset{\sqcap}{u}(\xi,t) | = e^{\frac{1}{h}(1-\cos(\xi h))t} \mid \widehat{f}(\xi) \mid, \tag{11.30}$$

y entonces

$$\| \vec{u}_h \|_h^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{\frac{2}{h}(1-\cos(\xi h))t} \mid \widehat{f}(\xi) \mid^2 d\xi. \tag{11.31}$$

Habida cuenta que $\xi \in [-B,\ B]$, tenemos que

$$1 - \cos(\xi h) \geqslant c\xi^2 h^2 \tag{11.32}$$

con $c > 0$ para todo $\xi \in [-B\ B]$, a condición que h sea suficientemente pequeño.

Combinando (11.31) y (11.32) vemos que

$$\| \vec{u}_h(t) \|_h^2 \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{ch\xi^2 t} \mid \widehat{f}(\xi) \mid^2 d\xi. \tag{11.33}$$

Pero esta estimación es claramente insuficiente para concluir la divergencia del método puesto que la integral a la derecha de (11.33) permanece acotada cuando $h \to 0$.

Para ilustrar la divergencia hemos considerar datos iniciales de banda más ancha. Dado $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que el soporte de su transformada de Fourier sea toda la recta real (por ejemplo la Gaussiana[24]), introducimos el dato inicial del esquema discreto $f_h(x)$ truncando la transformada de Fourier de f a la banda admisible $[-\pi/h,\, \pi/h]$, i.e.

$$f_h(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} 1_{(-\pi/h,\, \pi/h)}(\xi)). \tag{11.34}$$

En este caso la norma de la aproximación discreta viene dada por

$$\| \vec{u}_h(t) \|_h^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{\frac{2}{h}(1-\cos(\xi h))t} \mid \widehat{f}(\xi) \mid^2 d\xi. \tag{11.35}$$

Utilizando ahora el hecho que

$$1 - \cos(\eta) \geqslant c\eta^2, \quad \forall \eta \in [-\pi,\, \pi], \tag{11.36}$$

vemos que

$$\| \vec{u}_h(t) \|_h^2 \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ch\xi^2 t} \mid \widehat{f}(\xi) \mid^2 d\xi. \tag{11.37}$$

En esta ocasión la integral a la derecha de (11.37) puede diverger puesto que en la banda $\xi \in [-\pi/h,\, \pi/h]$ hay zonas donde $h\xi^2 \to \infty$. Para comprobar la divergencia de esta integral con más detalle consideremos el dato inicial f de modo que

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k 1_{I_k}(\xi) \tag{11.38}$$

donde $(I_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}$. Para que $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) \in L^2(\mathbb{R})$ basta entonces con que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^2 \mid I_k \mid < \infty, \tag{11.39}$$

donde $\mid I_k \mid$ denota la longitud del intervalo I_k.

En este caso la integral a la derecha (11.37) puede reescribirse como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ch\xi^2 t} \mid \widehat{f}(\xi) \mid^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^2 \int_{I_k \cap [-\pi/h,\, \pi/h]} e^{ch\xi^2 t} d\xi. \tag{11.40}$$

Si elegimos los intervalos $I_k = (k,\, k+1)$ observamos que el último sumatorio puede acotarse inferiormente por

$$\frac{1}{2\pi} \alpha_{k_0}^2 e^{ch(\frac{\pi}{h}-1)^2 t} \tag{11.41}$$

[24] Es bien sabido que la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-x^2/2}$ es la Gaussiana $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$.

con $k_0 = \frac{\pi}{h} - 1$.

En este caso, además, la condición (11.39) puede simplemente reescribirse como

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^2 < \infty. \tag{11.42}$$

Es evidente que es perfectamente posible elegir una sucesión α_k de la forma $\alpha_k = 1/k$, de modo que (11.42) se cumpla y que, sin embargo, la cota inferior (11.41) de la norma ℓ^2 de la solución discreta correspondiente diverja cuando $h \to 0$ con un orden $e^{ct/h}$.

Vemos por tanto que la utilización de la transformada de Fourier a escala h permite ilustrar de manera mucho más cuantitativa la divergencia del método semi-discreto progresivo que habíamos predicho mediante el análisis de von Neumann. En el caso en que el esquema es convergente puede también aplicarse para ilustrar de un modo más claro la convergencia hacia la solución del problema continuo.

A pesar de que en esta sección sólo hemos analizado las aproximaciones semi-discretas progresiva y regresiva las ideas que hemos desarrollado son completamente generales y pueden ser aplicadas al estudio de cualquier otro esquema, en particular para los completamente discretos.

Revisión del comportamiento de las velocidades de fase y grupo.

Ahora que sabemos que el rango de frecuencias relevantes para una aproximación numérica es $-\pi/h \leq \xi \leq \pi/h$, conviene revisar los conceptos de velocidades de fase y grupo. Consideremos en primer lugar el esquema centrado semi-discreto. En este caso la velocidad de fase viene dada por

$$c_h(\xi) = \frac{\mathrm{sen}(\xi h)}{\xi h}. \tag{11.43}$$

Vemos entonces que la velocidad de fase se anula cuando $\xi h = \pm\pi$. Se trata evidentemente de un fenómeno nuevo con respecto a la ecuación de transporte continua donde todas las componentes de Fourier de las soluciones se transportan a velocidad constante uno. En virtud de este hecho, para cada $h > 0$ fijo, existen soluciones del problema numérico que apenas se tranportan. Esto no es incompatible con la convergencia de orden dos del esquema numérico centrado que ya comprobamos. En efecto, en el problema clásico de la convergencia, el dato inicial se supone fijo, lo cual, en la práctica, gracias a la propiedad de estabilidad del esquema, permite filtrar las altas frecuencias del dato inicial y considerar únicamente datos cuya transformada de Fourier tiene soporte compacto. El hecho de que la velocidad de propagación se anule cuando $|\xi| \sim \pi/h$, no tiene entonces efectos a nivel de la convergencia. Pero, insistimos, si lo que nos interesa es la dinámica de las soluciones para h pequeño pero fijo, este hecho tiene un gran impacto puesto que surgen soluciones que nada tienen que ver con el comportamiento de la ecuación de transporte continua. Se trata del mismo fenómeno que surge al estudiar la estabilidad absoluta de los sistemas stiff de ecuaciones diferenciales ordinarias (véase por ejemplo [11]). En el caso del sistema centrado este hecho especialmente grave puesto que el esquema es puramente conservativo y por tanto estas soluciones a altas frecuencias en absoluto se disipan. Diremos que se trata de *soluciones espúreas*, en el sentido que son ficticias puesto que no corresponden a la ecuación de transporte continua y sólo surgen como soluciones del esquema numérico. Por otra parte, la velocidad de grupo en este caso toma el valor

$$C_h(\xi) = \cos(\xi h). \tag{11.44}$$

Vemos que la situación es aún peor puesto que se anula cuando $\xi h = \pi/2$ y tiene signo negativo para todo $\xi h \in (\pi/2, \pi]$. En este caso por tanto tendremos incluso soluciones que se transportan en la dirección opuesta a la de la ecuación de transporte continua. Se trata de un fenómeno de soluciones numéricas espúreas que no es incompatible con la convergencia del esquema numérico.

Consideremos ahora el esquema numérico regresivo que, como vimos, tiene un carácter disipativo. En este caso la velocidad de fase viene dada por:

$$c_h(\xi) = \frac{i(e^{-i\xi h} - 1)}{\xi h} = \frac{\operatorname{sen}(\xi h)}{\xi h} + i\frac{\cos(\xi h) - 1}{\xi h}. \tag{11.45}$$

Vemos que la parte real de la velocidad de fase se comporta como en el caso de la aproximación centrada de modo que ésta se anula cuando $\xi h = \pm\pi$. Sin embargo, vemos también que para estos valores de frecuencias la parte imaginaria de la velocidad de grupo es estrictamente negativa, lo cual asegura que estas componentes de Fourier de la solución decaen exponencialmente en tiempo. Vemos pues que la aproximación regresiva, a pesar de introducir soluciones numéricas espúreas, las disipa. Es a causa de este hecho que la soluciones del esquema regresivo para $h > 0$ pequeño y fijo se comportan de manera mucho más semejante a las de la ecuación de transporte continua que las del esquema centrado. Lo mismo ocurre con la velocidad de grupo.

