

CONTROLABILIDAD EXACTA Y ESTABILIZACION DE LA ECUACION DE ONDAS

Enrike Zuazua(*)

Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Complutense

28040 Madrid

(*) Parcialmente subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (MEC-España), Proyecto PB86-0112-CO2 y por Contrato SCI-0019-C(TT) de la CEE.



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

TEXTOS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS

Os TEXTOS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS servem à Matemática, em seu relacionamento com as ciências da natureza, ao nível do ensino de pós-graduação e da pesquisa. Alguns volumes procuram apresentar, em termos matemáticos concisos, os fundamentos de um setor particular de interesse para especialistas de formação diversificada em disciplinas matemáticas. Outros, consistem de exposições restritas a um único tópico ou a um conjunto conexo de investigações importantes realizadas por um indivíduo particular. De certa forma, os TEXTOS abordam primordialmente tópicos especializados ou apresentações, não usuais, de tópicos clássicos, servindo de ligação entre o estudo passivo e a compreensão criativa. Tais exposições não se constituem em levantamentos detalhados ou tratamentos breves de resultados recentes de pesquisa. São textos de auxílio ao ensino; o objetivo dos autores é o de destacar as características particulares da teoria, servindo de fonte subsidiária à cursos, seminários ou estudo individual. As definições são dadas e o interrelacionamento lógico entre os tópicos está presente, os principais resultados e seus corolários são enunciados, embora algumas demonstrações possam estar omitidas. Uma indicação da natureza da demonstração é freqüentemente apresentada e um simples esboço desta pode ocorrer quando os detalhes técnicos são substituídos por referências bibliográficas.

Em resumo, os TEXTOS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS se constituem em esboço para material apresentado em estilo semi-formal, em antecipação a textos ou monografias formais, de interesse imediato, dado o tratamento de uma aplicação, ou devido ao fato de estar o tópico matemático em plena utilização, ou próximo às aplicações.

Mediante publicação rápida e barata, os TEXTOS tornam acessíveis material de interesse contemporâneo aos que empregam a Matemática, aos matemáticos interessados em aplicações e aos estudantes de pós-graduação.

CORPO EDITORIAL:

Alvercio Moreira Gomes
Gustavo Alberto Perla Menzala
Luis Adauto Medeiros
Manuel A. Milla Miranda



UFRJ - CCMN

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Cópias de publicações do IM - UFRJ:
podem ser obtidas escrevendo para:

(Copies of publications of the Instituto
de Matemática - UFRJ can be obtained by
writing to:)

Bibliotecária Chefe

INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRJ

Caixa Postal 68530 ZC 00

21 944 - Rio de Janeiro, R.J.

B R A S I L

Solicitamos permuta

On demande l'échange

Exchange desired

Austausch erwünscht

Tiragem: 175 exemplares

Este manuscrito apresenta os tópicos das conferências proferidas pelo Prof. Enrike Zuazua sobre Controlabilidade Exata e Estabilização de Sistemas, durante o período de 15 de julho a 15 de setembro de 1989, no Instituto de Matemática.

Acreditamos que, pela forma precisa e didática com que foram redigidas, representarão um substancial auxílio aos pesquisadores e alunos de doutorado interessados nesta área de Equações Diferenciais Parciais.

Gostaríamos de agradecer ao Professor Zuazua por ter aceito nosso convite para permanecer no Departamento de Métodos Matemáticos como Professor Visitante e por ter assumido o árduo compromisso de redigir estas notas.

Agradecemos também a Sr.^a Miriam Carqueja pelo excelente trabalho de datilografia.

Rio de Janeiro, 12 de dezembro de 1990

Carlos Frederico Vasconcellos

INTRODUCCION

En estas notas presentamos algunos métodos que durante estos últimos años han sido desarrollados para el estudio y resolución de los problemas de la controlabilidad exacta y la estabilización de ecuaciones de evolución, así como algunos de los resultados más significativos a los que han contribuido diversos autores.

Por brevedad, consideraremos únicamente la ecuación de ondas con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, si bien la mayoría de las técnicas y resultados que presentaremos se adaptan y generalizan a otras condiciones de contorno o incluso a la ecuación de Schrödinger, diversos modelos de placas, el sistema de la elasticidad y las ecuaciones de Maxwell.

El curso está dividido en seis capítulos. El primero es un capítulo introductorio dedicado a la presentación y formulación de los problemas de la controlabilidad exacta y la estabilización. El segundo y tercero están dedicados respectivamente a la controlabilidad exacta frontera e interna de la ecuación de ondas lineal. En ambos utilizaremos, sistemáticamente el método HUM (Hilbert Uniqueness Method) introducido por J.L.Lions y seguiremos muy de cerca su libro [56]. En el cuarto capítulo presentamos un resultado de controlabilidad exacta para la ecuación de ondas semilineal con control interno. En el quinto capítulo obtenemos estimaciones sobre la velocidad de decaimiento de la energía de las soluciones de ecuaciones de ondas con disipación no lineal.

Por último, en el sexto capítulo, abordamos el problema de la estabilización frontera de la ecuación de ondas semilineal.

En cada uno de los capítulos incluimos un apartado dedicado a comentar otros resultados y a mencionar algunos problemas abiertos.

Me gustaría agradecer la excelente acogida que el Instituto de Matemáticas de la UFRJ me ha ofrecido y en especial a C.F. Vasconcellos por haber hecho posible mi viaje a Rio y este curso.

PLAN

I - INTRODUCCION Y FORMULACION DE LOS PROBLEMAS	5
I.1 - El problema de la controlabilidad exacta ..	5
I.2 - El problema de la estabilización	11
II - CONTROLABILIDAD FRONTERA DE LA ECUACION DE ONDAS LINEAL	18
II.1 - Descripción del método HUM	18
II.2 - La desigualdad directa	24
II.3 - La desigualdad inversa	27
II.4 - El resultado principal	31
II.5 - Soluciones débiles de la ecuación de ondas	32
II.6 - Algunas consideraciones geométricas ...	40
II.7 - El caso de los coeficientes variables en dimensión $n=1$	43
II.8 - Comentarios	49
III - CONTROLABILIDAD INTERNA DE LA ECUACION DE ONDAS LINEAL	54
III.1 - Descripción de HUM	54
III.2 - La desigualdad inversa	58
III.3 - El resultado principal	65
III.4 - El caso de los coeficientes variables en dimensión $n=1$	66
III.5 - Comentarios	72

IV - CONTROLABILIDAD INTERNA DE LA ECUACION DE ONDAS SEMILINEAL	79
IV.1 - Formulaci3n del problema	79
IV.2 - Descripci3n del m3todo de punto fijo ..	83
IV.3 - Controlabilidad interna de la ecuaci3n de ondas con potencial	86
IV.4 - Controlabilidad uniforme	95
IV.5 - El resultado principal	98
IV.6 - Controlabilidad local en el caso superlineal	101
IV.7 - Comentarios	109
V - ECUACION DE ONDAS CON DISIPACION INTERNA NO LINEAL	117
V.1 - Formulaci3n del problema	117
V.2 - El problema de valores iniciales	119
V.3 - El Principio de Invarianza de La Salle y sus consecuencias	121
V.4 - Orden de decaimiento de la energ3a	125
V.5 - Comentarios	138
VI - ESTABILIZACION FRONTERA DE LA ECUACION DE ONDAS	145
VI.1 - Formulaci3n del problema	145
VI.2 - El problema de valores iniciales	152
VI.3 - Consecuencias del Principio de Invarianza de La Salle	156
VI.4 - Estimaciones sobre la velocidad de decaimiento	161
VI.5 - Segunda demostraci3n del decaimiento exponencial	172
VI.6 - Comentarios	180

I - INTRODUCCION Y FORMULACION DE LOS PROBLEMAS

I.1 - El problema de la Controlabilidad Exacta.

Sea Ω un dominio abierto y acotado de \mathbb{R}^n con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ de clase C^2 .

Consideremos la ecuaci3n de ondas con condiciones de contorno de tipo Dirichlet

$$(1) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = h(x,t) & \text{en } Q = \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{en } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ y(x,0) = y^0(x), y'(x,0) = y^1(x) \end{cases}$$

(Hemos utilizado la notaci3n $' = \partial/\partial t$).

Bajo condiciones de regularidad y compatibilidad adecuadas sobre los datos iniciales $\{y^0, y^1\}$ y el segundo miembro $h(x,t)$, el problema (1) admite una soluci3n 3nica $y = y(x,t)$ (vease por ejemplo H.Brezis [4], A.Haraux [26] y J.L. Lions [56]).

La energ3a del sistema (1) est3 representada por la siguiente cantidad

$$(2) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla y(x,t)|^2 + |y'(x,t)|^2] dx$$

En el caso homog3neo en que $h \equiv 0$, multiplicando la ecuaci3n por y' e integrando por partes se obtiene que

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0$$

es decir, la energ3a se conserva a lo largo de la trayectoria.

Una consecuencia inmediata de esta ley de conservación de la energía es la siguiente: ninguna solución no trivial de la ecuación de ondas libre ($h \equiv 0$) alcanza el estado de equilibrio en ningún instante de tiempo.

El problema de la controlabilidad exacta consiste precisamente en conducir todas las trayectorias al equilibrio en un tiempo uniforme mediante la acción de una fuerza externa o control (que en el caso que estamos considerando viene representado por el segundo miembro h de la ecuación).

De manera más precisa, el problema de la controlabilidad exacta puede ser formulado de la siguiente forma: Estudiar la existencia de un tiempo $T > 0$ tal que para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\}$ exista un control $h = h(x, t)$ tal que la solución $y = y(x, t)$ de (1) verifique

$$(3) \quad y(T) = y'(T) = 0.$$

El problema así formulado es ligeramente ambiguo ya que no hemos precisado el tiempo T del que disponemos para controlar el sistema, el conjunto de datos iniciales que tenemos que controlar ni el conjunto de controles h de los que disponemos. Obviamente, en general, la posibilidad de obtener un resultado de controlabilidad exacta dependerá de cómo se elijan el tiempo T , el espacio de los datos iniciales y el espacio de los controles.

En la formulación anterior del problema no hemos impuesto ninguna restricción sobre el soporte del control

h y esto hace que la resolución del problema sea trivial. En efecto, sean $T > 0$ y $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ cualesquiera. Consideremos dos funciones $a = a(t)$, $b = b(t) \in C^2([0, T])$ tales que

$$a(0) = 1, a'(0) = 0; a(T) = a'(T) = 0$$

$$b(0) = 0, b'(0) = 1; b(T) = b'(T) = 0.$$

Entonces, la función

$$y(x, t) = a(t)y^0(x) + b(t)y^1(x)$$

verifica

$$y(0) = y^0, y'(0) = y^1; y(T) = y'(T) = 0.$$

Por lo tanto el control

$$h = y'' - \Delta y = a''(t)y^0 + b''(t)y^1 - a(t)\Delta y^0 - b(t)\Delta y^1$$

responde a la cuestión.

Hemos demostrado por tanto el siguiente resultado: "Dado $T > 0$ arbitrario, para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe un control $h \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$ tal que la solución de (1) verifica (3)".

En realidad, gracias a la linealidad y reversibilidad de la ecuación de ondas se tiene que: Dado $T > 0$ arbitrario, para cada $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe un control $h \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$ tal que la solución de (1) verifica

$$(4) \quad y(T) = z^0, y'(T) = z^1.$$

En efecto, sea $z = z(x, t)$ la solución de

$$(5) \quad \begin{cases} z'' - \Delta z = 0 & \text{en } Q \\ z = 0 & \text{en } \Sigma \\ z(T) = z^0, z'(T) = z^1. \end{cases}$$

El problema (5) admite una solución única

$$(6) \quad z \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Definamos la nueva variable

$$(7) \quad \xi = y - z.$$

Entonces, y satisface (1) si y sólo si ξ verifica

$$(8) \quad \begin{cases} \xi'' - \Delta \xi = h & \text{en } Q \\ \xi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \xi(0) = y^0 - z(0), \xi^1(0) = y^1 - z^1(0) \end{cases}$$

y se tiene (4) si y sólo si

$$(9) \quad \xi(T) = \xi'(T) = 0.$$

Por lo demostrado anteriormente y como $\{y^0 - z(0), y^1 - z^1(0)\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe un control $h \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$ tal que la solución de (8) verifica (9), lo cual implica que la solución de (1) verifica (4).

Por lo tanto, demostrar que todo estado inicial puede ser conducido al equilibrio equivale a demostrar que todo estado inicial puede ser conducido a todo estado final.

Es importante tener en cuenta que en la prueba de esta equivalencia hemos utilizado de forma crucial la linealidad y reversibilidad del sistema.

Vemos por tanto que el problema de la controlabilidad exacta con control interno distribuido en todo el dominio Ω es trivial y que se tiene la controlabilidad en un tiempo arbitrariamente pequeño.

Sin embargo, los problemas en los que el control interno está localizado y el control interviene en las condiciones de contorno son mucho más delicados y su resolución precisará de importantes desarrollos.

Control interno localizado

Sea $\omega \subset \Omega$ un subconjunto abierto y no vacío de Ω . Denotemos mediante X_ω la función característica de ω y consideremos la ecuación de ondas

$$(10) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = h X_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1. \end{cases}$$

El problema de la controlabilidad exacta se formula de manera análoga: "Hallar un tiempo $T > 0$ tal que para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\}$ exista un control h tal que la solución de (10) verifique (3)".

En este caso el control h actúa únicamente sobre el subconjunto ω . Se trata por tanto de un problema de controlabilidad exacta en el que el control es de tipo

interno y está localizado.

Debido a la velocidad finita de propagación de las ondas (=1 en nuestra ecuación) para que se tenga controlabilidad exacta, el tiempo T habrá de ser suficientemente grande (de manera que la acción ejercida por el control sobre ω se propague a todo Ω). Además, cuanto menor sea ω mayor será el tiempo de controlabilidad.

Control frontera

Sea $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un subconjunto abierto no vacío de Γ y consideremos la ecuación de ondas siguiente con condiciones de contorno no homogéneas:

$$(11) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } Q \\ y = \begin{cases} v \\ 0 \end{cases} & \text{en } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1. & \text{en } \Sigma_1 = \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases}$$

El problema de la controlabilidad exacta frontera se formula de la siguiente manera: "Hallar $T > 0$ tal que para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\}$ exista un control v de manera que la solución de (11) verifique (3)".

Nuevamente, debido a la velocidad finita de propagación, sólo se tendrá controlabilidad exacta frontera si T es suficientemente grande.

Tal y como veremos en los dos capítulos siguientes, tanto el problema del control interno localizado como el problema del control frontera, son problemas complejos.

Los resolveremos utilizando el método HUM (Hilbert Uniqueness Method) introducido por J.L.Lions en [53], [54], [56]. Este método, además de ser muy flexible, tiene la ventaja de proporcionar sistemáticamente el control optimal, es decir, el control que minimiza un cierto costo que surge de manera natural en el estudio del problema.

El mismo tipo de cuestiones se plantea para ecuaciones de ondas semilineales. En el Capítulo IV presentaremos un método que combina HUM y una técnica de punto fijo y que permite resolver el problema cuando la no linealidad es globalmente Lipschitz.

1.2 - El problema de la estabilización.

Tal y como hemos visto en el apartado anterior, la energía de las soluciones de la ecuación de ondas libre se conserva. El problema de la estabilización consiste en forzar el decaimiento exponencial uniforme de la energía cuando $t \rightarrow +\infty$ mediante la acción de un control h que venga dado en forma de "feedback" (de manera que el valor del control h en un instante de tiempo dado t_0 pueda ser calculado en función de la solución del sistema en ese instante) y que representa un término disipativo.

De manera más precisa, buscamos una función

$$F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que la solución de

$$(12) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = F(x, y, y') & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

decaiga exponencialmente cuando $t \rightarrow +\infty$ en el espacio de la energía de manera uniforme, i.e., que existan constantes $C > 1$ y $\gamma > 0$ tales que se tenga

$$(13) \quad E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t} \quad \forall t > 0$$

para toda solución de (12).

Con el objeto de motivar el tipo de funciones F que pueden producir un decaimiento exponencial de la energía, calculemos primeramente aquellas que hacen que la energía decrezca con el tiempo.

Se tiene, al menos formalmente (todo esto será estudiado rigurosamente en cada ejemplo):

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\Omega} F(x, y, y') y' dx.$$

Por lo tanto, un primer candidato será

$$F(x, y, y') = -a(x)y'$$

donde $a = a(x)$ es una función no negativa. Obtendremos así el sistema

$$(14) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + a(x)y' = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1. \end{cases}$$

En el caso más simple en que

$$(15) \quad \exists a_0, a_1 > 0: a_0 \leq a(x) \leq a_1 \quad \forall x \in \Omega$$

la demostración del decaimiento exponencial es muy sencilla.

Dado $\varepsilon > 0$ se define la siguiente perturbación de la energía

$$(16) \quad E_{\varepsilon}(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} yy' dx$$

Obviamente, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, entonces

$$(17) \quad \frac{1}{2} E_{\varepsilon}(t) \leq E(t) \leq 2E_{\varepsilon}(t) \quad \forall t > 0$$

para toda solución (basta con tomar $\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2}$ donde λ_1 es el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$).

Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\varepsilon}}{dt}(t) &= \frac{dE}{dt}(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} yy' dx \right) \\ &= - \int_{\Omega} a(x) |y'|^2 dx + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} yy' \right) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} yy' dx \right) &= \int_{\Omega} |y'|^2 dx + \int_{\Omega} yy'' dx = \\ &= \int_{\Omega} |y'|^2 dx + \int_{\Omega} y(\Delta y - a(x)y') dx = \\ &= \int_{\Omega} |y'|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \int_{\Omega} a(x) yy' dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(18) \quad \frac{dE_\epsilon}{dt}(t) = \int_{\Omega} (\epsilon - a(x)) |y'|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \epsilon \int_{\Omega} a(x) y y' dx.$$

Por otra parte

$$(19) \quad \left| \int_{\Omega} a(x) y y' dx \right| \leq a_1 \int_{\Omega} |y| |y'| dx \leq \\ \leq a_1 \left(\frac{\lambda_1}{2a_1} \int_{\Omega} |y|^2 dx + \frac{a_1}{2\lambda_1} \int_{\Omega} |y'|^2 dx \right) \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \frac{a_1^2}{2\lambda_1} \int_{\Omega} |y'|^2 dx$$

y por tanto

$$(20) \quad \frac{dE_\epsilon}{dt}(t) \leq \int_{\Omega} \left(\epsilon \left(1 + \frac{a_1^2}{2\lambda_1} \right) - a(x) \right) |y'|^2 dx - \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx.$$

Elegimos

$$\epsilon < \epsilon_1 = \frac{a_0 \lambda_1}{2\lambda_1 + a_1^2}$$

y se tiene

$$\frac{dE_\epsilon}{dt}(t) \leq -\frac{a_0}{2} \int_{\Omega} |y'|^2 dx - \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx \leq -\epsilon E(t) \leq -\frac{\epsilon}{2} E_\epsilon(t)$$

de donde se deduce que

$$(21) \quad E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0) e^{-\frac{\epsilon}{2}t} \quad \forall t > 0$$

y por tanto

$$(22) \quad E(t) \leq 4E(0) e^{-\frac{\epsilon}{2}t} \quad \forall t > 0.$$

Hemos demostrado por tanto que: "Si $a = a(x)$ verifica (15), entonces existen constantes $C > 1$ y $\gamma > 0$ tales que toda solución de (14) verifica (13)".

El hecho de que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega$$

corresponde a que la disipación sea efectiva en todo el dominio Ω . La situación es mucho más delicada si la disipación es efectiva únicamente en un subconjunto ω de Ω o si la disipación interviene en las condiciones de contorno.

Disipación interna localizada

Sea $\omega \subset \Omega$ un subconjunto abierto no vacío y suponemos que $a \in L^\infty(\Omega)$ verifica

$$(23) \quad a(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega; \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \omega.$$

En este caso la disipación es únicamente efectiva en ω .

El problema de la estabilización se formula de manera análoga: "Existen constantes $C > 1$ y $\gamma > 0$ tales que las soluciones de (14) verifiquen (13)?".

El mismo tipo de cuestiones se plantea para ecuaciones semilineales de la forma

$$y'' - \Delta y + f(y) + a(x)y' = 0.$$

Incluso se pueden considerar ecuaciones con términos disipativos no lineales del tipo

$$y'' - \Delta y + a(x)g(y') = 0.$$

En esta situación, en general, no se puede esperar un decaimiento exponencial uniforme de la energía pero si se pueden buscar estimaciones sobre el orden de decaimiento de las soluciones en función de las propiedades de la no linealidad g .

Disipación frontera

Sea $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un subconjunto abierto no vacío de la frontera y $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ su complementario. Consideremos la ecuación de ondas libre con condición Dirichlet sobre Γ_1 :

$$(24) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty). \end{cases}$$

Notese que en (24) no hemos impuesto ninguna condición de contorno sobre Γ_0 . El problema de la estabilización consiste precisamente en definir condiciones de contorno disipativas sobre $\Gamma_0 \times (0, \infty)$ de forma que se tenga un decaimiento exponencial uniforme de la energía, es decir, (13) para algunas constantes $C > 1$ y $\gamma > 0$.

La manera de obtener dichas condiciones de contorno no es nuevamente derivar formalmente la energía e imponer las condiciones necesarias para que la cantidad obtenida sea no positiva.

Se tiene

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu} y' d\sigma$$

y por tanto las condiciones de contorno más naturales son del tipo

$$(25) \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = -a(x)y' \quad \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty)$$

con $a = a(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma_0$.

Habiendo elegido un sistema del tipo (24)-(25) el problema consiste en obtener condiciones sobre la partición $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ y la función $a = a(x)$ de manera que se tenga (13).

Nuevamente estas cuestiones se pueden plantear en el marco de las ecuaciones de ondas semilineales.

En el Capítulo V de estas notas estudiaremos el caso de la disipación no lineal distribuida sobre todo el dominio Ω . No abordaremos el problema de la disipación interna localizada para el cual referimos a A.Haraux [29] y E.Zuazua [77], [78].

Tal y como veremos en los siguientes capítulos, tanto el problema de la controlabilidad exacta, gracias a la aplicación de HUM, como el problema de la estabilización se resuelven obteniendo estimaciones a priori adecuadas que permitan mayorar la energía total de las soluciones en función de alguna energía localizada en la región (del interior del dominio o de la frontera) donde se ejerce la acción del control o del mecanismo disipativo. Para obtener estas estimaciones utilizaremos técnicas de multiplicadores que combinaremos con principios de continuación única.

II - CONTROLABILIDAD FRONTERA DE LA ECUACIÓN DE ONDAS LINEAL

II.1 - Descripción del método HUM.

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^2 . Sea $T > 0$ y $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un subconjunto abierto no vacío de Γ .

Consideremos la ecuación de ondas siguiente con condiciones de contorno no homogéneas:

$$(1) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } Q = \Omega \times (0, T) \\ y = \begin{cases} v & \text{en } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ 0 & \text{en } \Sigma_1 = (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T) \end{cases} \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1. \end{cases}$$

Vamos a estudiar la controlabilidad exacta en la clase de datos iniciales $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Asimismo, los controles serán tomados en la clase $L^2(\Sigma_0)$.

En este marco funcional el problema de la controlabilidad exacta se formula de la siguiente forma: "Hallar $T > 0$ tal que para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ exista un control $v \in L^2(\Sigma_0)$ tal que la solución de (1) verifique

$$(2) \quad y(T) = y'(T) = 0"$$

Observación 1.

Debido a la velocidad finita de propagación de las ondas (=1 en el modelo que estamos considerando) para que se pueda tener un resultado de controlabilidad exacta será preciso que T sea suficientemente grande, es decir, $T > T_0$ con

$T_0 > 0$ dependiente de Ω y Γ_0 .

Además, en el marco funcional elegido, se tendrá controlabilidad exacta cuando Γ_0 sea una parte suficientemente grande de Γ . \square

Observación 2.

Tal y como observamos en el capítulo I, gracias a la linealidad y reversibilidad de la ecuación, el problema puede plantearse de la siguiente forma equivalente: Hallar $T > 0$ tal que para todo par de datos iniciales y de datos finales $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ exista un control $v \in L^2(\Sigma_0)$ tal que la solución de (1) verifique

$$(3) \quad y(T) = z^0, \quad y'(T) = z^1. \quad \square$$

Este tipo de problemas han sido estudiados por diversos autores. D.L. Russell en un artículo [67] de 1978 hace una recopilación de los métodos y resultados más relevantes que habían sido desarrollados y obtenidos hasta aquel momento. Si bien se contaba ya con numerosos resultados importantes, no se disponía de un método sistemático para el tratamiento de estos problemas. J.L. Lions [53] en 1986 propuso un método que denominó H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method) y que reduce el problema de la controlabilidad exacta a la obtención de estimaciones a priori adecuadas.

A lo largo de este capítulo seguiremos muy de cerca el capítulo I del libro de J.L. Lions [56], utilizando el método H.U.M.. Todos los resultados que aquí presenta-

mos, salvo los correspondientes al apartado II.7 en el que se aborda el problema con coeficientes variables, han sido sacados de [56].

La adaptación del método H.U.M. para el estudio de la controlabilidad exacta de (1) es la siguiente.

Dados $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ resolvemos el sistema

$$(4) \quad \begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ \phi(0) = \phi^0; \phi'(0) = \phi^1. \end{cases}$$

El problema (4) admite una solución única. Una vez calculada, resolvemos la ecuación

$$(5) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } Q \\ y(T) = y'(T) = 0 \\ y = \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} & \text{sobre } \Sigma_0 \\ 0 & \text{sobre } \Sigma_1. \end{cases} \end{cases}$$

En (5), $\nu = \nu(x)$ denota la normal unitaria exterior a Ω en el punto $x \in \Gamma$ y $\partial/\partial \nu$ la derivación en esta dirección.

El problema (5) admite nuevamente una única solución regular.

Definimos el operador

$$(6) \quad \Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\}.$$

Multiplicando en (5) por $\theta = \theta(x, t)$, una solución de (4) con datos iniciales $\{\theta^0, \theta^1\}$, e integrando por partes

se obtiene

$$(7) \quad \langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\theta^0, \theta^1\} \rangle = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma$$

donde $d\Sigma = d\Gamma dt$ representa la medida sobre la superficie lateral Σ del cilindro Q .

En particular se tiene

$$(8) \quad \langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma.$$

Supongamos que T y Γ_0 son tales que se tiene el siguiente resultado de unicidad:

$$(9) \quad \begin{cases} \text{Si } \phi \text{ solución de (4) verifica } \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma_0, \\ \text{entonces } \phi \equiv 0 \text{ y por tanto } \{\phi^0, \phi^1\} = \{0, 0\}. \end{cases}$$

En este caso, la aplicación

$$(10) \quad \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \left(\int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \right)^{1/2}$$

define una norma sobre $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Sea

$$(11) \quad F = \text{espacio de Hilbert completado de } \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \text{ con respecto a la norma } \|\cdot\|_F.$$

Gracias a (7), el operador Λ se extiende a un operador lineal y continuo de F en F' . Por otra parte, de (10) deducimos que

$$(12) \quad \Lambda: F \rightarrow F' \text{ es un isomorfismo.}$$

Por lo tanto, dados datos iniciales $\{y^0, y^1\}$ tales que

$$(13) \quad \{y^1, -y^0\} \in F'$$

el problema

$$(14) \quad \Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}, \{\phi^0, \phi^1\} \in F$$

admite una única solución.

Pero (14) equivale a que $y = y(x, t)$ solución de (5), correspondiente a ϕ solución de (4) con datos $\{\phi^0, \phi^1\}$, verifique

$$(15) \quad y(0) = y^0; \quad y^1(0) = y^1.$$

El control buscado viene dado por tanto de la siguiente forma

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma_0}$$

donde $\phi = \phi(x, t)$ es la solución de (4) correspondiente a los datos $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ que verifican (14).

Observese que por construcción

$$v \in L^2(\Sigma_0).$$

Hemos demostrado por tanto el siguiente resultado:

"Si $\Gamma_0 \subset \Gamma$ y $T > 0$ son tales que se verifica el resultado de unicidad (9), para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\}$ tales que $\{y^1, -y^0\} \in F'$ existe, un control $v \in L^2(\Sigma_0)$ de manera que la solución y de (1) verifica (2)".

Gracias al Teorema de Holmgren (c.f. Th.5.5.3 de L.Hormander [32] o apartado I.8 de J.L.Lions [56]) se sabe que para todo Γ_0 subconjunto abierto de Γ , existe $T_0 = T_0(\Gamma_0, \Omega)$ tal que el resultado de unicidad se verifica si $T > T_0$.

El resultado obtenido es satisfactorio ya que se aplica para todo $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Sin embargo, es poco preciso ya que no se conoce el espacio F' de los datos iniciales controlados.

El problema que queda por resolver es por tanto la identificación del espacio F' o lo que es lo mismo, de F . Pero como F es el completado de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ con respecto de la norma $\|\cdot\|_F$, la cuestión se reduce a demostrar la equivalencia de esta norma con alguna norma conocida.

En particular, si queremos demostrar la controlabilidad exacta en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, precisaremos probar que

$$F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

o equivalentemente

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

lo cual a su vez equivale a establecer la existencia de constantes $c > 0, C > 0$ tales que

$$(16) \quad c \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F \leq C \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ \forall \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega).$$

En los dos apartados siguientes demostraremos que (16) se verifica si Γ_0 es una parte suficientemente grande de Γ (en un sentido que precisaremos más adelante) y $T > 0$ es suficientemente grande.

II.2 - La desigualdad directa.

Comenzamos demostrando una identidad para las soluciones de

$$(17) \quad \begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f & \text{en } Q \\ \theta = 0 & \text{en } \Sigma \\ \theta(0) = \theta^0, \theta'(0) = \theta^1. \end{cases}$$

Lema 1. Sea $q = q(x) \in (C^1(\bar{Q}))^n$. Para toda solución de (17) con datos $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(Q)$ se tiene

$$(18) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (q \cdot v) \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|^2 d\Sigma = \int_{\Omega} \theta' q \cdot \nabla \theta \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} q) (|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2) + \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \int_Q \theta' q' \cdot \nabla \theta - \int_Q f q \cdot \nabla \theta.$$

Demostración. Basta multiplicar la ecuación por $q \cdot \nabla \theta$ e integrar por partes en Q . \square

Observación 1. Mediante \cdot denotamos el producto escalar de \mathbb{R}^n . En (18) hemos utilizado la convención de sumación de índices repetidos y hemos omitido tanto las variables (x, t) como los símbolos dx y dt en los

signos de integración.

Asimismo, hemos utilizado la notación

$$\operatorname{div} q = \text{divergencia de } q = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial x_k}.$$

Por último,

$$\int_{\Omega} \theta' q \cdot \nabla \theta \Big|_0^T = \int_{\Omega} \theta'(x, T) q(x) \cdot \nabla \theta(x, T) dx - \int_{\Omega} \theta'(x, 0) q(x) \cdot \nabla \theta(x, 0) dx \quad \square$$

De la identidad (18) se obtiene fácilmente la siguiente estimación.

Teorema 1. Existe una constante $c > 0$ tal que

$$(19) \quad \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial v} \right|^2 d\Sigma \leq c(1+T) (\|\theta^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\theta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^2)$$

para todo $T > 0$ y toda solución de (17) con datos

$$\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Demostración. Sea $h = h(x) \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$ un campo vectorial tal que

$$h = v \text{ sobre } \Gamma.$$

Este campo existe ya que Ω es de clase C^2 (vease J.L. Lions [56], p. 28, para su construcción).

Aplicando la identidad (18) con $q = h$ obtenemos

$$(20) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C \left(\|\theta'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\theta\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \right. \\ \left. + \|\theta'\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2(Q)}^2 + \right. \\ \left. + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right).$$

con $C = C(\|q\|_{W^{1,\infty}(\Omega)})$.

Ahora bien, resultados clásicos de regularidad para la ecuación de ondas nos proporcionan la estimación

$$(21) \quad \|\theta'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\theta\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq \\ \leq \|\theta^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\theta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2.$$

Combinando (20) y (21) se obtiene (19) para soluciones de (17) con datos regulares. La estimación se extiende a soluciones con datos $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$ por un simple argumento de densidad. \square

Observación 2. El multiplicador $h \cdot \nabla \theta$ fue introducido por F. Rellich en el marco de las ecuaciones elípticas. La adaptación al caso hiperbólico y la obtención de (19) es debida a J.L. Lions [55]. El mismo método permite demostrar una estimación análoga para ecuaciones con coeficientes variables

$$\theta'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla\theta) = f$$

con $a = a(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (c.f. [55]).

Este tipo de estimaciones han sido extendidas a ecuaciones semilineales

$$\theta'' - \Delta\theta + g(\theta) = f$$

por J.L. Lions [58] y M. Milla Miranda y L.A. Medeiros [62].

Observación 3. La desigualdad (19) proporciona un resultado de regularidad adicional. En efecto, la solución de (17) con datos $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$ pertenece a la clase

$$\theta \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$$

de donde no se deduce que

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma). \quad \square$$

II.3 - La desigualdad inversa.

Dado un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ definimos $m(x) = x - x^0$ y $m(x^0) = \|m\|_{L^\infty(\Omega)}$

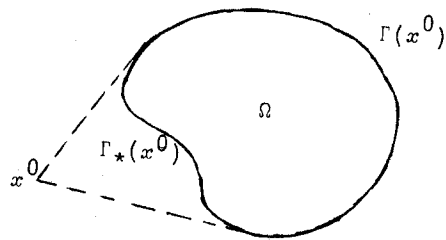
Dividimos la frontera Γ de Ω en dos partes (vea se la figura)

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}$$

$$\Gamma_*(x^0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} = \Gamma \setminus \Gamma(x^0)$$

así como la frontera lateral Σ :

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0, T); \quad \Sigma_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times (0, T) = \Sigma \setminus \Sigma(x^0).$$



Consideremos la ecuación homogénea

$$(22) \quad \begin{cases} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1. \end{cases}$$

Se tiene el siguiente resultado

Teorema 2. Sea $T > 2R(x^0)$. Entonces, para toda solución de (22) con datos iniciales $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ se tiene la estimación

$$(23) \quad \begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla \phi^0(x)|^2 + |\phi^1(x)|^2] dx \leq \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2(T - 2R(x^0))} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Demostración. Aplicamos la identidad (18) con $f = 0$, $\theta = \phi$ y $q(x) = m(x) = x - x^0$. Obtenemos

$$(24) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \phi' m \cdot \nabla \phi \Big|_0^T + \frac{n}{2} \int_Q |\phi'|^2 + (1 - \frac{n}{2}) \int_Q |\nabla \phi|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (m \cdot \nu) \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} (m \cdot \nu) \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{n}{2} \int_Q |\phi'|^2 + (1 - \frac{n}{2}) \int_Q |\nabla \phi|^2 &= \frac{1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2) + \frac{n-1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) = \\ &= TE_0 + \frac{n-1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) \end{aligned}$$

ya que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\phi'(x, t)|^2 + |\nabla \phi(x, t)|^2) dx$$

se conserva a lo largo de la trayectoria, es decir,

$$E(t) = E_0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Multiplicando la ecuación por ϕ e integrando por partes se obtiene fácilmente

$$(26) \quad \int_{\Omega} \phi' \phi \Big|_0^T = \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2).$$

La última identidad se conoce como la fórmula de equirepartición de la energía.