De este análisis concluimos que más allá de las propiedades de convergencia clásicas de un esquema numérico, con el objeto de garantizar que para $h > 0$ pequeño la dinámica del esquema discreto se asemeja a la del continuo es preciso tener en cuenta el comportamiento de las velocidades de fase y de grupo en frecuencias $|\xi|$ del orden de c/h con $0 < c < \pi$.

12 La ecuación de ondas con coeficientes variables

En esta sección analizamos brevemente la ecuación de ondas $1 - d$ con coeficientes variables

$$u_{tt} - (\gamma(x)u_x)_x = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{12.1}$$

Consideramos en primer lugar el problema de Cauchy en el que ya tendremos que hacer frente a las principales diferencias con respecto al caso de coeficientes constantes.

Desde el punto de vista de la modelización, el hecho que la constante $\gamma = \gamma(x)$ (de rigidez en el caso de un medio elástico) dependa de x indica que las ondas se propagan en un medio heterogéneo compuesto de diferentes materiales.

En el caso en que la densidad del medio también es variable, la ecuación de ondas correspondiente es

$$\rho(x)u_{tt} - (\gamma(x)u_x)_x = 0,\; x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{12.2}$$

En estas condiciones ambos sistemas están bien puestos en $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ y la energía de las soluciones se conserva. Las energías de los sistemas (12.1) y (12.2) es

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} [\mid u_t(x,t) \mid^2 + \gamma(x) \mid u_x(x,t) \mid^2] dx, \tag{12.3}$$

y

$$E_\rho(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} [\rho(x) \mid u_t(x,t) \mid^2 + \gamma(x) \mid u_x(x,t) \mid^2] dx, \tag{12.4}$$

respectivamente.

En virtud de las hipótesis (**??**) estas energías son equivalentes a la energía habitual de la ecuación de ondas.

Consideremos ahora la ecuación (12.1) y veamos cual es la aproximación semi-dicreta más natural. Proponemos el siguiente esquema

$$u_j'' - \frac{1}{h}\Big[\gamma_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h} - \gamma_{j-1/2}\frac{u_j - u_{j-1}}{h}\Big] = 0,\; j \in \mathbb{Z},\; t > 0. \tag{12.5}$$

En (12.5) el coeficiente γ se evalúa en puntos intermedios del mallado. Así, por ejemplo,

$$\gamma_{j+1/2} = \gamma(x_{j+1/2}),\; x_{j+1/2} = x_j + \frac{h}{2} = \Big(j + \frac{1}{2}\Big)h. \tag{12.6}$$

Obviamente, la definición (12.6) de $\gamma_{j+1/2}$ es válida cuando γ es continuo. Si no lo fuese, como es habitual, lo más natural sería definir $\gamma_{j+1/2}$ a través de una media:

$$\gamma_{j+1/2} = \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \gamma(s) ds \tag{12.7}$$

Cuando el coeficiente γ es constante (i.e. $\gamma(x) \equiv \gamma$), el esquema (12.5) coincide con el esquema semi-discreto centrado de orden dos para la aproximación de la ecuación de ondas:

$$u_j'' + \frac{\gamma}{h^2}[2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}] = 0,\; j \in \mathbb{Z},\; t > 0. \tag{12.8}$$

El sistema (12.5) es conservativo. En efecto, multiplicando en (12.5) por u_j' y sumando en $j \in \mathbb{Z}$ obtenemos que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j'' u_j' - \frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big[\gamma_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h} - \gamma_{j-1/2}\frac{u_j-u_{j-1}}{h}\Big] u_j' = 0.$$

Por otra parte

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j'' u_j' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mid u_j' \mid^2$$

y

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big[\gamma_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h}-\gamma_{j-1/2}\frac{u_j-u_{j-1}}{h}\Big]u_j'\\
&=-\frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h}u_j'+\frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_{j-1/2}\frac{u_j-u_{j-1}}{h}u_j'\\
&=-\frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h}u_j'+\frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h}u_{j+1}'\\
&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h}\frac{u_{j+1}'-u_j'}{h}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_{j+1/2}\Big|\frac{u_{j+1}-u_j}{h}\Big|^2.
\end{aligned}$$

Deducimos por tanto que la siguiente energía discreta se conserva para las soluciones de (12.5):

$$E_h(t)=\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big[\mid u_j'\mid^2+\gamma_{j+1/2}\Big|\frac{u_{j+1}-u_j}{h}\Big|^2\Big]. \tag{12.9}$$

Es obvio que E_h es una aproximación discreta de la energía (12.3) del problema continuo (12.1).

El hecho que la energía E_h se conserva garantiza la estabilidad del esquema numérico. Se trata por otra parte de un esquema consistente de orden dos, al menos cuando γ es suficientemente regular. En la medida en que el esquema que consideraremos es semi-discreto y que la variable temporal no ha sido discretizada, basta analizar la consistencia de la discretización espacial. Tenemos

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{h}\Big[\gamma(x_{j+1/2})\frac{u(x_{j+1})-u(x_j)}{h}-\gamma(x_{j-1/2})\frac{u(x_j)-u(x_{j-1})}{h}\Big]\\
=\;&-\frac{1}{h}\Big[\gamma(x_j)\frac{u(x_{j+1})-u(x_j)}{h}-\gamma(x_j)\frac{u(x_j)-u(x_{j-1})}{h}\Big]\\
&-\frac{1}{h}\Big[\frac{h}{2}\gamma'(x_j)\frac{u(x_{j+1})-u(x_j)}{h}+\frac{h}{2}\gamma'(x_j)\frac{u(x_j)-u(x_{j-1})}{h}\Big]\\
&-\frac{1}{h}\Big[\frac{h^2}{8}\gamma''(x_j)\frac{u(x_{j+1})-u(x_j)}{h}-\frac{h^2}{8}\gamma''(x_j)\frac{u(x_j)-u(x_{j-1})}{h}\Big]\\
&+O(h^2)\Big[\Big|\frac{u(x_{j+1})-u(x_j)}{h}\Big|+\Big|\frac{u(x_j)-u(x_{j-1})}{h}\Big|\Big]
\end{aligned}$$

La estabilidad, junto a su consistencia de orden dos garantiza que se trata de un método convergente de orden dos, cuando γ es suficientemente regular.

En el caso de la ecuación (12.2) con densidad variable es fácil modificar el esquema (12.5). Basta en este caso considerar

$$\rho(x_j)u'' - \frac{1}{h}\Big[\gamma_{j+1/2}\frac{u_{j+1}-u_j}{h} - \gamma_{j-1/2}\frac{u_j-u_{j-1}}{h}\Big] = 0, \quad j \in \mathbb{Z},\, t>0. \tag{12.10}$$

Analicemos ahora uno de los aspectos más importantes en los que las ecuaciones de ondas con coeficientes irregulares más se distinguen de los de coeficientes regulares: *la reflexión y transmisión de energía en las singularidades de los coeficientes*.

Ya hemos visto en el caso de la ecuación con coeficientes constantes, a través de la fórmula de d'Alembert, que las soluciones de la ecuación de ondas son una mera superposición de ondas de transporte que viajan a izquierda y derecha en el espacio a velocidad constante unidad. Esto no ocurre en el caso de ecuaciones con coeficientes variables. Si estos son regulares, las soluciones se propagan a lo largo de curvas características que no son rectilíneas, mientras que en el caso de coeficientes irregulares las ondas pueden incluso llegar a rebotar parcialmente en los puntos de discontinuidad de los coeficientes.

Por ejemplo, si $\gamma = \gamma(x)$ es una función de clase C^1, una ecuación de ondas de la forma

$$\partial_t^2 u - \gamma(x)\partial_x^2 u - \frac{\gamma'(x)}{2}\partial_x = 0, \tag{12.11}$$

puede factorizarse como

$$\Big(\partial_t + \sqrt{\gamma(x)}\partial_x\Big)\Big(\partial_t - \sqrt{\gamma(x)}\partial_x\Big)u = 0. \tag{12.12}$$

Las soluciones pueden entonces escribirse como superposición de las soluciones de ecuaciones de transporte de la forma

$$\Big[\partial_t \pm \sqrt{\gamma(x)}\partial_x\Big]u = 0. \tag{12.13}$$

Para estas últimas, las soluciones son constantes a lo largo de curvas características que son las curvas parametrizadas $x = x(t)$ en las que

$$x'(t) = \pm\sqrt{\gamma(x(t))}. \tag{12.14}$$

Las curvas características están definidas de manera única cuando el coeficiente $\gamma^{1/2}$ tiene continuidad Lipschitz.

Pero cuando el coeficiente $\gamma^{1/2} = \gamma^{1/2}(x)$ deja de ser regular, tanto la definición de características como el hecho de que transporten la información de las soluciones deja de ser válida. Para analizar este hecho consideramos el caso de una ecuación de ondas con coeficientes constantes a trozos en un medio heterogéneo con dos caras:

$$\rho(x)u_{tt} - (\gamma(x)u_x)_x = 0. \tag{12.15}$$

Suponemos entonces que

$$(\rho(x),\, \gamma(x)) = \begin{cases} (\rho_1,\, \gamma_1),\, x < 0 \\ (\rho_2,\, \gamma_2),\, x > 0. \end{cases} \tag{12.16}$$

La velocidad de propagación de las ondas es entonces $c_1 = \sqrt{\gamma_1/\rho_1}$ y $c_2 = \sqrt{\gamma_2/\rho_2}$ en el medio $x > 0$ y $x < 0$ respectivamente.

En este caso es fácil comprobar que, si bien en cada uno de los medios $x > 0$ y $x < 0$ las ondas se transportan sin deformación a velocidad constante c_2 y c_1 respectivamente, al alcanzar la interfase $x = 0$ parte de la onda se transmite mientras que la otra parte rebota. Este fenómeno puede establecerse con claridad a través del estudio de los *coeficientes de reflexión y transmisión*: R y T.

Para introducirlos, consideremos una onda plana que en el medio $x < 0$ se desplaza hacia la derecha a velocidad constante c_1 hasta alcanzar la interfase $x = 0$. Al alcanzarla, parte de la solución rebota produciendo una onda de transporte que en el medio $x < 0$ se propagará en sentido opuesto, siempre a velocidad c_1 y otra parte se transmite al medio $x > 0$ dando lugar a una onda que se transporta hacia la derecha a velocidad c_2.

El conjunto de esta solución que combina los fenómenos descritos puede escribirse en la forma

$$u(x,t) = 1_{(-\infty,0)}(x)\Big[e^{i(\omega t - k_1 x)} + \mathrm{R}e^{\,i(\omega t + k_1 x)}\Big] + T 1_{(0,\infty)}(x) e^{i(\omega t - k_2 x)}, \tag{12.17}$$

donde $1_{(-\infty,0)}$ y $1_{(0,\infty)}$ denotan respectivamente las funciones características de las semirectas $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ y k_1 y k_2 denotan las relaciones de dispersión en cada uno de los medios

$$k_1 = \omega/c_1;\; k_2 = \omega/c_2. \tag{12.18}$$

En (12.17), R y T denotan las constantes de reflexión y transmisión que precisamente deseamos calcular.

Es fácil comprobar que u en (12.17) constituye una solución de (12.15) tanto en el semiplano de la izquierda $x < 0$ como en el de la derecha $x > 0$.

Sin embargo el que la función u definida a trozos en (12.17) satisfaga (12.15) depende también de las condiciones de transmisión que se han de cumplir en el punto de interfase. En este caso son:

$$u^+(0,t) = u^-(0,t);\; \gamma_2 u_x^+(0,t) = \gamma_1 u_x^-(0,t), \quad t > 0. \tag{12.19}$$

Para que las condiciones (12.19) se verifiquen es preciso que:

$$1 + R = T, \quad k_1\gamma_1 R + k_2\gamma_2 T = k_1\gamma_1. \tag{12.20}$$

La solución de este sistema arroja los siguientes valores para los coeficientes R y T:

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \tag{12.21}$$

$$T = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \tag{12.22}$$

donde

$$\sigma_j = \sqrt{\gamma_j \rho_j},\ j = 1, 2 \tag{12.23}$$

es la *impedancia acústica* en cada uno de los medios.

De estas expresiones se deduce que si la impedancia acústica de ambos medios es la misma (i.e. $\sigma_1 = \sigma_2$), entonces toda la onda se transmite mientras que la parte de la onda reflejada se anula.

Veamos ahora lo que ocurre en una aproximación numérica de estas ecuaciones. Consideremos para ello una semi-discretización en diferencias finitas de paso h en cada uno de los medios. En el medio $x < 0$ la semi-discretización adopta la forma

$$\rho_1 u_j'' + \gamma_1 \frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} = 0,\ j \leqslant -1,\ t > 0 \tag{12.24}$$

mientras que en el medio $x > 0$ la aproximación correspondiente es

$$\rho_2 u_j'' + \gamma_2 \frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} = 0,\ j \geqslant 1,\ t > 0. \tag{12.25}$$

En el nodo $j = 0$ correspondiente a la interfase $x = 0$ la aproximación correspondiente más natural es

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} u_0'' + \frac{1}{h}\Big(\gamma_1 \frac{u_0 - u_{-1}}{h} - \gamma_2 \frac{u_1 - u_0}{h}\Big) = 0,\ t > 0. \tag{12.26}$$

Las relaciones de dispersión asociadas a los esquemas (12.24) y (12.25) son, en cada uno de los casos,

$$k_{1,h} = \frac{2}{h} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\omega h}{2c_1}\right),\ x < 0 \tag{12.27}$$

$$k_{2,h} = \frac{2}{h} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\omega h}{2c_2}\right),\ x > 0. \tag{12.28}$$

Escribimos entonces la solución numérica, inspirándonos en el caso continuo, del modo siguiente

$$u_j(t) \begin{cases} e^{(\omega t - jk_1 h)} + R_h e^{i(\omega t + jk_1 h)},\ j \leqslant 0 \\ T_h e^{i(\omega t - jk_2 h)},\ j \geqslant 0. \end{cases} \tag{12.29}$$

Tenemos nuevamente

$$1 + R_h = T_h. \tag{12.30}$$

La ecuación (12.26) en el punto $x = 0$ de transmisión proporciona la relación adicional

$$-(\rho_1 + \rho_2)\frac{T_h \omega^2}{2} + \frac{1}{h}\Big(\frac{\gamma_1}{h}\Big(1 + R_h - e^{ik_1 h} - R_h e^{-ik_1 h}\Big) - \frac{\gamma_2}{h} T_h \Big(e^{-ik_2 h} - 1\Big)\Big) = 0. \tag{12.31}$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$T_h = \frac{-2i\gamma_1 \operatorname{sen}(k_1 h)}{\gamma_2 e^{-ik_2 h} - \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_1 e^{-ik_1 h} + (\rho_1 + \rho_2)\frac{\omega^2 h^2}{2}}. \tag{12.32}$$

Mediante un desarrollo de Taylor observamos que

$$T_h = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} + \frac{\gamma_1 \rho_2 - \gamma_2 \rho_1}{4c_1 c_2(\sigma_1 + \sigma_2)}\omega^2 h^2 + O(h^3) \tag{12.33}$$

de donde se deduce que el coeficiente de transmisión del método numérico es una aproximación de orden dos del caso continuo (12.22).

Conviene sin embargo señalar que no siempre los esquemas numéricos proporcionan aproximaciones de los coeficientes de reflexión y transmisión del mismo orden que el que caracteriza al método numérico.