Combinando (24), (25) y (26) deducimos

$$X(t) \Big|_0^T + TE_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma$$

con

$$(28) \quad X(t) = \int_{\Omega} \phi'(x, t) (m(x) \cdot \nabla \phi(x, t) + \frac{n-1}{2} \phi(x, t)) dx.$$

Basta por tanto probar que

$$(29) \quad \|X(\cdot)\|_{L^{\infty}(0, T)} \leq R(x^0) E_0.$$

Para simplificar la notaci3n omitiremos la dependencia de X en t . Se tiene

$$(30) \quad |X| \leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\phi'|^2 + \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega} |m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi|^2, \quad \forall \delta > 0.$$

Adem3s

$$(31) \quad \int_{\Omega} |m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi|^2 \leq \int_{\Omega} |m|^2 |\nabla \phi|^2 + \left(\frac{n-1}{4}\right)^2 \int_{\Omega} |\phi|^2 + (n-1) \int_{\Omega} m \cdot \nabla \phi \phi.$$

Como

$$\int_{\Omega} m \cdot \nabla \phi \phi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m \cdot \nabla (\phi^2) = -\frac{n}{2} \int_{\Omega} \phi^2$$

deducimos

$$(32) \quad \int_{\Omega} |m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi|^2 \leq R^2(x^0) \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 + \left(\frac{n-1}{4} - \frac{n(n-1)}{2}\right) \int_{\Omega} \phi^2 \leq R^2(x^0) \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2.$$

De (30) y (32) se obtiene

$$|X| \leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\phi'|^2 + \frac{R^2(x^0)}{2\delta} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2$$

de donde se deduce (29) eligiendo $\delta = R(x^0)$. \square

Observaci3n 4. L.F.Ho en [31] estableci3 por primera vez una estimaci3n del tipo (23) para $T > T_1$ con $T_1 > 2R(x^0)$. Seguidamente, J.L.Lions en [54] demostr3 que si $T > 2R(x^0)$ se ten3a

$$E_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma$$

para una constante $C > 0$. En [54] la constante C no se obten3a de forma expl3cita ya que en la demostraci3n se utilizaba un argumento de "compacidad-unicidad".

Finalmente, la estimaci3n (23) fue demostrada por V.Komornik en [35]. \square

II.4 - El resultado principal.

Teorema 3. Sea x^0 un punto cualquiera de \mathbb{R}^n y $T > 2R(x^0)$.

Entonces, para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe un control $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ tal que la soluci3n de

$$(33) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } Q \\ y = \begin{cases} v & \text{en } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{en } \Sigma_*(x^0) \end{cases} \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la aplicación de HUM desarrollada en el apartado II.1 y de los Teoremas 1 y 2.

En efecto, del Teorema 1 aplicado con $f=0$ y $\theta = \phi$ y del Teorema 2 se deduce que si $T > 2R(x^0)$ se verifica (16), lo cual implica que $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y por tanto $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. \square

Observación 5. Tal y como veremos en el siguiente apartado, la solución $y = y(x, t)$ de (33) pertenece a la clase

$$C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)).$$

Por tanto las trazas de y e y' para $t=T$ están bien definidas. \square

II.5 - Soluciones débiles de la ecuación de ondas con condiciones de contorno no homogéneas.

En este apartado estudiaremos la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de

$$(34) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } Q \\ y = v & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4. Para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ y cada condición de contorno $v \in L^2(\Sigma)$ existe una única solución de (34) en la clase

$$(35) \quad y \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)).$$

Además, la aplicación $\{y^0, y^1, v\} \rightarrow \{y, y'\}$ es lineal y continua de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ en $C([0, T]; L^2(\Omega)) \times C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$, es decir, para cada $T > 0$ existe una constante $C(T) > 0$ tal que

$$(36) \quad \|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|y'\|_{L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C(T) (\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}).$$

Demostración. El caso en que la condición de contorno es homogénea, es decir $v=0$, es bien conocido. Por la linealidad de la ecuación basta por tanto considerar el caso en que $y^0 = y^1 = 0$, $v \neq 0$.

La solución de

$$(37) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } Q \\ y = v & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

se define por el método de la transposición.

Sea $\theta = \theta(x, t)$ una solución de la ecuación

$$(38) \quad \begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f & \text{en } Q \\ \theta = 0 & \text{en } \Sigma \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 \end{cases}$$

con $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$.

Multiplicando (formalmente) la ecuación (37) por θ e integrando por partes se obtiene

$$(39) \quad \int_Q yf = \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma.$$

Adoptamos (39) como formulación de solución débil de (37). Es decir, diremos que $y = y(x, t)$ es solución de (37) si y sólo si verifica (39) para todo $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$.

La estimación (19) se aplica a las soluciones de (38) gracias a la reversibilidad de la ecuación de ondas con respecto a la variable tiempo. Por tanto

$$(40) \quad \left| \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma \right| \leq \|v\|_{L^2(\Sigma)} \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|v\|_{L^2(\Sigma)} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}$$

De (40) se deduce que la aplicación

$$f \rightarrow \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma$$

es lineal y continua de $L^1(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$. Deducimos así la existencia de una única $y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ que verifica

(39) para todo $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$. La desigualdad (40) proporciona además la estimación

$$(41) \quad \|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \|v\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Veamos que se tiene la continuidad de la solución $t \in [0, T] \rightarrow y(t) \in L^2(\Omega)$. En efecto, aproximamos $v \in L^2(\Sigma)$ mediante una sucesión $\{v_n\} \subset \mathcal{D}((0, T); C^2(\Gamma))$ tal que

$$(42) \quad v_n \rightarrow v \text{ en } L^2(\Sigma).$$

Sea y_n la solución de (37) asociada a v_n . Como v_n es regular, y_n es regular y en particular

$$y_n \in C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Por otra parte, de (41) y (42) se deduce que

$$y_n \rightarrow y \text{ en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

de donde se concluye que $y \in C([0, T]; L^2(\Omega))$.

Veamos ahora que $y' \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$. Dado $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ aplicamos (39) con $f = g'$ y se deduce que

$$(43) \quad \int_Q yg' = \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma$$

es decir $\theta = \theta(x, t)$ es solución de

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = g' & \text{en } Q \\ \theta = 0 & \text{en } \Sigma \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0. \end{cases}$$

Supongamos que para todo $T > 0$ existe $C(T) > 0$ tal que

$$(45) \quad \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|g\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}$$

para toda solución de (44).

En estas condiciones, nuevamente por dualidad, se deduce que

$$(46) \quad y' \in L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega))$$

y la estimación

$$(47) \quad \|y'\|_{L^\infty(0,T; H^{-1}(\Omega))} \leq C \|v\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Finalmente, por densidad se obtiene

$$(48) \quad y' \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega)).$$

Basta por tanto demostrar la estimación (45). Este es el objeto del siguiente Lema. \square

Lema 2. Para todo $T > 0$ existe una constante $C = C(T) > 0$ tal que

$$(49) \quad \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(T) \|g\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}$$

para toda solución de (44).

Demostración. Por densidad, basta con que demostremos (49) para todo $g \in \mathcal{D}(Q)$.

Como en la demostración del Teorema 1, aplicamos la identidad (18) con $q = h$ donde $h \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$ verifica

$$h = v \text{ sobre } \Gamma.$$

Se obtiene

$$(50) \quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma = -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |\nabla \theta|^2 + \int_Q \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \int_Q (\theta'' - g') h \cdot \nabla \theta$$

(hemos utilizado el hecho de que

$$\int_Q \theta'' h \cdot \nabla \theta = \frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |\theta'|^2 + \int_{\Omega} \theta' h \cdot \nabla \theta \Big|_0^T.$$

Observamos que $\theta = \psi'$ donde $\psi = \psi(x,t)$ es solución de

$$(51) \quad \begin{cases} \psi'' - \Delta \psi = g & \text{en } Q \\ \psi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0. \end{cases}$$

Resultados clásicos de regularidad para la ecuación de ondas proporcionan la estimación

$$(52) \quad \|\psi\|_{L^\infty(0,T; H^2(\Omega))} + \|\psi'\|_{L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}$$

de donde se deduce

$$(53) \quad \|\theta\|_{L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}$$

Obtenemos por tanto

$$(54) \quad \left| -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |\nabla \theta|^2 + \int_Q \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right| \leq C \|g\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}^2$$

Habremos concluido la demostración de (49) si probamos la estimación

$$(55) \quad \left| \int_Q (\theta'' - g') h \cdot \nabla \theta \right| \leq C \|g\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}^2$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_Q (\theta'' - g') h \cdot \nabla \theta &= \int_Q (\psi''' - g') h \cdot \nabla \psi' = \\ &= - \int_Q (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi'' + \int_\Omega (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi' \Big|_0^T \end{aligned}$$

y como $\psi'' - g = \Delta \psi$ deducimos

$$(56) \quad \int_Q (\theta'' - g') h \cdot \nabla \theta = \int_\Omega \Delta \psi h \cdot \nabla \psi' \Big|_0^T - \int_Q (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi''$$

De (52) deducimos que

$$\left| \int_\Omega \Delta \psi h \cdot \nabla \psi' \Big|_0^T \right| \leq C \|g\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}^2$$

Basta por tanto estimar el último término de la identidad (56). Tenemos

$$(57) \quad \begin{aligned} \int_Q (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi'' &= -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |\psi''|^2 + \int_Q \operatorname{div}(gh) \psi'' = \\ &= -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) (|\Delta \psi|^2 + |g|^2 + 2\Delta \psi g) + \int_Q \operatorname{div}(gh) (\Delta \psi + g) \\ &= -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) (|\Delta \psi|^2 + 2\Delta \psi g) + \int_Q \operatorname{div}(gh) \Delta \psi - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |g|^2 + \int_Q g \operatorname{div}(gh) \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_Q g \operatorname{div}(gh) &= \int_Q |g|^2 \operatorname{div} h + \int_Q hg \nabla g = \\ &= \int_Q (\operatorname{div} h) |g|^2 + \frac{1}{2} \int_Q h \cdot \nabla (g^2) = \frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |g|^2 \end{aligned}$$

por tanto

$$(58) \quad \int_Q (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi'' = -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) (|\Delta \psi|^2 + 2\Delta \psi g) + \int_Q \operatorname{div}(gh) \Delta \psi$$

Combinando (52) y (58) se deduce fácilmente que

$$\left| \int_Q (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi'' \right| \leq C \|g\|_{L^1(0,T; H_0^1(\Omega))}^2$$

lo cual concluye la demostración de este Lema. \square

Observación 6. En J.L.Lions y E.Magenes [59] se pueden encontrar numerosas aplicaciones del método de transposición. El Teorema 4 es debido a J.L.Lions [56]. \square

Observación 7. Todos los resultados que hemos demostrado se extienden al caso en que Ω es un abierto convexo y acotado, sin hipótesis adicionales sobre la regularidad de Γ (cf. J.L.Lions [56], Cap. I). \square

II.6 - Algunas consideraciones geométricas.

1 - Hemos demostrado la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ con controles a soporte en subconjuntos de la frontera de la forma $\Gamma(x^0)$.

Es importante tener en cuenta que en general $\Gamma(x^0)$ constituye una parte "grande" de la frontera Γ .

En efecto, en el caso en que $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ es un cuadrado se tiene:

- (i) Si $x^0 \in \Omega$, $\Gamma(x^0) = \Gamma$
- (ii) Si $x^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$, $\Gamma(x^0) =$ unión de dos lados consecutivos
- (iii) Si $x^0 \in \Gamma$, $\Gamma(x^0) =$ unión de tres lados.

Por tanto, $\Gamma(x^0)$ contiene al menos dos de los cuatro lados de Γ .

Fijados los lados Γ_0 en los cuales el control ejercerá la acción y eligiendo x^0 adecuadamente podremos minimizar el tiempo $2R(x^0)$ de controlabilidad exacta. Así, si $\Gamma_0 = \Gamma$, eligiendo $x^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ obtendremos $2R(x^0) =$ diámetro de $\Omega = \sqrt{2}$; si $\Gamma_0 =$ unión de dos lados consecutivos, eligiendo $x^0 =$ vértice opuesto obtendremos $2R(x^0) = 2\sqrt{2}$; si $\Gamma_0 =$ unión de tres lados, eligiendo $x^0 =$ punto medio del

cuarto lado obtendremos $2R(x^0) = \sqrt{5}$.

Si $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ es el círculo unidad, es fácil comprobar que $\Gamma(x^0)$ contiene una semicircunferencia para todo $x^0 \in \mathbb{R}^2$. Además $\Gamma(x^0) \rightarrow$ semicircunferencia si y sólo si $|x^0| \rightarrow \infty$, es decir, si y sólo si el tiempo de controlabilidad $2R(x^0) \rightarrow \infty$.

En el caso en que los controles tienen su soporte en todo Γ , el tiempo de controlabilidad se minimiza tomando $x^0 = (0,0) =$ centro del círculo, en cuyo caso se tiene $2R(x^0) = 2$.

2 - C.Bardos, G.Lebeau y J.Rauch en [2], [3] han mejorado considerablemente estos resultados utilizando técnicas de Análisis Microlocal. Su resultado se aplica a dominios Ω con frontera de clase C^∞ y dice lo siguiente: "La ecuación de ondas es exactamente controlable en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ con controles en $L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ si y sólo si todo rayo de luz que se propaga en Ω y se refleja en su frontera según las leyes de la óptica geométrica, intersecta Γ_0 en un punto no difractivo y en un tiempo $t < T$ ".

Este resultado es óptimo ya que caracteriza los conjuntos Γ_0 para los cuales se tiene controlabilidad exacta en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ con controles en $L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$.

Mediante este resultado se mejora sensiblemente lo obtenido en el Teorema 3, en la mayoría de los casos. Por ejemplo, en el caso en que Ω es un círculo, se comprueba que existe un tiempo T para el cual se tiene controlabili

dad exacta con controles a soporte en un subconjunto cualquier de Γ que contenga una semicircunferencia. También se observa que se puede controlar exactamente con controles a soporte en algunas regiones constituidas de tres partes disjuntas y que no contienen ninguna semicircunferencia.

3 - Tal y como hemos mencionado en el apartado II.1, el Teorema de Holmgren asegura que dado $\Gamma_0 \subset \Gamma$ subconjunto abierto cualquiera, existe $T_0 = T_0(\Gamma_0, \Omega)$ tal que para todo $T > T_0$ se verifica el resultado de unicidad (9).

Por tanto, aplicando HUM, deducimos que si $T > T_0$ la ecuación de ondas es exactamente controlable con controles en $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ y para datos iniciales $\{y^0, y^1\}$ tales que

$$\{y^1, -y^0\} \in F'$$

donde $F = F(\Gamma_0, \Omega, T)$ es un espacio de Hilbert que a priori depende de Γ_0, Ω y T .

En el Teorema 3 hemos demostrado que si $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$ y $T > 2R(x^0)$, entonces $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Por otra parte, los resultados de [2], [3] proporcionan una caracterización de los conjuntos Γ_0 y los valores de T para los cuales $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Sin embargo, la caracterización (u obtención de informaciones útiles y manejables) del espacio F en el caso en que sabemos que no coincide con $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ es un problema abierto. Existen resultados de A.Haraux [25] en esta

dirección para el caso en que el soporte del control está contenido en un subconjunto de Ω (cf. apartado III.5). \square

II.7 - El caso de los coeficientes variables en dimensión $n = 1$.

Consideremos la siguiente ecuación de ondas con coeficientes variables

$$(59) \quad \begin{cases} y'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla y) = 0 & \text{en } Q \\ y = \begin{cases} v & \text{en } \Sigma_0 \\ 0 & \text{en } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

con

$$(60) \quad a = a(x) \in C^1(\bar{\Omega})$$

tal que

$$(61) \quad \exists a_0 > 0: a(x) \geq a_0 \quad \forall x \in \Omega.$$

La controlabilidad exacta de esta ecuación es un problema que todavía no es bien entendido. Se dispone de los siguientes resultados parciales:

(a) Si Ω es de frontera C^∞ y $a \in C^\infty(\bar{\Omega})$ los resultados de C.Bardos, G.Lebeau y J.Rauch mencionados en el apartado anterior se aplican también en este caso y caracterizan por tanto los subconjuntos Γ_0 de Γ y los valores de T para los cuales (59) es exactamente controlable en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, con controles en $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$.

(b) V. Komornik en [37] observó que el método de multiplicadores utilizado en los apartados anteriores se aplica si $a = a(x)$ verifica la hipótesis adicional siguiente

$$(62) \quad \exists \delta > 0: (1 - \delta)a(x) - \frac{\operatorname{div} a(x)(x - x^0)}{2} \geq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Bajo la hipótesis (62) se tiene la controlabilidad exacta en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ con controles en $L^2(\Gamma(x^0) \times (0, T))$ para $T > 0$ suficientemente grande.

Sin embargo, el caso general permanece abierto.

El objeto de este apartado es demostrar la controlabilidad exacta en el caso de una dimensión espacial $n = 1$ sin ninguna restricción sobre el coeficiente más que (60) y (61).

Sea por tanto $\Omega = (0, 1) \in \mathbb{R}$ y consideremos la ecuación

$$(63) \quad \begin{cases} y'' - (a(x)y_x)_x = 0 & \text{en } Q = (0, 1) \times (0, T) \\ y(0, t) = v(t) & \text{para } t \in (0, T) \\ y(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

Se tiene el siguiente resultado

Teorema 5. Supongamos que $a \in C^1([0, 1])$ es tal que (61) se verifica. Entonces, si $T > \frac{2}{\sqrt{a_0}}$, para cada $\{y^0, y^1\} \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ existe un control $v = v(t) \in L^2(0, T)$ tal que la solución de (63) verifica (2).

Observación 8. Se tiene el mismo resultado cuando el control actúa en el extremo $x = 1$, es decir, cuando consideramos las condiciones de contorno

$$y(0, t) = 0; y(1, t) = v(t) \quad \forall t \in (0, T).$$

En el caso en que el control actúa simultáneamente en ambos extremos del intervalo, es decir, cuando se tienen condiciones de contorno del tipo

$$y(0, t) = v(t); y(1, t) = w(t) \quad \forall t \in (0, T)$$

la controlabilidad exacta tiene lugar para $T > \frac{1}{\sqrt{a_0}}$ con controles $v(t), w(t) \in L^2(0, T)$. \square

Demostración. H.U.M. se adapta fácilmente a la ecuación (63). El problema se reduce a obtener la estimación

$$(64) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T |\phi_x(0, t)|^2 dt$$

para las soluciones de

$$(65) \quad \begin{cases} \phi'' - (a(x)\phi_x)_x = 0 & \text{en } (0, 1) \times (0, T) \\ \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0 & \forall t \in (0, T) \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1. \end{cases}$$

Tal y como notamos en la Observación 2, la desigualdad directa se extiende fácilmente a ecuaciones con coeficientes variables en cualquier dimensión n .

Para demostrar la desigualdad inversa definimos el funcional

$$(66) \quad F(x) = \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \{ |\phi'(x,t)|^2 + a(x) |\phi_x(x,t)|^2 \} dt$$

$$\text{con } \alpha = \frac{1}{\sqrt{a_0}}.$$

Observese que

$$(67) \quad F(0) = \frac{a(0)}{2} \int_0^T |\phi_x(0,t)|^2 dt.$$

Calculemos la derivada de F :

$$(68) \quad F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \left\{ \phi'(x,t) \phi_x'(x,t) + \frac{a_x(x)}{2} |\phi_x(x,t)|^2 + a(x) \phi_x(x,t) \phi_{xxx}(x,t) \right\} - \frac{\alpha}{2} \sum_{t=\alpha x, T-\alpha x} \{ |\phi'(x,t)|^2 + a(x) |\phi_x(x,t)|^2 \}.$$

Ahora bien, como

$$\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi'(x,t) \phi_x'(x,t) dt = - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi''(x,t) \phi_x(x,t) dt + \phi'(x,t) \phi_x(x,t) \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha x}$$

deducimos

$$(69) \quad F'(x) = \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \{ -\phi''(x,t) + a(x) \phi_{xxx}(x,t) + a_x(x) \phi_x(x,t) \} \phi_x(x,t) dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a_x(x) |\phi_x(x,t)|^2 dt + \phi'(x,t) \phi_x(x,t) \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha x} - \frac{\alpha}{2} \sum_{t=\alpha x, T-\alpha x} \{ |\phi'(x,t)|^2 + a(x) |\phi_x(x,t)|^2 \} \leq - \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a_x(x) |\phi_x(x,t)|^2 dt$$

ya que

$$\phi'' - a(x) \phi_{xxx} - a_x \phi_x = \phi'' - (a(x) \phi_x)_{xx} = 0$$

y

$$|\phi'(x,t) \phi_x(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left(\frac{1}{2} |\phi'(x,t)|^2 + \frac{a_0}{2} |\phi_x(x,t)|^2 \right) \leq \frac{\alpha}{2} (|\phi'(x,t)|^2 + a(x) |\phi_x(x,t)|^2), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in (0, 1).$$

De (69) deducimos

$$(70) \quad F'(x) \leq \frac{\|a_x\| L^\infty(0,1)}{2a_0} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a(x) |\phi_x(x,t)|^2 dt \leq \frac{\|a_x\| L^\infty(0,1)}{a_0} F(x)$$

y por tanto

$$(71) \quad F(x) \leq e^{\frac{\|a_x\| L^\infty(0,1)}{a_0} x} F(0) \leq e^{\frac{\|a_x\| L^\infty(0,1)}{a_0} x} F(0), \quad \forall x \in (0, 1)$$

Integrando (71) con respecto a $x \in (0, 1)$ obtenemos

$$(72) \quad \int_0^1 F(x) dx \leq e^{\frac{\|a_x\| L^\infty(0,1)}{a_0}} F(0).$$

Por último, como $T > 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{a_0}}$ observamos que

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{T-\alpha} \int_0^1 \{ |\phi'(x,t)|^2 + a(x) |\phi_x(x,t)|^2 \} dx dt \leq \int_0^1 F(x) dx$$

lo cual, combinado con la conservación de la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \{ |\phi'(x,t)|^2 + a(x) |\phi_x(x,t)|^2 \} dx = E(0)$$

proporciona la estimación

$$(73) \quad \int_0^1 \{ |\phi^1(x)|^2 + a(x) |\phi_x^0(x)|^2 \} dx \leq \frac{\|a_x\| L^\infty(0,1)}{a_0} F(0) = \frac{e}{(T-2\alpha)} \int_0^T a(0) |\phi_x(0,t)|^2 dt.$$

▣

Observación 9. El Teorema 4 sigue siendo válido cuando $a = a(x)$ es una función C^1 a trozos que verifica (61).

▣

Observación 10. De (69) se deduce que si $a = a(x)$ es una función monótona no decreciente

$$F'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1)$$

en cuyo caso la constante de la estimación (64) no depende

$$\text{de } \|a_x\|_{L^\infty(0,1)}.$$

Sin embargo, si $a = a(x) \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ es una función no monótona que verifica $a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, se obser-

va que la constante C_ε de la estimación (64) correspondiente a

$$(74) \quad \phi'' - \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi_x\right)_x = 0$$

es del orden de $C_\varepsilon \sim e^{C/\varepsilon}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Un problema abierto importante en el contexto de la controlabilidad exacta y la homogeneización consiste en saber si se pueden obtener estimaciones del tipo (64) con constantes C_ε uniformemente acotadas para ecuaciones del tipo (74) con coeficientes oscilantes.

Observe que el tiempo de controlabilidad exacta obtenido depende únicamente de la constante de coercividad a_0 y es por tanto uniforme para problemas del tipo (74). ▣

II.8 - Comentarios

1. Del Teorema 3 se deduce que si $T > 2R(x^0)$, para cada $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ el conjunto de controles admisibles

(74) $U_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma(x^0)) : \text{y solución de (33) verifica (2)}\}$ contiene una infinidad de elementos.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ tal que $T - \varepsilon > 2R(x^0)$. Dado $\mu \in L^2(\Gamma(x^0) \times (0, \varepsilon))$ resolvemos la ecuación

$$(75) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \varepsilon) \\ y = \begin{cases} w \\ 0 \end{cases} & \text{en } \Gamma(x^0) \times (0, \varepsilon) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{en } \Gamma_*(x^0) \times (0, \varepsilon) \end{cases}$$

Del Teorema 4 se deduce que

$$(76) \quad y_\varepsilon = y(\varepsilon) \in L^2(\Omega), y_\varepsilon^1 = y'(\varepsilon) \in H^{-1}(\Omega).$$

Como $T - \varepsilon > 2R(x^0)$, el Teorema 4 asegura la existencia de $u \in L^2(\Gamma(x^0) \times (\varepsilon, T))$ tal que la solución de

$$(77) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } \Omega \times (\varepsilon, T) \\ y = \begin{cases} u \\ 0 \end{cases} & \text{en } \Gamma(x^0) \times (\varepsilon, T) \\ y(\varepsilon) = y_\varepsilon^0, y'(\varepsilon) = y_\varepsilon^1 & \text{en } \Gamma_*(x^0) \times (\varepsilon, T) \end{cases}$$

verifique (2).

Concluimos por tanto que

$$(78) \quad v = \begin{cases} w & \text{en } \Gamma(x^0) \times (0, \varepsilon) \\ u & \text{en } \Gamma(x^0) \times (\varepsilon, T) \end{cases}$$

pertenece a U_{ad} . Observese que w es un elemento cualquiera de $L^2(\Gamma(x^0) \times (0, \varepsilon))$.

Habiendo observado que U_{ad} contiene una infinidad de elementos la siguiente cuestión se plantea de forma natural: "Existe un control óptimo $v \in U_{ad}$ de manera que

$$(79) \quad \|v\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 = \min_{u \in U_{ad}} \|u\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 \quad ?"$$

Se demuestra que el problema de minimización (79) admite una única solución que es el control obtenido en el Teorema 3 y proporcionado por H.U.M.

El método HUM proporciona sistemáticamente el control óptimo en las diversas situaciones en las que se aplica (c.f. J.L. Lions [56], Capítulo VIII).

2. En este capítulo hemos considerado únicamente condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Tanto HUM como las técnicas de multiplicadores utilizadas se adaptan al caso de las condiciones de contorno de Neumann o las condiciones de contorno mixtas Dirichlet-Neumann (cf. J.L. Lions [56], Capítulo III). En el caso de las condiciones de contorno mixtas, las singularidades que las soluciones presentan complican considerablemente la situación. En particular algunas de las formulas de integración por partes que hemos utilizado en la aplicación de los multiplicadores no son ciertas. P. Grisvard en [21], [22] demostró que si bien no se obtienen las identidades habituales, si se tienen las desigualdades necesarias para obtener las estimaciones a priori deseadas.

También las técnicas y resultados de C. Bardos, G. Lebeau y J. Rauch [2], [3] se adaptan al caso de condiciones de contorno de tipo Neumann.

3. En todo este capítulo hemos supuesto la regularidad C^2 del dominio Ω (o bien la convexidad). Estas hipó

tesis pueden ser debilitadas considerablemente (cf. P. Grisvard [20] y [22]).

4. Hemos estudiado la controlabilidad en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. HUM y las técnicas de multiplicadores pueden ser adaptados para trabajar en otros espacios. En particular se demuestra que si los datos iniciales pertenecen a $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ entonces el control puede ser hallado en $H_0^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$. Es decir, se prueba que a datos iniciales más regulares corresponden controles más regulares. Así mismo, se puede demostrar la controlabilidad exacta en $H^{-1}(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ mediante controles en $(H^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0))))$ (cf. J.L. Lions [56], Capítulo I).

5. El problema de la controlabilidad exacta bajo perturbaciones (singulares, de dominio, coeficientes rápidamente oscilantes, ...) ha sido abordado por J.L. Lions en [57]. Se trata de un tema en el que existen numerosos problemas abiertos (cf. [57]).

El problema de la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas semilineal ha sido estudiado en E. Zuazua [72], [73] y [74] en donde se resuelve el problema para perturbaciones globalmente Lipschitz. El problema está abierto en el caso en que el término no lineal es superlineal en el infinito (vease E. Zuazua [80] para un caso particular en dimensión 1).

El problema de la controlabilidad exacta para la ecuación de ondas lineal en dominios perforados ha sido es-

tudiado en D. Cioranescu, P. Donato y E. Zuazua [13] y [14].

6. El método HUM y las técnicas de multiplicadores se adaptan también al estudio de la controlabilidad exacta para ecuaciones de placas vibrantes del tipo

$$(80) \quad y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

con diversas condiciones de contorno (cf. J.L. Lions [56], Capítulo IV, J. Lagnese y J.L. Lions [47] y las bibliografías de estos trabajos).

La diferencia fundamental que estos modelos presentan con respecto a la ecuación de ondas es que, debido a la velocidad infinita de propagación, se tiene controlabilidad exacta en un tiempo arbitrariamente pequeño.

Resultados análogos han sido demostrados por E. Wachtynghier [60] para la ecuación de Schrödinger.

Asimismo, se tienen resultados de controlabilidad exacta para el sistema de elasticidad (cf. J.L. Lions [56], Capítulo IV) y para las ecuaciones de Maxwell (cf. J. Lagnese [45] y O. Nalin [64]). \square

7. En R. Glowinski, C.H. Li y J.L. Lions [19] se ha desarrollado un método numérico efectivo para el estudio de la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas. \square

8. En G. Lebeau [52] se demuestra que la condición de control geométrico sobre $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es suficiente para que

la ecuación de placas (80) y la ecuación de Schrödinger sean exactamente controlables (en espacios de Sobolev) con controles en $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ con $T > 0$ arbitrariamente pequeño. \square

III - CONTROLABILIDAD INTERNA DE LA ECUACION DE ONDAS LINEAL

III.1 - Descripción de HUM

Tal y como hemos mencionado en el capítulo I, el problema de la controlabilidad exacta interna de la ecuación de ondas lineal puede formularse de la siguiente forma.

Sea ω un subconjunto abierto no vacío de Ω y consideremos la ecuación de ondas

$$(1) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = hX_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

donde X_ω denota la función característica de ω .

El problema consiste en hallar $T > 0$ tal que para todo par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ exista un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución de (1) verifique

$$(2) \quad y(T) = y'(T) = 0.$$

Nos interesamos por tanto a la controlabilidad en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$.

Tal como ocurría en el problema de la controlabi-

lidad frontera y como veremos más adelante, no se tendrá una respuesta positiva a este problema más que cuando ω verifique algunas propiedades geométricas.

La adaptación de HUM a este problema es la siguiente.

Dados $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ resolvemos

$$(3) \quad \begin{cases} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1. \end{cases}$$

Seguidamente resolvemos el problema

$$(4) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = -\phi X_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(T) = y'(T) = 0. \end{cases}$$

Definimos el operador

$$(5) \quad \Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\}.$$

Multiplicando la ecuación (4) por ϕ e integrando por partes se obtiene

$$(6) \quad \langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt.$$

Supongamos que se tiene el siguiente resultado de unicidad

$$(7) \quad \phi = 0 \text{ en } \omega \times (0, T) \implies \phi^0 \equiv \phi^1 \equiv 0.$$

Entonces

$$(8) \quad \| \{\phi^0, \phi^1\} \|_F = \left(\int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

define una norma en $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Sea

$$(9) \quad F = \text{espacio de Hilbert completado de } \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \text{ con respecto a la norma } \| \cdot \|_F.$$

De (6) se deduce que Λ se extiende de manera única a un isomorfismo de F en F' .

Por tanto, dados $\{y^0, y^1\}$ tales que

$$\{y^1, -y^0\} \in F'$$

existe un único par $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ solución de

$$(10) \quad \Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}.$$

El control

$$h = -\phi$$

donde ϕ es la solución de (3) con datos iniciales que verifican (10) responde a la cuestión ya que la solución de (4) verifica

$$y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1.$$

Por construcción

$$h \in L^2(\omega \times (0, T)).$$

El Teorema de Holmgren asegura que dado un subconjunto abierto no vacío cualquiera ω de Ω , existe $T_0(\omega, \Omega)$ tal que si $T > T_0(\omega, \Omega)$ el principio de unicidad (7) se verifica.

Por tanto hemos demostrado que si $T > T_0(\omega, \Omega)$ la ecuación (1) es exactamente controlable en el espacio de los datos iniciales tales que $\{y^1, -y^0\} \in F'$ con controles $h \in L^2(\omega \times (0, T))$.

El problema se reduce a obtener condiciones suficientes sobre ω y T para que

$$F' = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

o equivalentemente

$$F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega).$$

Basta por tanto demostrar la existencia de constantes $c > 0$, $C > 0$ tales que

$$(11) \quad c \| \{\phi^0, \phi^1\} \|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt \leq C \| \{\phi^0, \phi^1\} \|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2$$

$$\forall \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega).$$

Es bien sabido que

$$\| \phi \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \| \{\phi^0, \phi^1\} \|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}$$

de donde se deduce la segunda de las desigualdades de (11).

Falta por demostrar una desigualdad inversa de la forma

$$(12) \quad \| \{ \phi^0, \phi^1 \} \|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt$$

lo cual será el objeto del próximo apartado.

III.2 - La desigualdad inversa.

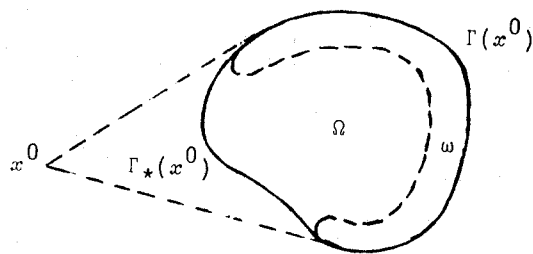
Sea $x^0 \in \mathbb{R}$ y consideremos la partición de la frontera $\{ \Gamma(x^0), \Gamma_*(x^0) \}$ introducida en el capítulo anterior.

Diremos que $\omega \subset \Omega$ es un entorno de $\overline{\Gamma(x^0)}$ si existe un conjunto abierto $\theta \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\Gamma(x^0)} \subset \theta$$

y

$$\omega = \Omega \cap \theta.$$



Teorema 1. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n de frontera Γ de clase C^2 . Sea $x^0 \in \mathbb{R}$ y $\omega \subset \Omega$ un entorno de $\overline{\Gamma(x^0)}$.