Hemos estudiado ecuaciones de ondas con coeficientes variables dependientes de la variable espacial. Los mismos problemas se plantean con ecuaciones cuyos coeficientes dependen también de la variable tiempo. Consideremos por ejemplo la siguiente ecuación de ondas con densidad variable dependiente de x y t:

$$\rho(x,t)u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{12.34}$$

Es natural suponer que la densidad es una función medible, acotada superior e inferiormente por constantes positivas ρ_0 y ρ_1:

$$0 < \rho_0 \leqslant \rho(x,t) \leqslant \rho_1 < \infty,\ p.c.t.\, x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{12.35}$$

Cabe entonces plantearse si la ecuación (12.34) está bien planteada bajo estas hipótesis. Para entender esta cuestión es conveniente considerar la energía de las soluciones

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \Big[\rho(x,t) \mid u_t(x,t) \mid^2 + \mid u_x(x,t) \mid^2 \Big] dx. \tag{12.36}$$

Sin embargo, la energía verifica, formalmente, la identidad

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \rho_t(x,t) \mid u_t(x,t) \mid^2 dx. \tag{12.37}$$

En virtud de (12.37) es fácil comprobar que la ecuación de ondas (12.34) no está bien puesta en el espacio de la energía bajo la mera hipótesis (12.35). En efecto para que la ecuación esté bien puesta es necesaria alguna hipótesis sobre $\rho_t = \partial\rho/\partial_t$. Supongamos por ejemplo que

$$\mid \rho_t(x,t) \mid \leqslant k,\ \forall x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{12.38}$$

En este caso, de la identidad de energía (12.37) se deduce que

$$\mid E'(t) \mid \leqslant \frac{k}{2\rho_0}\int_{\mathbb{R}} \rho(x,t) \mid u_t(x,t) \mid^2 dx \leqslant \frac{k}{\rho_0}E(t), \tag{12.39}$$

de donde, por la desigualdad de Gronwall, se obtiene que

$$E(t) \leqslant e^{kt/\rho_0} E(0),\ \forall t \geqslant 0. \tag{12.40}$$

Bajo las hipótesis (12.35) y (12.38) sobre el coeficiente variable de densidad $\rho = \rho(x,t)$ se puede entonces probar que la ecuación (12.34) está bien puesta en $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ de modo que para cada par de datos iniciales $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ existe una única solución $u \in C([0,\infty);\, H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0,\infty);\, L^2(\mathbb{R}))$ que toma este dato inicial y cuya energía $E(t)$ satisface la estimación (12.40).

La hipótesis (12.38) no es meramente técnica. En efecto, de manera general, la ecuación (12.34) no está bien puesta bajo la mera hipótesis (12.35). En el caso en que la densidad es en cada instante de tiempo independiente de x y depende del tiempo de modo que sea constante a trozos, la solución de la ecuación de ondas correspondiente puede calcularse explícitamente mediante la fórmula de d'Alembert, prestando especial atención al cambio de los perfiles de la solución en los instantes de tiempo en los que la densidad presenta la discontinuidad. En efecto, consideremos el caso particular en que

$$\rho = \begin{cases} \rho_1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in \mathbb{R} \\ \rho_2,\ t > 1,\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{12.41}$$

siendo ρ_1 y ρ_2 dos constantes positivas distintas.

En el intervalo temporal $0 \leqslant t \leqslant 1$ en el que la densidad es la constante ρ_1 la solución de la ecuación de ondas es de la forma

$$u = f\Big(x - t/\sqrt{\rho_1}\Big) + g\Big(x + t/\sqrt{\rho_1}\Big). \tag{12.42}$$

A partir de ese instante, i.e. para $t > 1$, la solución es sin embargo de la forma

$$u = \widetilde{f}\Big(x - t/\sqrt{\rho_2}\Big) + \widetilde{g}\Big(x + t/\sqrt{\rho_2}\Big). \tag{12.43}$$

Al imponer la condición de continuidad sobre u y u_t en $t = 1$ obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} f\Big(x - 1/\sqrt{\rho_1}\Big) + g\Big(x + 1/\sqrt{\rho_1}\Big) = \widetilde{f}\Big(x - 1/\sqrt{\rho_2}\Big) + \widetilde{g}\Big(x + 1/\sqrt{\rho_2}\Big) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\rho_1}}\Big[f'\Big(x - 1/\sqrt{\rho_1}\Big) - g'\Big(x + 1/\sqrt{\rho_1}\Big)\Big] = -\dfrac{1}{\sqrt{\rho_2}}\Big[\widetilde{f}'\Big(x - 1/\sqrt{\rho_2}\Big) - \widetilde{g}'\Big(x + 1/\sqrt{\rho_2}\Big)\Big] \end{cases} \tag{12.44}$$

que permiten calcular los perfiles $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ del intervalo temporal $t > 1$ a partir de los perfiles f y g del intervalo $0 < t < 1$.

Es sin embargo obvio que este tipo de procedimiento resulta sumamente costoso y difícil de adaptar a casos más generales de densidades variables.

Los mismos fenómenos que acabamos de describir se presentan también para las aproximaciones numéricas. Consideremos por ejemplo la semidiscretización más natural de (12.34)

$$\rho_j(t)u_j'' + \frac{[2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}]}{h^2} = 0,\ j \in \mathbb{Z},\ t > 0$$

donde

$$\rho_j(t) = \rho(x_j, t).$$

En este caso la energía viene dada por la expresión

$$E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Big[\rho_j(t) \mid u_j'(t) \mid^2 + \Big| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \Big|^2 \Big].$$

Es fácil comprobar que en este caso la energía evoluciona según la ley

$$E_h'(t) = \frac{h}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho_j'(t) \mid u_j'(t) \mid^2$$

de modo que no es posible obtener estimaciones sobre su evolución temporal, independientes del paso del mallado h, sin imponer condiciones sobre la derivada temporal de la densidad.

Conviene pues abordar el análisis de ecuaciones de ondas y de sus aproximaciones discretas, en presencia de coeficientes dependientes del tiempo, con prudencia, pues, como hemos visto, es habitual que esto exija hipótesis adicionales sobre la regularidad de los coeficientes en su evolución temporal, inesperadas en primera instancia.

13 Semi-discretización de la ecuación de ondas semilineal

En la sección 7 hemos estudiado la ecuación de ondas semilineal en el contexto de la Teoría de semigrupos. Hemos visto que, bajo condiciones adecuadas sobre el crecimiento de la no-linealidad, (que garantizan que la nolinealidad envía H^1 en L^2 de manera Lipschitz en acotados) la ecuación de ondas semi-lineal está bien puesta, localmente en tiempo. Veíamos posteriormente que a través de una estimación de energía, cuando la no-linealidad tenía una propiedad de "buen signo" la solución podía prolongarse y definirse globalmente en tiempo.

En esta sección discutimos brevemente algunos aspectos de la aproximación numérica de estas ecuaciones.

Consideremos la ecuación de ondas semilineal $1 - d$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{13.1}$$

Gracias a la inclusión de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$, para todo $2 \leqslant p \leqslant \infty$, la ecuación (13.1) está bien puesta en el espacio de la energía. Además, la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \Big[\mid u_t(x,t) \mid^2 + \mid u_x(x,t) \mid^2 \Big] dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} u^4(x,t) dx \tag{13.2}$$

se conserva de modo que las soluciones están globalmente definidas en tiempo.

En este caso la aproximación semi-discreta más natural viene dada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} u_j'' + \dfrac{[2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}]}{h^2} + u_j^3 = 0, & j \in \mathbb{Z}, \quad t > 0 \\ u_j(0) = u_{0,j},\, u_j'(0) = u_{1,j}, & j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{13.3}$$

donde $\Big(u_{0,j}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}$, $\Big(u_{1,j}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}$ son aproximaciones adecuadas de los datos iniciales continuos de (13.1).

El sistema (13.3) es un conjunto de una infinidad de ecuaciones diferenciales nolineales acopladas. Se puede probar que, para cada paso de mallado $h > 0$, (13.3) admite una única solución local en tiempo. Para ello basta aplicar la fórmula de variación de las constantes y utilizar las propiedades ya conocidas sobre el sistema lineal subyacente.

Pero, nuevamente, para probar la existencia global de soluciones, necesitamos de una identidad de energía. En este caso tenemos que la energía del sistema semi-discreto es

$$E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big[\mid u_j'(t) \mid^2 + \Big| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \Big|^2 \Big] + \frac{h}{4} \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j^4(t). \tag{13.4}$$

Nuevamente, esta energía se conserva en tiempo y este hecho permite probar que las soluciones de (13.3) están globalmente definidas.

Más adelante analizaremos el modo en que las soluciones de (13.3) convergen a las de (13.1) cuando $h \to 0$.

Conviene de todos modos analizar con un poco más de cuidado el argumento que permite deducir la existencia global de soluciones a partir de la conservación de las energías (13.2) o (13.4).

En efecto, el resultado de existencia y unicidad de soluciones de (13.1) en $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, localmente en tiempo y el posterior argumento de prolongación al intervalo maximal de existencia $[0, T_{\max})$ permite establecer la alternativa siguiente: O bien $T_{\max} = \infty$ (*existencia global*); o bien $T_{\max} < \infty$ en cuyo caso se produce la *explosión en tiempo finito* de las soluciones, i.e.