Si $T > T(x^0) = 2K(x^0)$ existe una constante $c = c(T) > 0$ tal que

$$(13) \quad \| \phi^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \phi^1 \|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt$$

para toda solución de (3) con datos $\{ \phi^0, \phi^1 \} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Demostración.

Etapa 1. Supongamos que se tiene la estimación

$$(14) \quad \| \phi^0 \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \| \phi^1 \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi'|^2 dx dt$$

y veamos que (14) implica (13).

Dados $\{ \phi^0, \phi^1 \} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ definimos

$$(15) \quad X \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta X = \phi^1 \quad \text{en } \Omega.$$

A partir de la solución ϕ de (3) correspondiente a los datos $\{ \phi^0, \phi^1 \}$ definimos

$$(16) \quad \psi(t) = \int_0^t \phi(s) ds + X.$$

Se comprueba fácilmente que $\psi = \psi(x, t)$ verifica

$$(17) \quad \begin{cases} \psi'' - \Delta \psi = 0 & \text{en } Q \\ \psi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \psi(0) = X, \psi'(0) = \phi^0. \end{cases}$$

Aplicando (14) a ψ obtenemos

$$(18) \quad \|\chi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\psi'|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt$$

ya que $\psi' = \phi$.

De (18) se obtiene (13) puesto que

$$(19) \quad \exists C > 0: \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|\chi\|_{H_0^1} \quad \forall \phi^1 \in H^{-1}(\Omega).$$

Seguidamente demostraremos (14) en varias etapas.

Etapas 2. En el Teorema 2 del Capítulo I hemos demostrado que si $T > T(x^0)$ existe $C = C(T) > 0$ tal que

$$(20) \quad E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla \phi^0(x)|^2 + |\phi^1(x)|^2] dx \leq C \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma.$$

Supongamos que $T > 0$ es tal que existe $\epsilon > 0$ para el cual $T - 2\epsilon > T(x^0)$. En estas condiciones, de (20), de la invarianza de la ecuación de ondas respecto a las traslaciones en la variable tiempo y de la conservación de la energía deducimos

$$(21) \quad E_0 \leq C \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma.$$

Consideramos un campo vectorial $q = q(x, t) \in (W^{1, \infty}(Q))^n$ tal que

$$(22) \quad \begin{cases} (i) & q(x, t) = \nu(x) & \forall (x, t) \in \Gamma(x^0) \times (\epsilon, T-\epsilon) \\ (ii) & q(x, t) \cdot \nu(x) \geq 0 & \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T) \\ (iii) & q(x, 0) = q(x, T) = 0 & \forall x \in \Omega \\ (iv) & q(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (\Omega \setminus \omega) \times (0, T). \end{cases}$$

El campo q puede elegirse de la siguiente forma:

$$q(x, t) = h(x)n(t)$$

donde $n \in C^1([0, T])$ verifica

$$(23) \quad \begin{cases} n(0) = n(T) = 0 \\ n(t) = 1 & \forall t \in (\epsilon, T-\epsilon) \end{cases}$$

y $h = h(x) \in (W^{1, \infty}(\Omega))^n$ satisface

$$(24) \quad \begin{cases} h = \nu & \text{en } \Gamma(x^0) \\ h \cdot \nu \geq 0 & \text{en } \Gamma \\ h = 0 & \text{en } \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

(vease J.L. Lions [56], Capítulo I, sección 3.1 para la construcción del campo vectorial h).

Aplicando la identidad (18) del Lema 1 del Capítulo I obtenemos

$$(25) \quad \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (q \cdot \nu) \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq C \int_0^T \int_{\omega} (|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2) dx dt$$

donde C es una constante positiva que depende de $\|q(x, t)\|_{W^{1, \infty}(Q)}$.

La estimación (25) es válida para todo $T > T(x^0)$. Por tanto, si $\varepsilon > 0$ es tal que $T - 2\varepsilon > T(x^0)$, por el argumento utilizado anteriormente y combinando (21) y (25) deducimos que

$$(26) \quad E_0 \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\omega} [|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2] dx dt.$$

Etapa 3. Sea $\tilde{\omega}$ un entorno de $\overline{\Gamma(x^0)}$ tal que

$$(27) \quad \Omega \cap \tilde{\omega} \subset \omega.$$

Como (26) es válida para todo entorno ω de $\overline{\Gamma(x^0)}$ se tiene

$$(28) \quad E_0 \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{\omega}} [|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2] dx dt.$$

Sea $p = p(x, t) \in W^{1, \infty}(Q)$, $p \geq 0$ tal que

$$(29) \quad \begin{cases} (i) & p(x, t) = 1 & \forall (x, t) \in \tilde{\omega} \times (\varepsilon, T-\varepsilon) \\ (ii) & p(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (\Omega \setminus \tilde{\omega}) \times (0, T) \\ (iii) & p(x, 0) = p(x, T) = 0 & \forall x \in \Omega \\ (iv) & \frac{|\nabla p|^2}{p} \in L^{\infty}(Q). \end{cases}$$

La función p puede elegirse de la forma

$$(30) \quad p(x, t) = \rho^2(x) \eta(t)$$

donde $\eta \in C^1([0, T])$ verifica (23) y $\rho \in W^{1, \infty}(\Omega)$ satisface

$$(31) \quad \begin{cases} \rho(x) = 1 & \forall x \in \tilde{\omega} \\ \rho(x) = 0 & \forall x \in \Omega \setminus \tilde{\omega}. \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (3) por $p\phi$ e integrando por partes obtenemos la identidad

$$(32) \quad \int_Q p |\nabla\phi|^2 = \int_Q p |\phi'|^2 - \int_{\Omega} p \phi' \phi \Big|_0^T + \int_Q p' \phi' \phi - \int_Q \nabla p \cdot \nabla \phi \phi$$

Combinando (29) y (32) se obtiene

$$(33) \quad \int_Q p |\nabla\phi|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_{\tilde{\omega}} [|\phi'|^2 + |\phi|^2] dx dt + \left| \int_Q \nabla p \cdot \nabla \phi \phi \right|$$

Por otra parte

$$(34) \quad \left| \int_Q \nabla p \cdot \nabla \phi \phi \right| \leq \frac{1}{2} \int_Q p |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2} \int_Q \frac{|\nabla p|^2}{p} |\phi|^2.$$

De (33), (34) se obtiene, utilizando (29),

$$(35) \quad \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\omega} |\nabla\phi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_{\tilde{\omega}} [|\phi'|^2 + |\phi|^2] dx dt.$$

Combinando (28) y (35) obtenemos

$$(36) \quad E_0 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi'|^2 dx dt + C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt.$$

Etapa 4. La demostración de (14) (y por tanto del teorema) estará concluida si probamos la existencia de $C = C(T) > 0$ tal que

$$(37) \quad \int_Q |\phi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi'|^2 dx dt$$

para toda solución de (3).

Procedemos por reducción al absurdo. Si (37) no se verifica, existe una sucesión $\{\phi_n\}$ de soluciones de (3) que corresponde a datos iniciales $\{\phi_n^0, \phi_n^1\} \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$(38) \quad \int_Q |\phi_n|^2 dx dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(39) \quad \int_0^T \int_\omega |\phi_n'|^2 dx dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

De (36), (38) y (39) se deduce que $\{\phi_n^0, \phi_n^1\}$ está acotada en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y por tanto

$$(40) \quad \{\phi_n\} \text{ está acotada en } H^1(Q).$$

De (40) y de la compacidad de la inyección $H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ se deduce que

$$(41) \quad \{\phi_n\} \text{ es relativamente compacta en } L^2(Q).$$

Extrayendo una subsucesión adecuada (que seguiremos denotando mediante $\{\phi_n\}$ para simplificar la notación) deducimos que

$$(42) \quad \phi_n \rightharpoonup \phi \text{ débilmente en } H^1(Q).$$

$$(43) \quad \phi_n \rightarrow \phi \text{ fuertemente en } L^2(Q).$$

El límite $\phi = \phi(x, t)$ es solución de (3) y por otra parte, por (38), (39), (42) y (43) satisface

$$(44) \quad \phi' = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T)$$

$$(45) \quad \|\phi\|_{L^2(Q)} = 1.$$

La función $\psi = \phi'$ es también solución de (3) y satisface

$$(46) \quad \psi = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T).$$

Como $T > T(x^0) \geq$ diámetro de Ω , por el Teorema de Holmgren se deduce que

$$\psi \equiv 0 \quad \text{en } Q$$

es decir

$$\phi = \phi(x)$$

es una solución estacionaria de (3) y por tanto, necesariamente

$$\phi \equiv 0$$

lo cual contradice (45). \square

III.3 - El resultado principal.

Teorema 2. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n de frontera Γ de clase C^2 . Sea $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\omega \subset \Omega$ un entorno de $\Gamma(x^0)$.

Supongamos que $T > T(x^0) = 2R(x^0)$.

Entonces, para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución de (1) satisface (2).

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la adaptación de HUM desarrollada en el apartado III.1 y de la estimación (13), la cual implica que el espacio de Hilbert F construido coincide con $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ módulo una equivalencia de normas. \square

III.4 - El caso de los coeficientes variables en dimensión $n=1$.

Consideremos ahora la ecuación de ondas siguiente con coeficientes variables en una dimensión espacial:

$$(47) \quad \begin{cases} y'' - (a(x)y_x)_x = h x_\omega & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y^0(x), y'(x, 0) = y^1(x) \end{cases}$$

con $\Omega = (0, 1)$ y $\omega = (\ell_1, \ell_2) \subset \Omega$.

Combinando las técnicas de la sección anterior con las del II.7 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3. Supongamos que $a \in W^{1, \infty}(0, 1)$ verifica

$$(48) \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Entonces, si $T > 2R$ con $R = R(\ell_1, \ell_2) = \max\left(\frac{\ell_1}{\sqrt{a_0}}, \frac{1-\ell_2}{\sqrt{a_0}}\right)$, para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ existe un control $h \in L^2((\ell_1, \ell_2) \times (0, T))$ tal que la solución $y = y(x, t)$ de (47) verifica (2).

Demostración. Aplicando HUM, el problema se reduce a obtener la estimación

$$(49) \quad \|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell_2} |\phi|^2 dx dt$$

para las soluciones de la ecuación homogénea

$$(50) \quad \begin{cases} \phi'' - (a(x)\phi_x)_x = 0 & \text{en } (0, 1) \times (0, T) \\ \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \phi(x, 0) = \phi^0(x), \phi'(x, 0) = \phi^1(x) & \text{para } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Procediendo como en la etapa 1 de la demostración del Teorema 1 se observa que (49) es consecuencia de

$$(51) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell_2} |\phi'|^2 dx dt.$$

Demostraremos (51) en varias etapas.

Etapas 1. El método utilizado en la demostración de la estimación (64) del Capítulo I permite probar con facilidad que dado $\xi \in [0, 1]$ cualquiera, si

$$(52) \quad T > \frac{2}{\sqrt{a_0}} \xi$$

entonces

$$(53) \quad \int_0^\xi \int_{\frac{\xi-x}{\sqrt{a_0}}}^{T + \frac{x-\xi}{\sqrt{a_0}}} \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt \leq C \int_0^T \left[|\phi'(\xi, t)|^2 + a(\xi) |\phi_x(\xi, t)|^2 \right] dt.$$

De manera análoga, si

$$(54) \quad T > \frac{2}{\sqrt{a_0}} (1 - \xi)$$

entonces

$$(55) \quad \int_{\xi}^1 \int_{\frac{x-\xi}{\sqrt{a_0}}}^{T - \frac{(x-\xi)}{\sqrt{a_0}}} \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt \leq \\ \leq C \int_0^T \left[|\phi'(\xi, t)|^2 + a(\xi) |\phi_x(\xi, t)|^2 \right] dt.$$

La constante C de las estimaciones (53) y (55) depende continuamente de ξ y T .

Como $T > 2R$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(56) \quad T > \frac{2}{\sqrt{a_0}} \max(\ell_1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon - \ell_2).$$

De (56) deducimos que (53) se verifica para todo $\xi \in (\ell_1, \ell_1 + \varepsilon)$ y (55) para todo $\xi \in (\ell_2 - \varepsilon, \ell_2)$. Integrando la desigualdad (53) (resp. (55)) con respecto a $\xi \in (\ell_1, \ell_1 + \varepsilon)$ (resp. con respecto a $\xi \in (\ell_2 - \varepsilon, \ell_2)$) deducimos que

$$(57) \quad \int_0^{\ell_1} \int_{\frac{\ell_1 - x}{\sqrt{a_0}}}^T \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt \leq \\ \leq C \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell_1 + \varepsilon} \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt$$

y

$$(58) \quad \int_{\ell_2}^1 \int_{\frac{x - \ell_2}{\sqrt{a_0}}}^{T - \frac{(x - \ell_2)}{\sqrt{a_0}}} \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt \leq \\ \leq C \int_0^T \int_{\ell_2 - \varepsilon}^{\ell_2} \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt.$$

De (57), (58) se obtiene fácilmente que

$$(59) \quad (T - 2R) \int_0^1 \left[|\phi^1(x)|^2 + a(x) |\phi_x^0(x)|^2 \right] dx = \\ = \int_R^{T-R} \int_0^1 \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt \leq \\ \leq C \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt$$

o equivalentemente

$$(60) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ \leq C \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt.$$

Etapa 2. La estimación (60) es válida para todo $(\ell_1, \ell_2) = (0, 1)$ siempre y cuando $T > 2R(\ell_1, \ell_2)$.

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene

$$T - 2\varepsilon > 2R(\ell_1 - \varepsilon, \ell_2 - \varepsilon)$$

y por lo tanto

$$(61) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \\ \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\ell_1 + \varepsilon}^{\ell_2 - \varepsilon} \left[|\phi'|^2 + a(x) |\phi_x|^2 \right] dx dt.$$

El argumento de la etapa 3 de la demostración del Teorema 1 permite probar con facilidad que

$$(62) \quad \int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\ell_1+\epsilon}^{\ell_2-\epsilon} a(x) |\phi_x|^2 dx dt \leq \\ \leq C \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell_2} |\phi'|^2 dx dt + C \|\phi\|_{L^2(Q)}^2.$$

Combinando (61) y (62) deducimos

$$(63) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \\ \leq C \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell_2} |\phi'|^2 dx dt + C \|\phi\|_{L^2(Q)}^2.$$

Basta por tanto con probar

$$(64) \quad \|\phi\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell_2} |\phi'|^2 dx dt.$$

Etapa 3. Para demostrar (64) procedemos por reducción al absurdo como en la etapa 4 de la demostración del Teorema 1.

Si (64) no se verifica, se demuestra la existencia de una solución $\phi = \phi(x,t)$ de (50) tal que

$$(65) \quad \|\phi\|_{L^2(Q)} = 1$$

$$(66) \quad \phi'(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in (\ell_1, \ell_2) \times (0,T).$$

Por tanto, $\psi = \phi'$ es una solución de (50) que satisface

$$(67) \quad \psi \in C([0,T]; L^2(0,1))$$

$$(68) \quad \psi = 0 \quad \text{en } (\ell_1, \ell_2) \times (0,T).$$

De (68) se sigue que

$$\psi' = 0 \quad \text{en } (\ell_1, \ell_2) \times (0,T)$$

lo cual combinado con (67) y (63) permite concluir que

$$\psi(0) \in H_0^1(0,1), \psi'(0) \in L^2(0,1)$$

y por tanto

$$(69) \quad \psi \in C([0,T]; H_0^1(0,1)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,1)).$$

Como ψ pertenece a la clase (69) (lo cual no se sabía a priori por ser $\psi = \phi'$) las estimaciones (53) y (55) se aplican a ψ y de (68) se deduce que

$$\psi(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in (0,1) \times (R, T-R)$$

y por conservación de la energía

$$\psi \equiv 0.$$

Por tanto, $\phi = \phi(x)$ es una solución estacionaria de (50) que satisface

$$-(a(x)\phi_x)_x = 0 \quad \text{en } (0,1), \phi \in H_0^1(0,1)$$

pero entonces necesariamente $\phi \equiv 0$, lo cual contradice (65). \square

III.5 - Comentarios

1. Tal y como hemos visto en los Teoremas 1 y 2, a partir de un resultado de controlabilidad frontera y probando un simple resultado de regularidad (estimaciones (25) y (35)) se obtienen resultados de controlabilidad con controles localizados en un entorno de la frontera.

Este tipo de argumentos se extiende fácilmente a ecuaciones con coeficientes variables del tipo:

$$(70) \quad \begin{cases} y'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla y) = h \chi_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

con $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que

$$(71) \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Supongamos que $\Gamma_0 \subset \Gamma$ es un subconjunto abierto de la frontera Γ y $T_0 > 0$ es tal que para todo $T > T_0$ se tiene la estimación

$$(72) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma$$

con $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$, para toda solución de

$$(73) \quad \begin{cases} \phi'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla \phi) = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0; \phi'(0) = \phi^1. \end{cases}$$

Se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 4. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n de frontera Γ de clase C^2 . Sean $\Gamma_0 \subset \Gamma$ y $T_0 > 0$ tales que para todo $T > T_0$ se verifique la estimación (72).

Sea ω un entorno de $\overline{\Gamma_0}$ en Ω . Entonces, si $T > T_0$, para todo par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución $y = y(x, t)$ de (70) satisface (2).

Idea de la demostración.

HUM reduce la demostración de este teorema a la obtención de la estimación (13) para las soluciones de (73).

Como en la etapa 1 de la demostración del Teorema 1 se observa que basta con probar (14).

Los argumentos de las etapas 2 y 3 de la demostración del Teorema 1 permiten obtener con facilidad (36).

Por tanto, el problema se reduce nuevamente a la demostración de (37).

El argumento de la etapa 4 de la demostración del Teorema 1 no se aplica literalmente en este caso pues el Teorema de Holmgren sólo es válido para ecuaciones con coeficientes analíticos.

Existen sin embargo dos métodos alternativos de demostración de (37) que si se aplican en el caso que nos ocupa:

(a) El método introducido por V. Komornik [36], basado en la utilización de series de Fourier no armónicas. Este

método se aplica sistemáticamente en ecuaciones de evolución del tipo

$$\phi'' + A\phi$$

donde A es un operador elíptico de orden ≥ 2 y permite absorber términos de orden inferior en estimaciones del tipo (36).

(b) Los argumentos de C.Bardos, G.Lebeau y J.Rauch [2] que reducen la obtención de (37) a una propiedad de continuación única para soluciones de un problema elíptico del tipo

$$(74) \quad -\operatorname{div}(a(x)\nabla\phi) + \lambda\phi = 0 \quad \text{en } \Omega$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\phi = \phi(x)$ una función a valores complejos.

En el caso que nos ocupa la cuestión se reduciría a probar que toda solución $\phi \in H^2(\Omega)$ de (74) que verifica

$$\phi = 0 \quad \text{en } \omega$$

es necesariamente idénticamente nula en todo Ω , lo cual es una consecuencia inmediata del Teorema de L.Hörmander [33] (p. 10). \square

2. Tal y como mencionamos en las secciones II.6 y II.7 la estimación (72) se verifica para las soluciones de (73) si Ω es de clase C^∞ , $a \in C^\infty(\bar{\Omega})$ y $\{\Gamma_0, T\}$ son tales que todo rayo de la óptica geométrica intersecta Γ_0 en un punto no difractivo en un tiempo menor que T (cf. C.Bardos,

G.Lebeau y J.Rauch [2]).

En realidad, los métodos de [2] pueden ser directamente aplicados en el estudio de la controlabilidad exacta interna de (70). Se demuestra que (70) es exactamente controlable en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$ si $\omega \subset \Omega$ y $T > 0$ son tales que "todo rayo que se propaga en Ω y se refleja en su frontera pasa por ω en un tiempo $t < T$ ".

3. El Teorema 3 demuestra que la ecuación de ondas en una dimensión espacial es exactamente controlable en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$ para cualquier subconjunto abierto no vacío de Ω .

Este hecho no se generaliza a dimensiones de espacio $n > 1$. En efecto, la caracterización de [42] demuestra que si $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ y $\omega = B(0, r)$ con $r < 1$, entonces la ecuación de ondas no es exactamente controlable en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$ para ningún $T > 0$.

En A.Haroux [25] y J.Lagnese [42] se estudia, mediante series de Fourier, la controlabilidad interna de la ecuación de ondas cuando Ω es un cuadrado de \mathbb{R}^2 y un círculo de \mathbb{R}^2 respectivamente.

Los resultados de A.Haroux [25] demuestran que cuando $\bar{\omega} \subset \Omega$, para controlar los datos iniciales en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ es necesario utilizar controles en una clase de funcionales analíticos con soporte localizado en $\omega \times (0, T)$. J.Lagnese [42] demuestra que si $\bar{\omega} \subset \Omega$ y los controles son tomados en

$L^2(\omega \times (0, T))$, entonces únicamente se controlan los datos iniciales en una clase que se caracteriza a través de los coeficientes de Fourier. Esta clase es menor que $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ pero contiene por ejemplo todos los datos con sólo un número finito de coeficientes de Fourier no nulos.

Sin embargo, tal y como hemos visto en la sección III.1, gracias a HUM y al Teorema de unicidad de Holmgren, para todo $\omega \subset \Omega$ subconjunto abierto no vacío existe un tiempo $T_0 = T_0(\omega, \Omega) > 0$ tal que si $T > T_0$ se tiene controlabilidad exacta de (1) con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$ en un espacio de datos iniciales tales que $\{y^1, -y^0\} \in F'$. La caracterización del espacio F' , o equivalentemente de F , en función de ω y T en aquellos casos en que $F \neq L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ es un problema prácticamente abierto (a excepción de los resultados de [25] y [42] antes mencionados).

4. El argumento de la sección II.7 permite probar que si se tiene controlabilidad exacta en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$, entonces para cada $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ el conjunto de controles admisibles

$U_{ad} = \{h \in L^2(\omega \times (0, T)) : y \text{ solución de (70) verifica (2)}\}$ contiene una infinidad de elementos.

El control h proporcionado por HUM es el único control óptimo que realiza el siguiente mínimo

$$\|h\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2 = \min_{g \in U_{ad}} \|g\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2$$

5. El Teorema 2 demuestra que si ω es un entorno de $\Gamma(x^0)$ y $T > T(x^0)$, entonces la ecuación de ondas es exactamente controlable en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$.

Este resultado no es óptimo con respecto al tiempo de controlabilidad. En efecto, gracias a [2] sabemos que el tiempo de controlabilidad decrece a medida que la talla de ω aumenta. Sin embargo, la demostración de esta afirmación parece quedar fuera del alcance del método utilizado en el Teorema 1.

Observese que si $\omega = \Omega$, se tiene controlabilidad en un tiempo arbitrariamente pequeño (cf. J.L. Lions [56], sección VII 2.2 donde se demuestra la existencia de controles $h \in L^2(Q)$). Sería interesante desarrollar un método que, a pesar de no proporcionar el tiempo de controlabilidad óptimo $T_0(\omega)$, permitiera al menos probar que el tiempo de controlabilidad tiende a cero cuando ω tiende de manera creciente a todo Ω . Este problema puede ser resuelto utilizando una idea de J. Kin [82]. El tiempo de controlabilidad que se obtiene es $\text{diam}(\Omega \setminus \omega)$. \square

6. Consideremos una sucesión de abiertos de la forma

$$\omega_\epsilon = \{x \in \Omega : d(x, \Gamma(x^0)) < \epsilon\}$$

donde $d(x, \Gamma(x^0))$ representa la distancia en \mathbb{R}^n de x al conjunto $\Gamma(x^0)$. Se trata de un entorno de "anchura" ϵ de $\Gamma(x^0)$.

Dado $T > T(x^0)$, se pueden construir controles $h_\epsilon \in L^2(\omega_\epsilon \times (0, T))$ de forma que el sistema (1) converja a la ecuación de ondas con control frontera sobre la condición de contorno de Dirichlet y de forma que la propiedad (2) se preserve en el límite (cf. C.Fabre y J.P.Puel [17] y C.Fabre [81]). \square

7. El método de demostración del Teorema 1 es general y se aplica en particular a ecuaciones de ondas con otras condiciones de contorno o incluso a modelos de placas (cf. E.Zuazua [71]).

Por ejemplo, para el sistema

$$(75) \quad \begin{cases} y'' + \Delta^2 y = h \chi_\omega & \text{en } Q \\ y = \partial y / \partial \nu = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

se tiene el siguiente resultado: "Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n de frontera de clase C^3 y ω un entorno de un subconjunto de la frontera del tipo $\Gamma(x^0)$. Entonces, para todo $T > 0$ y $\{y^0, y^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución de (75) satisfaga (2)".

Se tiene el mismo resultado que el obtenido para la ecuación de ondas pero en un tiempo arbitrariamente pequeño.

Las técnicas de este capítulo han sido adaptadas por E. Machtyngier [60] para el estudio de la controlabilidad interna de la ecuación de Schrödinger.

S.Jaffard en [34] demuestra, mediante métodos de series de Fourier, que si Ω es un cuadrado de \mathbb{R}^2 , una ecuación de placas vibrantes puede ser exactamente controlada en $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mediante controles en $L^2(\omega \times (0, T))$ siendo ω un subconjunto estrictamente contenido en Ω , i.e. $\bar{\omega} \subset \Omega$. Este resultado contrasta de manera esencial con los antes mencionados en lo referente a la ecuación de ondas.

IV - CONTROLABILIDAD INTERNA DE LA ECUACIÓN DE ONDAS SEMILINEAL

IV.1 - Formulación del problema

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^2 . Sea $\omega \subset \Omega$ un entorno de la frontera Γ .

Consideremos la ecuación de ondas semilineal

$$(1) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + f(y) = h \chi_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

siendo f una función localmente Lipschitz.

La controlabilidad exacta de (1) se formula de la siguiente forma: "Hallar $T > 0$ tal que para todo par de datos iniciales y finales $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ exista un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución $y = y(x, t)$ de (1) verifique

$$(2) \quad y(T) = z^0, y'(T) = z^1."$$

Observación 1. Contrariamente a lo que sucedía en el problema lineal, en este caso, el problema de la controlabilidad exacta no se reduce a considerar el caso $z^0 = z^1 = 0$. Hemos de probar que todo dato inicial puede ser conducido a todo dato final. \square

Supondremos que f verifica la siguiente condición de crecimiento en el infinito

$$(3) \quad |f'(s)| \leq C(1 + |s|^p) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

con

$$(4) \quad p(n-2) \leq 2$$

de manera que (1) admita una solución única local que sea continua a valores en $H_0^1(\Omega)$ y de clase C^1 a valores en $L^2(\Omega)$.

Por otra parte, supondremos que $T > T_0$ siendo $T_0 > 0$ el tiempo de controlabilidad exacta de la ecuación lineal con $f \equiv 0$. Buscamos por tanto un resultado que asegure que si la ecuación lineal es exactamente controlable entonces también lo es la ecuación semilineal para no linealidades f en un clase a determinar.

Por el Teorema 1 del Capítulo III sabemos que si $T > T_0$ con

$$(5) \quad T_0 = \text{diámetro de } \Omega$$

se tienen las estimaciones

$$(6) \quad \|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt$$

y

$$(7) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi'|^2 dx dt$$

para las soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$(8) \quad \begin{cases} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 \end{cases}$$

Tal y como vimos en el Teorema 2 del Capítulo III, de (6) se deduce que la ecuación de ondas lineal (con $f \equiv 0$ en (1)), es exactamente controlable en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$.

Vamos a estudiar la controlabilidad exacta de (1) bajo la hipótesis de que se verifiquen las estimaciones (6) y (7).

El problema de la controlabilidad exacta de ecuaciones no lineales ha sido abordado por diversos autores. L. Markus en [61] introdujo un método basado en el teorema de la función implícita para el estudio de la controlabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Más tarde este método fue adaptado y extendido al estudio de la controlabilidad de ecuaciones de ondas no lineales (cf. W.C. Chewning [12], H.O. Fattorini [18] y D.L. Russell [67]). Este método proporciona resultados de controlabilidad local, i.e. datos iniciales en un entorno de $\{0,0\}$ en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

pueden ser conducidos a $(0,0)$ (si $f(0) = 0$) en tiempo T . Es importante resaltar que este método no proporciona resultados de controlabilidad exacta en el sentido formulado anteriormente. El método tiene la ventaja de aplicarse a una amplia clase de no linealidades.

Nosotros adoptaremos un punto de vista diferente. Desarrollaremos un método que proporcione resultados de controlabilidad exacta para alguna clase de funciones no lineales.

En E. Zuazua [72] se introdujo un método de punto fijo que proporcionaba resultados de controlabilidad exacta para no linealidades f asintóticamente lineales, i.e., tales que

$$(9) \quad f' \in L^\infty(\mathbb{R})$$

y

$$(10) \quad \exists \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s}$$

Seguidamente en E. Zuazua [74] se introdujo un segundo esquema de punto fijo mediante el cual se demostró la controlabilidad en la clase de no linealidades globalmente Lipschitz. Es decir, sin necesidad de suponer (10). El inconveniente de este segundo método es que el control construido pertenece a la clase $H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))$ con $\epsilon > 0$ y no a la clase optimal $L^2(\omega \times (0, T))$ correspondiente al caso lineal.

En los próximos cuatro apartados desarrollaremos este segundo método de punto fijo. En la sección IV.6 mostraremos la controlabilidad local de (3) en el caso en que f es superlineal en el infinito utilizando un método de punto fijo. En la última sección, dedicada a los comentarios, describiremos brevemente el método de punto fijo aplicable en el caso en que f es asintóticamente lineal.

Los métodos y resultados de este capítulo se adaptan fácilmente a la controlabilidad exacta frontera de la ecuación de ondas semilineal. Por brevedad no abordaremos este problema (cf. E. Zuazua [72], [73] y [74]).

IV.2 - Descripción del método de punto fijo

Supongamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ y definamos la función

$$(11) \quad g(s) = \begin{cases} \frac{f(s) - f(0)}{s} & \text{si } s \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Dado $\xi \in L^2(Q)$ cualquiera, consideramos el sistema linealizado

$$(12) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + g(\xi)y = h x_\omega - f(0) \\ y = 0 \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

Como $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g(\xi) \in L^\infty(Q)$ y se tiene

$$(13) \quad \|g(\xi)\|_{L^\infty(Q)} = \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \quad \forall \xi \in L^2(Q).$$

Supongamos que el sistema (12) es exactamente controlable en tiempo $T > T_0$. Entonces, fijados $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ definimos el control

$$(14) \quad h \in L^2(\omega \times (0, T))$$

proporcionado por HUM.

La solución $y = y(x, t)$ de (12) asociada a dicho control satisface (2).

Definimos por tanto la aplicación no lineal

$$(15) \quad N(\xi) = y; N: L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$$

El problema de la controlabilidad exacta de (1) se reduce a la obtención de un punto fijo del operador N . En efecto, si $N(\xi) = \xi = y$, $y = y(x, t)$ solución de (12) satisface (1) y además, por construcción, (2).

Para demostrar la existencia de un punto fijo de N aplicaremos el Teorema de Schauder. Recordemos su enunciado:

Teorema de Schauder. Sea X un espacio de Banach y $N: X \rightarrow X$ un operador continuo y compacto. Supongamos que existe $C \subset X$ un convexo, cerrado, acotado y no vacío tal que

$$(16) \quad N(C) \subset C.$$

Entonces, N tiene al menos un punto fijo en C , i.e.,

$$(17) \quad \exists x \in C: Nx = x.$$

Observación 2. La hipótesis (16) se verifica trivialmente si

$$(18) \quad R = \sup_{x \in X} \|Nx\|_X < \infty.$$

En efecto, basta con elegir $C = \overline{B_R}$, la bola cerrada de centro cero y radio R en X . \square

Es de esperar que, en el problema que nos ocupa, (18) se verifique con $X = L^2(Q)$. En efecto, (13) asegura que el potencial $g(\xi)$ está uniformemente acotado en $L^\infty(Q)$. Por tanto, si el control h depende continuamente del potencial (en un sentido que precisaremos más adelante) se tendrá una familia de controles uniformemente acotados. Finalmente, dado que los datos iniciales en (12) están fijados y el potencial y el control uniformemente acotados, se tendrá la acotación uniforme de la solución en

$$(19) \quad C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$$

y en particular en $H^1(Q)$. De esta forma no sólo se tendrá (18) (y por tanto (16)) sino la compacidad de N de $L^2(Q)$ gracias a la compacidad de la inyección $H^1(Q) \subset L^2(Q)$.

Sin embargo tal y como veremos en el apartado IV.4, surgirán dificultades técnicas importantes en la obtención de la acotación uniforme del control. Utilizando una variante de un HUM, que supone trabajar en un marco funcional distinto al del caso lineal, construiremos controles unifor

memente acotados en $H^{-\varepsilon}(0, T; L^2(\omega))$ con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Esto permitirá concluir la controlabilidad exacta de (1) con controles en $H^{-\varepsilon}(0, T; L^2(\omega))$.

Procederemos en diversas etapas. En el apartado IV.3 estudiaremos la controlabilidad exacta del problema (12). En el apartado IV.4 demostraremos la acotación uniforme del control. En el apartado IV.5 enunciaremos el teorema principal para el problema (1) y concluiremos su demostración.

IV.3 - Controlabilidad interna de la ecuación de ondas con potencial.

Tal y como observamos en (13) la ecuación (12) es de la forma

$$(20) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + V(x, t)y = h \chi_\omega - f(0) & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

con $V = V(x, t) \in L^\infty(Q)$.

Fijados datos finales $\{z^0, z^1\}$ resolvemos la ecuación

$$(21) \quad \begin{cases} z'' - \Delta z + V(x, t)z = -f(0) & \text{en } Q \\ z(T) = z^0, z'(T) = z^1 & \text{en } \Sigma \\ z = 0 \end{cases}$$

e introducimos la nueva variable

$$(22) \quad p = y - z.$$

La función p satisface

$$(23) \quad \begin{cases} p'' - \Delta p + V(x, t)p = h \chi_\omega & \text{en } Q \\ p = 0 & \text{en } \Sigma \\ p(0) = y^0 - z(0), p'(0) = y^1 - z'(0). \end{cases}$$

Si $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, entonces

$$(24) \quad z \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Por lo tanto, demostrar la controlabilidad exacta de (20) en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$ equivale a probar que toda solución de (23) puede ser conducida al equilibrio en el instante T .