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \parallel u(t) \parallel_{H^1(\mathbb{R})} + \parallel u_t(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R})} = \infty. \tag{13.5}$$

El que la energía $E(t)$ de (13.2) se conserve junto con que todos los términos que en ella intervienen tengan signo positivo permite garantizar que tanto $\parallel u_x(t) \parallel_{L^2(\mathbb{R})}$ como

$\| \ u_t(t) \ \|_{L^2(\mathbb{R})}$ permanecen acotadas en intervalos finitos de tiempo. Sin embargo, en la medida que estamos trabajando en $\mathbb{R}$ y no disponemos de la desigualdad de Poincaré, para probar que (13.5) no es posible tenemos también que establecer una cota sobre la norma de la solución en $L^2(\mathbb{R})$. Para ello introducimos la energía perturbada

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[u_t^2 + u_x^2 + u^2\right] dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} u^4 dx.$$

Para esta nueva energía tenemos la identidad

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} u\, u_t dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[u^2 + u_t^2\right] dx \leqslant F(t)$$

de modo que, por la desigualdad de Gronwall,

$$F(t) \leqslant F(0)e^t.$$

En particular

$$\int u^2(t) dx \leqslant Ce^t$$

de modo que la explosión de la norma L^2 de la solución en tiempo finito queda también excluida.

El mismo tipo de argumento, basado en la perturbación de la energía natural del sistema, permite también probar que las soluciones de (13.3) están globalmente definidas en tiempo.

Se trata de una aplicación más del denominado *método de la energía* que consiste en construir cantidades de interpretación física más o menos directa, para las que se puede establecer alguna desigualdad diferencial que proporcione cotas sobre dicha cantidad permitiendo a su vez obtener estimaciones sobre las soluciones.

14 Ejercicios

$\boxed{1}$ Comprueba que la superposición de dos movimientos armónicos de la misma frecuencia de la forma

$$x_j(t) = A_j \cos(\omega_0 t + \phi_j),\ j = 1, 2$$

puede escribirse en la forma

$$x(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \phi)}$$

con

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \\ \operatorname{tg}\phi &= \frac{A_1 \operatorname{sen}\phi_1 + A_2 \operatorname{sen}\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ a) Comprueba mediante un cambio de variables que la ecuación de ondas

$$\rho v_{tt} - \sigma v_{xx} = 0$$

con ρ y σ constantes positivas, puede reducirse al caso particular en que $\rho = \sigma = 1$.

b) Deduce la fórmula de d'Alembert para esta ecuación y analiza la velocidad de propagación, dominio de dependencia y región de influencia.

c) Comprueba que, mediante un cambio de variables adecuado, la ecuación

$$\rho(x) v_{tt} - (\sigma(x) v_x)_x = 0$$

con coeficientes regulares positivos puede reducirse a una ecuación de ondas de la forma

$$v_{tt} - v_{xx} + a(x) v = 0$$

en la que la parte principal es el operador de d'Alembert, que se ve perturbada por un potencial $a = a(x)$ dependiente de los coeficientes $\rho(x)$ y $\sigma(x)$.

$\boxed{3}$ a) Comprueba que no existe ninguna función discreta $\varepsilon(N)$ tal que $\varepsilon(N) \to 0$ cuando $N \to \infty$ y que satisfaga

$$\| \vec{a} - \vec{a}_N \|_{\ell^2} \leqslant \varepsilon(N) \| \vec{a} \|_{\ell^2}, \quad \forall \vec{a} \in \ell^2$$

donde $\vec{a}_N$ denota la sucesión truncada en el N-ésimo elemento.

b) Comprueba que existe dicha función si nos limitamos a una versión más débil de esta desigualdad:

$$\| \vec{a} - \vec{a}_N \|_{\ell^2} \leqslant \varepsilon(N) \| \vec{a} \|_{h^1}, \quad \forall \vec{a} \in h^1,$$

donde

$$h^1 = \left\{ \vec{a} = (a_j)_{j \geqslant 1} : \sum_{j=1}^{\infty} j^2 a j^2 < \infty \right\}$$

y

$$\| \vec{a} \|_{h^1} = \Big[\sum_{j=1}^{\infty} j^2 a j^2 \Big]^{1/2}.$$

Prueba primeramente que h^1 es denso en ℓ^2.

c) Demuestra que una desigualdad semejante se verifica si sustituimos h^1 por h_ρ:

$$h_\rho = \left\{ \vec{a} = (a_j)_{j \geqslant 1} : \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j a_j^2 < \infty \right\}$$

siendo $\rho = (\rho_j)_{j \geqslant 1}$ una función discreta tal que $\rho_j \to \infty$ cuando $j \to \infty$. Calcula $\varepsilon = \varepsilon(N)$ en función de $(\rho_j)_{j \geqslant 1}$.

$\boxed{4}$ Demuestra que existe $C > 0$ tal que

$$\| f \|^2_{H^2(0,\pi)} \leqslant C \| f'' \|^2_{L^2(0,\pi)}$$

para toda función $f \in H^2(0,\pi) \cap H^1_0(0,\pi)$.

$\boxed{5}$ Consideramos la ecuación de ondas disipativa

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0,\, u_t(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega. \end{cases}$$

a) Desarrolla las soluciones en serie de Fourier en la tasa de las autofunciones del Laplaciano.

b) Calcula la base exponencial de convergencia de la energía cuando $t \to \infty$.

c) Comprueba que a medida que ε tiende a cero el comportamiento de las soluciones se asemeja cada vez más al de las soluciones de la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad \Omega. \end{cases}$$

d) Dibuja el espectro de la ecuación de ondas disipativa en el plano complejo, describe su evolución a medida que $\varepsilon \to 0$ y comprueba que en el límite se recupera el espectro de la ecuación del calor.

e) ¿Cómo se refleja a nivel del espectro el hecho de que la ecuación de ondas sea una ecuación de orden dos en tiempo y, sin embargo, su límite singular sea simplemente una ecuación de ondas uno en tiempo?

$\boxed{6}$ Consideremos la ecuación de ondas disipativa

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + \beta u_t = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \end{cases}$$

en un dominio acotado y regular Ω de $\mathbb{R}^n$.

Demuestra que eligiendo $\alpha, \beta > 0$ adecuados se puede conseguir que la tasa de decaimiento exponencial de las soluciones sea arbitrariamente grande.

$\boxed{7}$ Escribe la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

en la forma abstracta de una ecuación de evolución de orden uno en el espacio de la energía. Utilizando la descomposición espectral del Laplaciano calcula la forma explícita de la aproximación de Yosida del generador del semigrupo de ondas.

Comprueba que se trata de un operador anti-adjunto acotado. Discute en qué modo se aproxima al generador de la ecuación de ondas.

$\boxed{8}$ Utilizando una base ortonormal del Laplaciano $\{\phi_j\}_{j\geqslant 1}$ asociado a sus autofunciones con condiciones de contorno de Dirichlet y definiendo el producto escalar en $H^{-1}(\Omega)$ del siguiente modo

$$(p, q)_{H^{-1}} = \sum_{j\geqslant 1} \frac{p_j q_j}{\lambda_j}$$

donde

$$p(x) = \sum_{j\geqslant 1} p_j \phi_j(x);\ q(x) = \sum_{j\geqslant 1} q_j \phi_j(x),$$

comprueba que este producto escalar coincide con el que se obtiene mediante la definición

$$(p, q)_{H^{-1}(\Omega)} = \Big((\Delta)^{-1} p,\ (-\Delta)^{-1} q\Big)_{H_0^1(\Omega)}.$$

$\boxed{9}$ Consideramos la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ con datos iniciales $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $u_1 \in H^{-1}(\Omega)$.

a) Comprueba que si definimos

$$v(x, t) = \int_0^t u(x, s)ds + \chi(x)$$

con una función χ adecuadamente elegida, entonces v es solución de la ecuación de ondas con datos iniciales en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

b) Utilizando el resultado de existencia y unicidad de las soluciones de energía finita con datos iniciales en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, deduce que con datos iniciales en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe una única solución en el espacio

$$u \in C\Big([0, \infty);\ L^2(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0, \infty); H^{-1}(\Omega)\Big).$$

$\boxed{10}$ Consideramos la ecuación de transporte

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Demuestra que si $f \in C^3(\mathbb{R})$ es de soporte compacto, las soluciones del esquema semi-discreto centrado

$$\begin{cases} u_j' + \dfrac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = 0, & j \in \mathbb{Z}, \quad t > 0 \\ u_j(0) = f(x_j), & j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

convergen a la solución de la ecuación de transporte con un orden dos de convergencia. Obtén una estimación explícita del error.