La cuestión se reduce por tanto al estudio de un sistema de la forma

$$(25) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + V(x, t)y = h \chi_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1. \end{cases}$$

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^2 . Sea $\omega \subset \Omega$ un entorno de Γ . Supongamos que $V = V(x, t) \in L^\infty(Q)$ y que

$$T > T_0 = \text{diámetro de } \Omega.$$

Entonces, para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$

tal que la solución de (25) satisface

$$(26) \quad y(T) = y'(T) = 0.$$

Además, se tiene la estimación

$$(27) \quad \|h\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C \| \{y^0, y^1\} \|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Aplicamos HUM. Resolvemos primeramente la ecuación

$$(28) \quad \begin{cases} \phi'' - \Delta\phi + V(x, t)\phi = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 \end{cases}$$

y seguidamente

$$(29) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + V(x, t)y = -\phi \chi_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(T) = y'(T) = 0. \end{cases}$$

Definimos la aplicación

$$(30) \quad \Lambda \{ \phi^0, \phi^1 \} = \{ y'(0), -y(0) \}.$$

El problema se reduce a probar que $\Lambda: L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ es un isomorfismo.

Se comprueba fácilmente que Λ es un operador lineal y continuo de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ en $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Para demostrar su invertibilidad observamos que

$$(31) \quad \langle \Lambda \{ \phi^0, \phi^1 \}, \{ \phi^0, \phi^1 \} \rangle = \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt.$$

Basta por tanto con probar la estimación

$$(32) \quad \| \phi^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \phi^1 \|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt.$$

Es el objeto de la siguiente proposición.

Proposición 1. Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 1. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que se tiene (32) para toda solución de (28).

Demostración de la Proposición 1.

Sabemos que (32) se verifica si $V \equiv 0$. Procedemos por tanto por un método perturbativo.

Escribimos

$$(33) \quad \phi = \theta + \eta$$

donde

$$(34) \quad \begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = 0 & \text{en } Q \\ \theta = 0 & \text{en } \Sigma \\ \theta(0) = \phi^0, \theta'(0) = \phi^1 \end{cases}$$

y

$$(35) \quad \begin{cases} \eta'' - \Delta\eta = -V\phi & \text{en } Q \\ \eta = 0 & \text{en } \Sigma \\ \eta(0) = \eta'(0) = 0. \end{cases}$$

Como $T > T_0 = \text{diámetro de } \Omega$, se tiene

$$(36) \quad \|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\theta|^2 dx dt \\ \leq C \int_0^T \int_{\omega} [|\phi|^2 + |\eta|^2] dx dt.$$

Basta por tanto probar la estimación

$$(37) \quad \|\eta\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt.$$

Procedemos por reducción al absurdo. Si (37) no se verifica, existe una sucesión $\{\phi_n\}$ de soluciones de (28) correspondiente a datos iniciales $\{\phi_n^0, \phi_n^1\}$ tal que

$$(38) \quad \int_0^T \int_{\omega} |\phi_n|^2 dx dt \rightarrow 0$$

mientras que la sucesión $\{\eta_n\}$ de soluciones de (35) asociada verifica

$$(39) \quad \|\eta_n\|_{L^2(Q)} = 1.$$

Combinando (36), (38) y (39) deducimos que

$$\{\phi_n^0, \phi_n^1\} \text{ está acotada en } L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

y por tanto

$$\{\phi_n\} \text{ está acotada en } L^2(Q).$$

Estimaciones clásicas para la ecuación de ondas (35) aseguran que

$$\{\eta_n\} \text{ está acotada en } H^1(Q)$$

y por tanto

$$\{\eta_n\} \text{ es relativamente compacta en } L^2(Q).$$

Extrayendo una subsucesión adecuada y pasando al límite obtenemos:

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ débilmente en } L^2(Q)$$

donde $\phi = \phi(x, t)$ es una solución de (28) tal que

$$(40) \quad \phi = 0 \text{ en } \omega \times (0, T)$$

y por otra parte

$$\eta_n \rightarrow \eta \text{ fuertemente en } L^2(Q)$$

donde $\eta = \eta(x, t)$ es una solución de (35) con

$$(41) \quad \|\eta\|_{L^2(Q)} = 1.$$

El resultado de continuación única de A. Ruiz [65] asegura que la única solución de (28) que verifica (40) es la idénticamente nula. Pero si $\phi \equiv 0$, por unicidad de la solución de (35), se deduce que $\eta \equiv 0$ lo cual contradice (41).

De esta forma, la demostración de la Proposición 1 queda concluida y por tanto también la del Teorema 1. \square

En el estudio de la controlabilidad exacta de la ecuación de ondas semilineal precisaremos de resultados de controlabilidad para (25) en un marco funcional distinto. Se

tiene el siguiente resultado.

Teorema 2. Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 1. Sea $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Entonces, para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^{1-\epsilon}(\Omega) \times H^{-\epsilon}(\Omega)$ existe un control $h \in H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))$ tal que la solución $y = y(x, t)$ de (25) verifica (26).

Además, se tiene la estimación

$$(42) \quad \|h\|_{H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))} \leq C \| \{y^0, y^1\} \|_{H_0^{1-\epsilon}(\Omega) \times H^{-\epsilon}(\Omega)}.$$

Demostración. Aplicamos HUM. Resolvemos el problema (28) y seguidamente

$$(43) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + V(x, t)y = -I_\epsilon \phi \chi_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(T) = y'(T) = 0 \end{cases}$$

siendo $I_\epsilon: H^\epsilon(0, T; L^2(\omega)) \rightarrow H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))$ el isomorfismo de dualidad i.e., $I_\epsilon = (-\frac{d^2}{dt^2})^\epsilon$.

Definimos el operador

$$\Lambda_\epsilon \{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\}.$$

La demostración del teorema se reduce a probar que $\Lambda_\epsilon: H^\epsilon(\Omega) \times H^{-1+\epsilon}(\Omega) \rightarrow H^{-\epsilon}(\Omega) \times H_0^{1-\epsilon}(\Omega)$ es un isomorfismo.

Se comprueba fácilmente que Λ_ϵ es un operador lineal y continuo. Por otra parte, se tiene

$$(44) \quad \langle \Lambda_\epsilon \{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \| \phi \|_{H^\epsilon(0, T; L^2(\omega))}^2$$

Basta por tanto con probar la estimación

$$(45) \quad \| \{\phi^0, \phi^1\} \|_{H^\epsilon(\Omega) \times H^{\epsilon-1}(\Omega)}^2 \leq C \| \phi \|_{H^\epsilon(0, T; L^2(\omega))}^2.$$

Es el objeto de la siguiente proposición.

Proposición 2. En las condiciones del Teorema 1 la estimación (45) se verifica para todo $\epsilon \in (0, 1]$, $\epsilon \neq \frac{1}{2}$.

Demostración de la Proposición 2.

Procedemos por etapas. En la primera consideraremos el caso $V \equiv 0$, en la segunda el caso general.

Etapas 1. Caso $V \equiv 0$.

Tal como hemos visto en el apartado IV.1, como $T >$ diámetro de Ω , se tienen (6) y (7) y por tanto (45) para $\epsilon = 0, 1$.

El caso general (45) se deduce por interpolación.

Etapas 2. Caso general $V \in L^\infty(Q)$

Descomponemos la solución de (28) como en (33). Aplicando la estimación (45) que ha sido probada para $V \equiv 0$ se obtiene

$$(46) \quad \| \{\phi^0, \phi^1\} \|_{H^\epsilon(\Omega) \times H^{-1+\epsilon}(\Omega)}^2 \leq C \{ \| \phi \|_{H^\epsilon(0, T; L^2(\omega))}^2 + \| \eta \|_{H^\epsilon(0, T; L^2(\omega))}^2 \}.$$

Ahora bien

$$(47) \quad \begin{aligned} \|\eta\|_{H^\varepsilon(0,T;L^2(\omega))} &\leq C \|\eta\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq \\ &\leq C \|\nu\phi\|_{L^2(Q)} \leq C \|\phi\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

De (46) y (47) se obtiene

$$(48) \quad \begin{aligned} \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H^\varepsilon(\Omega) \times H^{-1+\varepsilon}(\Omega)}^2 &\leq \\ &\leq C(\|\phi\|_{H^\varepsilon(0,T;L^2(\omega))}^2 + \|\phi\|_{L^2(Q)}^2) \end{aligned}$$

Por tanto, basta probar

$$(49) \quad \|\phi\|_{L^2(Q)} \leq C \|\phi\|_{H^\varepsilon(0,T;L^2(\omega))}.$$

Procedemos nuevamente por reducci3n al absurdo. Si (49) no se cumple, existe una sucesi3n $\{\phi_n\}$ de soluciones de (28) tal que

$$(50) \quad \|\phi_n\|_{H^\varepsilon(0,T;L^2(\omega))} \rightarrow 0$$

y

$$(51) \quad \|\phi_n\|_{L^2(Q)} = 1.$$

De (48), (50) y (51) se sigue que

$$(52) \quad \{\phi_n^0, \phi_n^1\} \text{ est} \acute{a} \text{ acotada en } H^\varepsilon(\Omega) \times H^{-1+\varepsilon}(\Omega)$$

siendo $\{\phi_n^0, \phi_n^1\}$ los datos iniciales correspondientes a $\{\phi_n\}$.

De (52) y mediante estimaciones clasicas para la ecuaci3n de ondas (28), se obtiene

$$(53) \quad \{\phi_n\} \text{ est} \acute{a} \text{ acotada en } H^\varepsilon(Q)$$

y por tanto, como $\varepsilon > 0$,

$$(54) \quad \{\phi_n\} \text{ es relativamente compacta en } L^2(Q).$$

Extrayendo subsucesiones se deduce que

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ d} \acute{e} \text{bilmente en } H^\varepsilon(Q)$$

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ fuertemente en } L^2(Q)$$

con $\phi = \phi(x,t)$ soluci3n de (28) que verifica

$$(55) \quad \phi = 0 \text{ en } \omega \times (0,T)$$

$$(56) \quad \|\phi\|_{L^2(Q)} = 1.$$

El criterio de continuaci3n 3nica de A. Ruiz [65] asegura que la 3nica soluci3n de (28) que verifica (55) es $\phi \equiv 0$ lo cual contradice (56).

La demostraci3n de la Proposici3n 2 queda concluida as3 como la del Teorema 2. \square

Observaci3n 3. Notese que la estimaci3n (45) no ha sido demostrada para $\varepsilon = 0$ por falta de compacidad. \square

IV.4 - Controlabilidad uniforme.

Comenzamos demostrando la uniformidad de la estimaci3n (45) para potenciales uniformemente acotados en $L^\infty(Q)$.

Proposición 3. Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 1 y que $\epsilon \in (0, 1]$, $\epsilon \neq \frac{1}{2}$. Entonces, para cada $M > 0$ existe una constante $C = C_\epsilon(M)$ tal que la desigualdad (45) se verifica para toda solución de (28) con potencial $V \in L^\infty(Q)$ tal que $\|V\|_{L^\infty(Q)} \leq M$.

Demostración. Procedemos como en la demostración de la Proposición 2. La estimación (48) es uniforme con respecto a potenciales V tales que $\|V\|_{L^\infty(Q)} \leq M$. Por tanto basta probar la existencia de $C = C_\epsilon(M)$ tal que

$$(57) \quad \|\phi\|_{L^2(Q)} \leq C \|\phi\|_{H^\epsilon(0, T; L^2(\omega))}$$

para cada solución de (28) con potencial V tal que $\|V\|_{L^\infty(Q)} \leq M$.

Supongamos que no se tiene (57). Entonces, existe una sucesión de potenciales $\{V_n\}$ uniformemente acotada en $L^\infty(Q)$ y una sucesión $\{\phi_n\}$ de soluciones del problema (28) correspondiente que verifica (50) y (51).

De la uniformidad de la estimación (48) con respecto a $\{V_n\}$, de (50) y de (51) se deduce que

$\{\phi_n^0, \phi_n^1\}$ está acotada en $H^\epsilon(\Omega) \times H^{\epsilon-1}(\Omega)$ y por tanto (53).

Extrayendo subsucesiones se deduce que

$$\begin{aligned} V_n &\rightharpoonup V \text{ en } L^\infty(Q) \text{ débil } * \\ \phi_n &\rightharpoonup \phi \text{ débilmente en } H^\epsilon(Q) \\ \phi_n &\rightarrow \phi \text{ fuertemente en } L^2(Q). \end{aligned}$$

Pasando al límite en la ecuación verificada por V_n y ϕ_n se deduce que $\phi = \phi(x, t)$ es solución (28) para el potencial límite V y que satisface (55) y (56).

Gracias al principio de continuación única de A. Ruiz [65] se obtiene nuevamente una contradicción. Esto concluye la demostración de la Proposición 3. \square

Como consecuencia inmediata de la uniformidad de la estimación (45) se tiene el siguiente resultado de controlabilidad exacta uniforme.

Teorema 3. Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 1. Sea $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Entonces, para todo $M > 0$ existe una constante $C = C_\epsilon(M)$ tal que el control $h \in H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))$ construido en el Teorema 2 verifica

$$(58) \quad \|h\|_{H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))} \leq C \| \{y^0, y^1\} \|_{H_0^{1-\epsilon}(\Omega) \times H^{-\epsilon}(\Omega)}$$

para todo potencial $V \in L^\infty(Q)$ tal que

$$\|V\|_{L^\infty(Q)} \leq M.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la construcción del control realizada en la demostración del Teorema 2 y de la estimación uniforme de la Proposición 3. \square

IV.5 - El resultado principal.

Tenemos el siguiente resultado de controlabilidad exacta para la ecuación semilineal (1).

Teorema 4. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^2 . Sea $\omega \subset \Omega$ un entorno de Γ y $T > \text{diametro de } \Omega$.

Supongamos que f es globalmente Lipschitz y que $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Entonces, para cada par de datos iniciales y finales $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^{1-\epsilon}(\Omega) \times H^{-\epsilon}(\Omega)$ existe un control $h \in H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))$ tal que la solución $y = y(x, t)$ de (1) verifica (2).

Observación 4. El Teorema 4 demuestra, en particular, que si $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe un control $h_\epsilon \in H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))$ con $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Sin embargo, no se establece la existencia de un control en $L^2(\omega \times (0, T))$. \square

Demostración del Teorema 4.

Supongamos primeramente que $f \in C^1(\mathbb{R})$ es globalmente Lipschitz.

Fijados datos iniciales y finales $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^{1-\epsilon}(\Omega) \times H^{-\epsilon}(\Omega)$ definimos un operador no lineal $N: L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$ tal que para cada $\xi \in L^2(Q)$, $N\xi = y$

donde $y = y(x, t)$ es la solución de

$$(59) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + g(\xi)y = h \chi_\omega - f(0) & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

que verifica (2) siendo $g \in C(\mathbb{R})$ la función definida en (11) y $h \in H^{-\epsilon}(0, T; L^2(\omega))$ el control obtenido mediante HUM.

Tal y como mencionamos en el apartado IV.3, el control h es aquél que conduce la solución de

$$(60) \quad \begin{cases} p'' - \Delta p + g(\xi) = h \chi_\omega & \text{en } Q \\ p = 0 & \text{en } \Sigma \\ p(0) = y^0 - z(0), p'(0) = y^1 - z'(0) \end{cases}$$

al equilibrio en el instante T , siendo $z = z(x, t)$ la solución de

$$(61) \quad \begin{cases} z'' - \Delta z + g(\xi)z = -f(0) & \text{en } Q \\ z = 0 & \text{en } \Sigma \\ z(T) = z^0, z'(T) = z^1. \end{cases}$$

Como $\|g(\xi)\|_{L^\infty(Q)} \leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ para todo $\xi \in L^2(Q)$, estimaciones clásicas de la ecuación de ondas aseguran que

$$(62) \quad \begin{aligned} & \| \{z(0), z'(0)\} \|_{H^{1-\epsilon}(\Omega) \times H^{-\epsilon}(\Omega)} \leq \\ & \leq C \{ \| \{z^0, z^1\} \|_{H^{1-\epsilon}(\Omega) \times H^{-\epsilon}(\Omega)} + |f(0)| \}. \end{aligned}$$

Por otra parte, gracias a la estimación uniforme (58) deducimos que

$$(63) \quad \|h\|_{H^{-\varepsilon}(0,T;L^2(\omega))} \leq C \| \{y^0 - z(0), y^1 - z'(0)\} \|_{H^{1-\varepsilon}(\Omega) \times H^{-\varepsilon}(\Omega)}$$

Combinando (63) y (64) se sigue que

$$(64) \quad \|h\|_{H^{-\varepsilon}(0,T;L^2(\omega))} \leq C \quad \forall \xi \in L^2(Q)$$

y por lo tanto

$$(65) \quad \|y\|_{L^\infty(0,T;H^{1-\varepsilon}(\Omega))} + \|y'\|_{L^\infty(0,T;H^{-\varepsilon}(\Omega))} \leq C \quad \forall \xi \in L^2(Q).$$

Vemos por tanto que la imagen de N está contenida en un conjunto acotado de $L^\infty(0,T;H^{1-\varepsilon}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^{-\varepsilon}(\Omega))$. Por otra parte, de la continuidad de g , se sigue que $N: L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$ es continuo. Como la inclusión de $L^\infty(0,T;H^{1-\varepsilon}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^{-\varepsilon}(\Omega))$ en $L^2(Q)$ es compacta concluimos que

$N: L^2(Q) \rightarrow L^2(Q)$ es continuo y compacto

y además

$$\sup_{\xi \in L^2(Q)} \|N\xi\|_{L^2(Q)} < \infty.$$

Aplicando el Teorema de Schauder (cf. Observación 2) se deduce que N admite un punto fijo $\xi = y$ el cual satisface (1) y (2). El control h buscado es por tanto el correspondiente al punto fijo ξ .