$\boxed{11}$ Consideramos un operador no acotado diagonal en ℓ^2, con dominio

$$D(A) = \left\{ \vec{u} \in \ell^2 : \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda_j^2 u_j^2 < \infty \right\}.$$

definido como $A\vec{u} = (\lambda_j u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sobre los elementos $\vec{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ del dominio.

a) Demuestra que A es un operador acotado y que $D(A) = \ell^2$ si y sólo si

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} | \lambda_j | < \infty.$$

b) Demuestra que A es un operador compacto (envía conjuntos acotados de ℓ^2 en conjuntos relativamente compactos) si y sólo si

$$\lim_{|j| \to \infty} | \lambda_j | = 0.$$

Comprueba que en este caso A puede ser aproximado en $\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)$ para operadores de rango finito.

$\boxed{12}$ Sea $\{e^{At}\}_{t \geqslant 0}$ un semigrupo de contracciones en un espacio de Hilbert H. Prueba que las dos siguientes condiciones son equivalentes:

- $\exists T > 0 : \quad \| e^{AT} \|_{\mathcal{L}(H,H)} < 1;$
- $\exists C, \omega > 0 : \quad \| e^{At} \|_{\mathcal{L}(H,H)} \leqslant Ce^{-\omega t}.$

$\boxed{13}$ Probar que el recíproco de la desigualdad de Poincaré no es cierto en ningún abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Es decir, probar que si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$,

$$\sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega | \nabla u |^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 dx} = \infty.$$

Indicación: Considérese en primer lugar el caso de una variable espacial con $u(x) = \varphi(x/\varepsilon)$ siendo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $\varepsilon \to 0$. Abórdese después el caso multi-dimensional por separación de variables.

$\boxed{14}$ a) Resuelve mediante el método de las características la ecuación de transporte

$$u_t + a(x) \cdot \nabla u = 0$$

donde $a = a(x)$ es una función regular.

b) Resuelve posteriormente la ecuación perturbada

$$u_t + a(x) \cdot \nabla u + b(x)u = 0.$$

$\boxed{15}$ Utiliza el método de descomposición de Fourier y la fórmula de variación de las constantes para obtener una ecuación integral de las soluciones de la ecuación de ondas semi-lineal

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\, u_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Comprueba que se trata de un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas acopladas. Analiza la naturaleza de este acoplamiento utilizando el valor explícito de las integrales

$$\int_0^\pi \sin(k_1 x)\operatorname{sen}(k_2 x)\operatorname{sen}(k_3 x)\operatorname{sen}(k_4 x)dx.$$

$\boxed{16}$ Supongamos que f es una función continua para la que existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\mid f(x) \mid \leqslant g(x), \text{ p.c.t. } x \in \mathbb{R}$$

de modo que g sea decreciente para $x > 0$ y creciente para $x < 0$.

Demuestra que

$$h \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(jh) \to \int_{\mathbb{R}} f(x)dx,\ h \to 0.$$

$\boxed{17}$ Consideramos el siguiente operador lineal acotado de ℓ^2 en ℓ^2:

(1) $$T\Big[(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}\Big] = \Big(\alpha u_j + \beta u_{j-1}\Big)_{j\in\mathbb{Z}}$$

donde

(2) $$0 < \beta < \alpha < \infty.$$

Pretendemos probar que, bajo la condición (2), este operador es inversible y que su inverso T^{-1} es también un operador acotado de ℓ^2 en ℓ^2.

Procedemos de dos modos distintos.

a) Utilizando la transformación de von Neumann obtén una expresión explícita de T^{-1} y una cota de su norma como operador lineal acotado de ℓ^2 en ℓ^2.

b) Aproximamos la ecuación (1) por sistemas de dimensión finita

$$T_N(u_{-N},\dots,u_{-1},u_0,u_1,\dots,u_N) = A_N(u_{-N},\dots,u_{-1},u_0,u_1,\dots,u_N) \tag{3}$$

donde A_N es la matriz $(2N+1)\times(2N+1)$ de la forma

$$A_N = \begin{pmatrix} \alpha\, 0 \dots\dots 0 \\ \beta\, \alpha\, 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots\dots 0\, \alpha \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Comprobad que A_N^{-1} es inversible para cada N y verificar que, para cada $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, $(A_N^{-1})(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión acotada en ℓ^2. (En este punto abusamos un poco de la notación. En efecto, A_N^{-1} no se aplica a la sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ sino al vector de dimensión $2N+1$ truncado $(f_{-N},\dots,f_{-1},\ f_0,f_1,\dots,f_N)$. Análogamente, $(A_N^{-1})(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ no pertenece a ℓ^2 sino que es un vector de $2N+1$ componentes. Se convierte en un elemento de ℓ^2 cuando lo prolongamos mediante el valor cero para todos los índices j con $\mid j \mid > N$.

$\boxed{18}$ a) Escribe la ecuación de ondas con coeficientes constantes y condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas en un dominio acotado en forma abstracta

$$U_t = AU.$$

b) Utilizando las autofunciones del Laplaciano Dirichlet, realiza la descomposición espectral del operador A que adopta la forma de un operador diagonal.

c) Calcula la regularización Yosida de A.

d) Verifica que la regularización Yosida A_λ satisface:

$$* \quad \| A_\lambda \| \leqslant 1/\lambda;$$

$$* \quad A_\lambda U \to AU, \quad \forall U \in D(A).$$

e) Comenta la idoneidad de la aproximación Yosida en el sentido de que genera una dinámica infinito-dimensional muy semejante que la de la ecuación de ondas.

$\boxed{19}$ Aplicar el resultado general del ejercicio #17 para probar que se puede resolver el esquema implícito de Crank-Nicholson siguiente

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\Big[\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{2\Delta x}\Big]$$

para la aproximación de la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0.$$

Comprobar que se trata de un esquema convergente de orden dos para cualquier valor del parámetro de Courant μ.

$\boxed{20}$ Comprueba que los espacios $L^2(0,\infty;\ L^3(0,\pi))$ y $L^3(0,\infty;\ L^2(0,\pi))$ no son comparables (ninguno de los dos está contenido en el otro).

$\boxed{21}$ Demuestra que cualquier función de $L^2(0,\pi)$ puede aproximarse para funciones regulares que en los extremos $x = 0, \pi$ toman un valor arbitrario. Comprueba que ésto no es posible en $H_0^1(0,\pi)$.

$\boxed{22}$ Sea Ω un dominio regular, estríctamente convexo de $\mathbb{R}^N$. Demuestra que la traza de u tiene sentido si $u \in L^2(\Omega)$ y $\partial_1 u \in L^2(\Omega)$.

¿A qué espacio pertenece la traza?

$\boxed{23}$ Sea A un operador no acotado en un espacio de Hilbert H que genera un semigrupo de contracciones.

Comprueba que las dos siguientes condiciones son equivalentes:

$$\exists T > 0 : \| e^{AT} \| < 1; \tag{1}$$

$$\exists C, \omega > 0 : \| e^{At} \| \leqslant Ce^{-\omega t},\ \forall t > 0. \tag{2}$$

$\boxed{24}$ Demuestra de manera rigurosa en el contexto de la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0$$

que un esquema numérico semi-discreto o completamente discreto que no verifica la condición de CFL sobre los dominios de dependencia no puede ser convergente.

$\boxed{25}$ Consideremos el esquema de Lax-Friedrichs

$$u_j^{k+1} = \frac{1}{2}(1-\mu)u_{j-1}^k + \frac{1}{2}(1+\mu)u_{j+1}^k \tag{1}$$

para aproximar las soluciones de la ecuación de transporte

$$u_t + u_x. \tag{2}$$

a) Comprueba que el esquema puede escribirse de la forma

$$(3) \qquad \frac{u_j^{k+1} - \frac{1}{2}\left(u_{j-1}^k + u_{j+1}^k\right)}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2\Delta x} = 0$$

y comenta la analogía entre (3) y (2).

b) Verifica que se trata de un esquema consistente de orden uno.

c) Comprueba que es estable si y sólo si el número de Courant $\mu \leqslant 1$

d) Escribe un modelo de EDP que sea intermedio entre (2) y (3). ¿Se percibe algún efecto disipativo en el mismo? Comenta este resultado en relación con lo observado en el análisis de von Neumann del esquema (3).

$\boxed{26}$ Desarrolla el programa del ejercicio anterior en el caso de la aproximación de Lax-Wendroff:

$$u_j^{k+1} = \frac{1}{2}\mu(1+\mu)u_{j-1}^k + (1-\mu^2)u_j^k - \frac{1}{2}\mu(1-\mu)u_{j+1}^k.$$

$\boxed{27}$ Como es bien sabido y es fácil de comprobar, la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0$$

conserva la masa. Es decir,

$$\frac{d}{dt}\Big[\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx\Big] = 0.$$

Esta propiedad puede obtenerse tanto a través de la fórmula explícita de solución ($u(x,t) = f(x,t)$) como integrando con respecto a $x \in \mathbb{R}$ en la ecuación de transporte.

Verifica si los esquemas de aproximación semi-discretos y discretos de la ecuación de transporte introducidos en las notas reproducen esta propiedad.

¿Es necesario que esta propiedad de conservación se cumpla para que un esquema sea convergente?¿Es necesario que se cumpla en un sentido aproximado cada vez más preciso a medida que los parámetros de discretización tienden a cero?

$\boxed{28}$ Obtén la expresión explícita de la velocidad de fase y de grupo en los esquemas numéricos introducidos en las notas. Comenta en particular si se percibe la existencia de efectos disipativos en la aproximación numérica. Compara con el comportamiento de la ecuación en derivadas parciales, corrección de la ecuación de transporte puro, que más se asemeja al esquema numérico.

$\boxed{29}$ Consideramos la función $f \in H^s(\mathbb{R})$ con $s \geqslant 0$. Definimos la aproximación

$$f_h(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}1_{(-\pi/h,\pi/h)}).$$

La sucesión $\{f_h\}_{h>0}$ está constituida por funciones de banda limitada representables en un mallado de paso h.

a) Demuestra que si $s = 0$,
$$f_h \to f \text{ en } L^2(\mathbb{R}),\ h \to 0.$$

b) Cuando $s > 0$, obtén una estimación superior de la tasa de convergencia de f_h a f en $L^2(\mathbb{R})$.

c) Construye un ejemplo explícito de función f donde se observe que el orden de convergencia obtenido en el apartado anterior es óptimo.

d) demuestra que, cuando $s = 0$ el orden de converegncia puede ser arbitrariamente lento.

e) Comprueba que lo dicho en el caso $s > 0$ sirve cuando $s > s'$, si se trata de medir la convergencia en el espacio

$\boxed{30}$ Consideramos el siguiente esquema centrado
$$u_j'' + \frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} = 0,\ j \in \mathbb{Z},\ t > 0$$
para la aproximación de la ecuación de ondas
$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

a) Prueba que tanto en el problema de Cauchy como en el problema de Dirichlet la energía
$$E_h(t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\mid u_j'(t) \mid^2 + \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 \right]$$
se conserva en tiempo.

Deduce la estabilidad del método.

b) Comprueba en el caso del problema de Cauchy esta propiedad de estabilidad mediante el método de von Neumann.

c) Comprueba que el esquema es consistente de orden dos.

d) Enuncia un resultado preciso de la convergencia de orden dos tanto para el problema de Cauchy como para el de Dirichlet, imponiendo condiciones adecuadas sobre los datos iniciales.

e) Escribe una corrección de la ecuación de las ecuaciones de ondas que refleje mejor que ella la dinámica del sistema semi-discreto.

$\boxed{31}$ Responde a las cuestiones del problema anterior en el marco del esquema semi-discreto

$$u_j'' + \left[\frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2}\right] + h^\alpha \left[2u_j' - u_{j-1}' - u_{j+1}'\right] = 0$$

En particular, calcula el orden del método en función del valor del parámetro $\alpha > -2$.

$\boxed{32}$ Ilustra en Matlab el comportamiento del esquema progresivo, centrado y regresivo para la aproximación de la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0$$

con dato inicial

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

En particular asegurate de que los siguientes hechos quedan claramente reflejados:

a) El esquema progresivo diverge.

b) A pesar de que el esquema centrado da lugar a una aproximación de mejor orden que el regresivo, la dinámica de este último se asemeja más a la de la ecuación de transporte que la del esquema centrado ¿Por qué?

$\boxed{33}$ Consideramos el esquema discreto progresivo para la aproximación numérica de la ecuación de transporte

$$u_t + u_x = 0.$$

Sabemos que se trata de un método inestable.

a) Comprueba que para cualquier $s > 0$ existe un dato inicial $f \in H^s(\mathbb{R})$ tal que si tomamos como dato inicial del problema semi-discreto

$$f_h = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{f}(\xi) 1_{(-\pi/h,\,\pi/h)}(\xi)\right),$$

entonces la solución semi-discreta tiene, para cada $t > 0$, una norma en $L^2(\mathbb{R})$ que diverge cuando $h \to 0$.

b) Impón una condición sobre el dato inicial f que garantice la convergencia del método.

$\boxed{34}$ Consideramos la ecuación de ondas disipativa

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{14.1}$$

$\boxed{\text{A}}$ Comprobar formalmente que las soluciones regulares de (14.1) que decaen cuando $x \to \infty$ son tales que la energía

$$E(t) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t)\right] dx \tag{14.2}$$

decrece en tiempo.

Obtener una fórmula explícita para la evolución de la energía.

Justificar el calificativo de “disipativa” de la ecuación.

$\boxed{\text{B}}$ Escribir el sistema (14.1) como un problema abstracto de Cauchy

$$\begin{cases} \cup_t = A\cup, & t > 0 \\ \cup(0) = \cup_0, \end{cases} \tag{14.3}$$

siendo A un operador lineal no acotado en un espacio de Hilbert H.

$\boxed{\text{C}}$ Indicar la estructura funcional adecuada del espacio H y del dominio del operador A.

$\boxed{\text{D}}$ Demostrar que el operador A así construido es maximal disipativo. Deducir un resultado de existencia y unicidad de soluciones de (14.1).

$\boxed{\text{E}}$ Comparar el valor explícito de $\langle A\cup, \cup\rangle_H$ con la fórmula de disipación de la energía obtenida en el apartado $\boxed{\text{A}}$.

Consideramos a partir de este momento la aproximación semi-discreta

$$\begin{cases} u_j'' + \dfrac{[2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}]}{h^2} + u_j' = 0, & j \in \mathbb{Z}, \quad t > 0 \\ u_j(0) = f_j,\, u_j'(0) = g_j, & j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{14.4}$$

con las notaciones habituales.

$\boxed{\text{F}}$ Construye la energía discreta E_h asociada al sistema (14.4). Obtén una ley de disipación para esta energía. Compárala con la obtenida en el apartado $\boxed{\text{A}}$ para la ecuación continua (14.1).

$\boxed{\text{G}}$ Escribe (14.4) en la forma de un problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} \cup_t = A_h\cup, & t > 0 \\ \cup(0) = \cup_0. \end{cases}$$

Comprueba que, en este caso, A_h es un operador acotado en $\ell^2 \times \ell^2$ siendo

$$\ell^2 = \left\{ (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} : \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mid a_j \mid^2 < \infty \right\},$$

dotado de la norma canónica usual.

Deduce la existencia y unicidad de soluciones de (14.4).

$\boxed{\text{H}}$ Comprueba la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema (14.4) a la ecuación continua (14.1). ¿Cuál es el orden de convergencia? Enuncia de manera precisa el resultado de convergencia señalando las hipótesis necesarias sobre la solución u del problema continuo (14.1) y por tanto de sus datos iniciales $f = f(x)$ y $g = g(x)$ y la norma en la que se tiene la convergencia.

$\boxed{\text{I}}$ Utilizando el desarrollo de Taylor escribe una ecuación en derivadas parciales intermedia entre la EDP (14.1) y el esquema discreto (14.4).

$\boxed{\text{J}}$ Integrando la ecuación (14.1) con respecto a x comprueba que la cantidad

$$\int_{\mathbb{R}} [u(x,t) + u_t(x,t)]dx$$

se conserva en tiempo para las soluciones de (14.1).

Verifica si el esquema semi-discreto satisface una propiedad similar.

$\boxed{\text{K}}$ Aplica la transformada discreta de Fourier a escala h en (14.4) y deduce una ecuación que gobierne la evolución de la tranformada de Fourier discreta de la solución de (4).

Obtén una expresión de esta tranformada de Fourier discreta como combinación de exponenciales complejos.

Compárala con la transformada continua de Fourier de la solución de (1).

$\boxed{\text{L}}$ Define la velocidad de fase. ¿Es puramente real? En caso de que no lo sea, ¿cuál es el significado de la parte imaginaria en relación a las propiedades de disipatividad del esquema semi-discreto (14.4)?

$\boxed{\text{M}}$ Dibuja un diagrama para la parte real de la velocidad de fase y compáralo con el de la ecuación continua.

Comenta las semejanzas y diferencias de ambos casos.

$\boxed{\text{N}}$ Suponiendo que los datos iniciales f y g son de banda limitada (su transformada de Fourier tiene soporte en un intervalo acotado) argumenta que la velocidad de propagación en el esquema semi-discreto se asemeja cada vez más, a medida que $h \to 0$, a la de la ecuación continua.

$\boxed{\text{O}}$ Calcula la velocidad de grupo, dibuja su diagrama y coméntalo.

$\boxed{35}$ Consideramos la ecuación del calor

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

a) Comprueba que la solución de (1) puede escribirse como

$$u = G(\cdot, t) * f(\cdot)$$

donde $*$ denota la convolución en la variable espacial y G en el núcleo de Gauss

$$G(x,t) = (4\pi t)^{-N/2} \exp\left(-\frac{|\, x \,|^2}{4t}\right).$$

Para ello, comprueba (directamente o usando la transformada de Fourier) que G es la solución fundamental de la ecuación del calor.

b) Demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ entonces u es de clase C^∞ en $t > 0$.

c) Demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = 0$, entonces $u(t) \to 0$ en $L^1(\mathbb{R}^N)$ cuando $t \to \infty$.

d) Obtén la expresión explícita de la solución de

$$\begin{cases} u_t - \dfrac{h}{2} u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $h > 0$.

$\boxed{36}$ Consideramos el problema de Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t - \dfrac{h}{2} u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Demuestra que (1) genera un semigrupo de contracciones en $L^2(\mathbb{R})$.

b) Obtén la ley de disipación de la energía en $L^2(\mathbb{R})$.

c) Demuestra que si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ entonces las normas de u en $L^p(\mathbb{R})$ con $2 \leqslant p \leqslant \infty$ decrecen cuando $t \to \infty$.

$\boxed{37}$ Consideramos el siguiente problema de transporte en la semi-recta con condiciones de contorno de Dirichlet:

$$(1) \qquad \begin{cases} u_t + u_x = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x > 0. \end{cases}$$

a) Demuestra que (1) genera un semigrupo de contracciones en $L^2(\mathbb{R}^+)$.

b) Calcula explícitamente el valor de la solución.

c) Demuestra que el esquema semi-discreto centrado y regresivo habitual junto con la condición

$$u_0(t) = 0, \quad t > 0$$

en el nodo $x_0 = 0$, proporcionan una aproximación convergente de orden dos y uno respectivamente.

A partir de este momento buscamos calcular una aproximación de la solución exclusivamente en el intervalo espacial $0 < x < 1$.

d) Comprueba que la solución del problema continuo para $0 < x < 1$ y $t > 0$ arbitrario depende exclusivamente del valor del dato inicial $f(x)$ en el intervalo $0 < x < 1$.

e) Comprueba que el esquema regresivo puede resolverse considerando exclusivamente los índices $j \in \mathbb{N}$ tales que $x_j = jh \in (0,1)$ proporcionando una aproximación convergente de la solución en el intervalo $(0,1)$.

f) Demuestra que esto no es así en el esquema centrado.

A partir de este momento intentamos localizar el esquema centrado para los índices

$$j = 0, \cdots, N-1$$

donde $N \in \mathbb{N}$ es tal que $Nh = 1$.

Para ello, evidentemente, hemos de proporcionar el valor de u_N.

g) Analiza la convergencia del esquema centrado para los índices $j = 0, \cdots, N-1$, considerando para el nodo x_N cada una de las aproximaciones siguientes:

- $U_N(t) = f(Nh - t)$.

  Obsérvese que esta aproximación es exacta puesto que $f(Nh - t)$ es el valor de la solución continua de (1) durante un cierto intervalo de tiempo.

- $u_N(t) = u_{N-1}(t)$.

  Se trata también de una aproximación natural puesto que, en el caso continuo,

$$u(x_N, t) = u(x_{N-1}, t) + hu_x(x_{N-1}, t) + O(h^2)$$

  de modo que

$$u(x_N, t) = u(x_{N-1}, t) + O(h).$$

  Obsérvese sin embargo que esta aproximación es de orden uno y no de orden dos como es habitual en el esquema centrado.

- $u_N(t) = 2u_{N-1}(t) - u_{N-2}(t)$.

  Nuevamente, por el desarrollo de Taylor, se trata de una aproximación de orden dos. En este caso por tanto el esquema debería ser convergente de orden 2.

- $u_N(t) = u_{N-1}(t) - u'_{N-1}(t)$.

  En vista de la ecuación de transporte

$$u_t = -u_x$$

  que la solución continua verifica y del argumento del caso anterior, se trata de una aproximación de orden dos

- $u_N(t) = 2u_{N-1}(t) - u_{N-2}(t)$.

  Nuevamente, por el desarrollo de Taylor, se trata de una aproximación de orden dos. En este caso por tanto el esquema debería ser convergente de orden 2.

References

[1] Bender, C.M. and Orszag, S.A. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill.

[2] Brezis, H. (1983). *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris.

[3] Cazenave, T. and Haraux A. (1989), *Introduction aux problèmes d'évolution semilinéaires*, Mathématiques & Applications, Ellipses, Paris.

[4] Cohen, G. (2001). *Higher-order numerical methods for transient wave equations.* Scientific Computation, Springer.

[5] Eastham, M.S.P. (1973). *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Scottish Academic Press, Edinburgh.

[6] Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS.

[7] Glowinski, R. (1992). "Ensuring well-posedness by analogy; Stokes problem and boundary control of the wave equation". *J. Compt. Phys.*, **103**(2), 189–221.

[8] Glowinski, R., Li, C. H. and Lions, J.-L. (1990). "A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I). Dirichlet controls: Description of the numerical methods". *Japan J. Appl. Math.*, **7**, 1–76.

[9] Infante, J.A. and Zuazua, E. (1999). "Boundary observability for the space-discretizations of the one-dimensional wave equation", *Mathematical Modelling and Numerical Analysis,* **33**, 407–438.

[10] Isaacson, E. and Keller, H.B. (1966). *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons.

[11] Iserles, A. (1996) *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press.

[12] John, F. (1982) *Partial differential Equations,* (4. ed), Springer.

[13] LeVeque, R. J. (1992). *Numerical methods for conservation laws.* Second edition. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel.

[14] Negreanu, M. and Zuazua, E. (2003). "Uniform boundary controllability of a discrete 1D wave equation. *Systems and Control Letters*, **48** (3-4) , 261-280.

[15] Quarteroni A. y Valli, A. (1998). *Numerical approximation of Partial differential Equations*, Springer, Springer Series in Computational Mathematics, 23.

[16] Rauch, J. (1991) *Partial Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag.

[17] Sanz-Serna, J. (1985). "Stability and convergence in numerical analysis. I: linear problems—a simple, comprehensive account". *Res. Notes in Math.*, **132**, Pitman, Boston, MA, pp. 64–113.

[18] Trefethen, L. N. (1982). "Group velocity in finite difference schemes", *SIAM Rev.,* **24** (2), pp. 113–136.

[19] Vichnevetsky, R. and Bowles, J.B. (1982). *Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations.* SIAM Studies in Applied Mathematics, **5**, SIAM, Philadelphia.

[20] Young, R. M. (1980). *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York.

[21] Zuazua, E. (1999). "Boundary observability for the finite-difference space semi-discretizations of the 2D wave equation in the square", *J. Math. Pures et Appliquées*, **78**, 523–563.

[22] Zuazua, E. (2002). "Controllability of Partial Differential Equations and its Semi-Discrete Approximations". *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **8** (2), 469–513.

[23] Zuazua, E. (1999). "Observability of 1D waves in heterogeneous and semi-discrete media". *Advances in Structural Control.* J. Rodellar et al., eds., CIMNE, Barcelona, pp. 1–30.