En el caso general en que f es globalmente Lipschitz pero no es de clase C^1 procedemos por un argumento de aproximación de las no linealidades.

Introducimos una sucesión regularizante $\{f_n\} \subset C^1(\mathbb{R})$

tal que

$$(66) \quad f_n \rightarrow f \text{ en } L^\infty(\mathbb{R})$$

y

$$(67) \quad \|f'_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La ecuación (1) es exactamente controlable para cada no linealidad f_n . Además las estimaciones que hemos obtenido de h e y (para datos iniciales y finales fijados) dependen de f únicamente a través de su valor en 0 y de sus constantes de Lipschitz. De (67) y (68) se deduce por tanto que la sucesión de controles h_n y la sucesión y_n de soluciones obtenida estará acotada en sus respectivos espacios $H^{-\varepsilon}(0,T;L^2(\omega))$ y $L^\infty(0,T;H_0^{1-\varepsilon}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^{-\varepsilon}(\Omega))$.

Pasando al límite se obtiene un control h y una solución y de (1) que satisface (2).

Esto concluye la demostración del Teorema 4. \square

IV.6 - Controlabilidad local en el caso superlineal.

Supongamos que $f \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$ es tal que

$$(68) \quad f(0) = 0$$

y

$$(69) \quad \exists C > 0, p > 1: |f'(s)| \leq C|s|^{p-1} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{con} \\ (n-2)p < n.$$

Tenemos el siguiente resultado de controlabilidad local.

Teorema 5. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^2 . Sea $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\omega \subset \Omega$ un entorno de $\Gamma(x^0)$ y $T > 2\|x - x^0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Supongamos que f verifica (69) y (70).

Entonces, existe $\delta > 0$ tal que si los datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ verifican

$$(70) \quad \|\{y^0, y^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} < \delta$$

existe un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución $y = y(x, t)$ de (1) satisface

$$(71) \quad y(T) = y'(T) = 0.$$

Demostración. Utilizaremos una versión no lineal de HUM.

Primero resolvemos el problema (8) con datos $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ y seguidamente

$$(72) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + f(y) = -\phi \chi_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(T) = y'(T) = 0. \end{cases}$$

Gracias a la condición de crecimiento (70), se demuestra que (73) admite una solución local, i.e. para todo par de datos iniciales $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe

$$\tau = \tau(\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}) > 0$$

tal que (73) admite una solución única en

$$(73) \quad y \in C((T-\tau, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1((T-\tau, T]; L^2(\Omega)).$$

Tal y como veremos más adelante, existe $\alpha > 0$ tal que si

$$(74) \quad \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} < \alpha$$

entonces $\tau > T$ y por tanto

$$(75) \quad y \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$$

es decir, la solución y está definida en todo $[0, T]$.

Definimos el operador no lineal

$$(76) \quad \mu: B_\alpha \subset L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

mediante

$$(77) \quad \mu\{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\}$$

siendo B_α la bola de radio α y centro $\{0, 0\}$ en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

La demostración del Teorema 5 se reduce a probar que si se verifica (71), la ecuación

$$(78) \quad \mu\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

admite una solución $\{\phi^0, \phi^1\} \in B_\alpha$.

Para resolver (79) descomponemos el operador μ de la siguiente manera

$$(79) \quad \mu = \Lambda + \theta$$

donde

$$(80) \quad \Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y_0'(0), -y_0(0)\}$$

y

$$(81) \quad \theta\{\phi^0, \phi^1\} = \{\eta'(0), -\eta(0)\}$$

siendo $y_0 = y_0(x, t)$ y $\eta = \eta(x, t)$ respectivamente soluciones de

$$(82) \quad \begin{cases} y_0'' - \Delta y_0 = -\phi \chi_\omega & \text{en } Q \\ y_0 = 0 & \text{en } \Sigma \\ y_0(T) = y_0'(T) = 0 \end{cases}$$

y

$$(83) \quad \begin{cases} \eta'' - \Delta \eta = -f(y) & \text{en } Q \\ \eta = 0 & \text{en } \Sigma \\ \eta(T) = \eta'(T) = 0. \end{cases}$$

Obviamente $y = y_0 + \eta$.

Por el Teorema 1 del Capítulo III sabemos que

$$(84) \quad \Lambda: L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ es un isomorfismo.}$$

La ecuación (78) se escribe

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} + \theta\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

o equivalentemente

$$(85) \quad \{\phi^0, \phi^1\} = \Lambda^{-1}\{y^1, -y^0\} - \Lambda^{-1}\theta\{\phi^0, \phi^1\}.$$

Por tanto, el problema se reduce a probar la existencia de un punto fijo del operador

$$(86) \quad \begin{cases} K: L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \\ K\{\phi^0, \phi^1\} = \Lambda^{-1}\{y^1, -y^0\} - \Lambda^{-1}\theta\{\phi^0, \phi^1\}. \end{cases}$$

Aplicaremos el Teorema de Schauder. Comprobemos que K verifica las hipótesis requeridas.

(a) Compacidad de K .

Basta probar que

$$(87) \quad \theta: B_\alpha \subset L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

es un operador continuo y compacto.

Multiplicando la ecuación (72) por y' e integrando en Ω se obtiene

$$(88) \quad \frac{dE(t)}{dt} = - \int_\omega \phi(x, t) y'(x, t) dx - \int_\Omega f(y(x, t)) y'(x, t) dx$$

con

$$(89) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|y'(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2 \right] dx.$$

Se tiene

$$(90) \quad E(T) = 0$$

$$(91) \quad \left| \int_{\omega} \phi(x,t) y'(x,t) dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y'(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\phi(x,t)|^2 dx \\ \leq E(t) + C \| \{\phi^0, \phi^1\} \|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}$$

y

$$(92) \quad \left| \int_{\Omega} f(y(x,t)) y'(x,t) dx \right| \leq E(t) + C \int_{\Omega} |f(y(x,t))|^2 dx.$$

Combinando (88), (91) y (92) se deduce

$$(93) \quad \frac{dE(t)}{dt} \leq 2E(t) + C \| \{\phi^0, \phi^1\} \|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} + C \| f(y) \|^2_{L^2(\Omega)}.$$

De (68)-(69) se sigue que

$$(94) \quad |f(s)| \leq C |s|^p \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

y por tanto, como $p(n-2) < n$,

$$(95) \quad \| f(y) \|_{L^2(\Omega)} \leq C \| y \|_{L^{2p}(\Omega)}^p \leq C \| y \|_{H_0^1(\Omega)}^p \leq C [E(t)]^p.$$

Obtenemos por tanto la desigualdad diferencial

$$(96) \quad \frac{dE(t)}{dt} \leq C \{ E(t) + [E(t)]^p + \| \{\phi^0, \phi^1\} \|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \}.$$

De esta desigualdad diferencial se deduce fácilmente

$$(98) \quad E(t) \leq C \| \{\phi^0, \phi^1\} \|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} (T-t) e^{C(T-t)} e^{\int_t^T [E(s)]^{p-1} ds}.$$

De (98) se concluye que si $\alpha > 0$ es suficientemente pequeño y $\{\phi^0, \phi^1\} \in B_{\alpha}$, entonces $E(t) \in L^{\infty}(0, T)$ y se tiene la estimación

$$(99) \quad E(t) \leq C \| \{\phi^0, \phi^1\} \|^2_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \quad \forall t \in (0, T)$$

para alguna constante $C = C(\alpha) > 0$.

De (99) se sigue que si $\{\phi^0, \phi^1\} \in B_{\alpha}$,

$$(100) \quad y(t) \text{ está uniformemente acotada en } L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \text{y como } p(n-2) < n,$$

$$(101) \quad f(y(t)) \text{ está uniformemente acotada en } L^{\infty}(0, T; H^{\epsilon}(\Omega)) \\ \text{para algún } \epsilon > 0 \text{ que únicamente depende de } p \text{ (cf. J.Simon [68]).}$$

Combinando (100) y resultados clásicos de regularidad para la ecuación de ondas se deduce que

$$(102) \quad n(t) \text{ está uniformemente acotada en } L^{\infty}(0, T; H^{1+\epsilon}(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; H^{\epsilon}(\Omega)).$$

En particular $\theta(B_{\alpha})$ es un conjunto acotado de $H^{\epsilon}(\Omega) \times H^{1+\epsilon}(\Omega)$ y por lo tanto $\theta(B_{\alpha})$ es relativamente compacto en $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

La compacidad de k queda por tanto demostrada.

(b) Veamos ahora que existe $\beta \in (0, \alpha]$ tal que

$$(103) \quad \|K\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq \beta \quad \forall \{\phi^0, \phi^1\} \in B_\beta.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \|\theta\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} &\leq C \|f(y)\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \\ &\leq C \| |y|^p \|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \\ &\leq C \|y\|_{L^\infty(0, T; L^{2p}(\Omega))}^p \end{aligned}$$

y como $2p < 2n/(n-2)$ se deduce que

$$\|\theta\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \leq C \|E(t)\|_{L^\infty(0, T)}^{p/2}$$

Lo cual, combinado con (100), proporciona la estimación

$$(104) \quad \|\phi\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \leq C_0 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^p.$$

Sea

$$(105) \quad \gamma = \|\Lambda^{-1}\|_{L(L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))}.$$

De (104)-(105) se sigue

$$(106) \quad \begin{aligned} \|K\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} &\leq \gamma \|\{y^0, y^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ &\quad + \gamma C_0 \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

De (106) se deduce que (103) se verifica con

$$(107) \quad \beta < \min \left[\alpha, \left(\frac{1}{\gamma C_0} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]$$

siempre y cuando

$$(108) \quad \|\{y^0, y^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \frac{\beta - \gamma C_0 \beta^p}{\gamma}.$$

Aplicando el Teorema de Schauder se sigue que K admite un punto fijo en B_β si los datos iniciales $\{y^0, y^1\}$ satisfacen (108) y ésto para cada $\beta > 0$ que verifica (107).

El teorema queda demostrado con

$$\delta = \frac{\sigma - \gamma C_0 \sigma^p}{\gamma}$$

siendo

$$\sigma = \min \left[\alpha, \left(\frac{1}{\gamma C_0} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]. \quad \square$$

IV.7 - Comentarios.

1. No linealidad asintóticamente lineal.

Bajo las hipótesis (9) y (10) sobre la función f se puede demostrar el siguiente resultado

Teorema 6. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^2 . Sea $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ω un entorno de $\Gamma(x^0)$ en Ω y $T > 2\|x - x^0\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Supongamos que f verifica (9) y (10).

Entonces, para cada par de datos iniciales y finales $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe un control $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que la solución de (1) verifica (2).

Idea de la demostración.

Se procede en dos etapas.

Etapla 1. Supongamos que $f(s) = \alpha s \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Se trata por tanto de un problema lineal.

Resolvemos la ecuación

$$(109) \quad \begin{cases} \phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 \end{cases}$$

y seguidamente

$$(110) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + \alpha y = -\phi \chi_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(T) = y'(T) = 0. \end{cases}$$

Definimos el operador

$$(111) \quad \Lambda_\alpha \{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\}$$

que verifica

$$(112) \quad \langle \Lambda_\alpha \{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt.$$

La controlabilidad exacta de (1) en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con controles en $L^2(\omega \times (0, T))$ será una consecuencia de

$$(113) \quad \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C_\alpha \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt.$$

La Proposición 1 proporciona esta estimación cuando ω es un entorno de toda la frontera Γ . Sin embargo, en este caso particular en que el potencial α es constante se tiene (113) si ω es un entorno de $\Gamma(x^0)$.

En efecto, procediendo de la misma forma que en la demostración de la Proposición 1 se deduce

$$(114) \quad \|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt + C \|\eta\|_{L^2(Q)}^2$$

siendo $\eta = \eta(x, t)$ la solución de

$$(115) \quad \begin{cases} \eta'' - \Delta\eta = -\alpha\phi & \text{en } Q \\ \eta = 0 & \text{en } \Sigma \\ \eta(0) = \eta'(0) = 0. \end{cases}$$

Seguidamente se demuestra (36) por reducción al absurdo. Si (36) no se cumple, se obtiene una solución ϕ de (109) tal que

$$(116) \quad \phi = 0 \quad \text{en } \omega \times (0, T)$$

y de forma que la solución η asociada satisface

$$(117) \quad \|\eta\|_{L^2(Q)} = 1.$$

Ahora bien, el Teorema de unicidad de Holmgren (aplicable ya que los coeficientes de (109) son analíticos) asegura que la única solución de (109) que verifica (116) es $\phi \equiv 0$ lo cual contradice (117).

Etapa 2. En el caso general fijamos un estado final $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ arbitrario. Resolvemos (109) y seguidamente

$$(118) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + f(y) = -\phi \chi_\omega & \text{en } Q \\ y(T) = z^0, y'(T) = z^1 \\ y = 0 & \text{en } \Sigma. \end{cases}$$

Definimos el operador no lineal

$$\mu: L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

tal que

$$\mu\{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\}.$$

El problema se reduce a probar que

$$(119) \quad \mu\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

admite una solución $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ para cada $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Descomponemos la solución y de (118) de la siguiente forma

$$y = y_0 + z + \eta$$

siendo y_0 , z y η soluciones respectivas de

$$(120) \quad \begin{cases} y_0'' - \Delta y_0 + \alpha y_0 = -\phi \chi_\omega & \text{en } Q \\ y_0(T) = y_0'(T) = 0 \\ y_0 = 0 & \text{en } \Sigma \end{cases}$$

$$(121) \quad \begin{cases} z'' - \Delta z + \alpha z = 0 & \text{en } Q \\ z(T) = z^0, z'(0) = z^1 \\ z = 0 & \text{en } \Sigma \end{cases}$$

$$(122) \quad \begin{cases} \eta'' - \Delta \eta + \alpha \eta = -f(y) + \alpha y & \text{en } Q \\ \eta(T) = \eta'(T) = 0 \\ \eta = 0 & \text{en } \Sigma. \end{cases}$$

El operador μ se escribe entonces

$$(123) \quad \mu\{\phi^0, \phi^1\} = \Lambda_\alpha\{\phi^0, \phi^1\} + \{z'(0), -z(0)\} + \theta\{\phi^0, \phi^1\}$$

con

$$(124) \quad \theta\{\phi^0, \phi^1\} = \{\eta'(0), -\eta(0)\}.$$

De la etapa 1 se deduce que

$$\Lambda_\alpha: L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

es un isomorfismo.

La ecuación (119) se escribe por tanto

$$(125) \quad \begin{aligned} \{\phi^0, \phi^1\} &= \Lambda_\alpha^{-1}\{y^1 - z'(0), z(0) - y(0)\} - \Lambda_\alpha^{-1}\theta\{\phi^0, \phi^1\} \\ &= K\{\phi^0, \phi^1\}. \end{aligned}$$

Gracias a (9) se deduce fácilmente que

$$K: L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

es compacto.

Por otra parte, utilizando (10) se prueba que

$$(126) \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 \text{ tal que} \\ \|\theta\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \leq \varepsilon \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} + C_\varepsilon. \end{cases}$$

De (126) se sigue que para datos $\{y^0, y^1\}$, $\{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|K\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq \alpha \quad \forall \{\phi^0, \phi^1\} \in B_\alpha.$$

Se concluye la demostración del teorema aplicando el Teorema de Schauder. \square

Observación 5. Notese que el Teorema 6 se aplica cuando ω es un entorno de un conjunto de la forma $\overline{\Gamma(x^0)}$, mientras que el Teorema 4 sólo se aplica si ω es un entorno de toda la frontera Γ .

Esto es debido a que en la demostración del Teorema 4 hemos precisado de un resultado de continuación única para el problema (28) con un potencial $V \in L^\infty(Q)$. El único resultado del que se dispone es el de A. Ruiz [65] que precisa que ω sea un entorno de Γ . Sin embargo, en la demostración del Teorema 6 se ha precisado un resultado de continuación única para la ecuación (109) de coeficientes constantes. En este caso disponemos del Teorema de unicidad de Holmgren que tiene carácter local y se aplica, en particular, si ω es un entorno de $\overline{\Gamma(x^0)}$.

Observese que si dispusiéramos de un resultado de continuación única para la ecuación (28) con potencial $V \in L^\infty(Q)$ aplicable en el caso en que ω fuese un entorno de un conjunto de la forma $\overline{\Gamma(x^0)}$, el Teorema 4 se extendería inmediatamente a este caso y tendríamos la controlabilidad exacta de (1) para todas las no linealidades Lipschitz con controles a soporte en un entorno de $\overline{\Gamma(x^0)}$. \square

Observación 6. El Teorema 6 proporciona la regularidad $L^2(\omega \times (0, T))$ del control. Sería interesante estudiar si las técnicas de inversión global utilizadas por I. Lasiecka y R. Triggiani en [50] permiten obtener la regularidad $L^2(\omega \times (0, T))$ del control en el caso general en que f es globalmente Lipschitz. \square

2. El exponente $p = \frac{n}{n-2}$ queda excluido en el Teorema 5 por falta de compacidad. Sin embargo, utilizando el Teorema de punto fijo de Banach se puede demostrar la controlabilidad local también en este caso. \square

3. Ecuación con coeficientes variables.

Los métodos desarrollados en este capítulo se aplican también a ecuaciones de ondas semilineales con coeficientes variables

$$(127) \begin{cases} y'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla y) + f(y) = hX_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

donde $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$ verifica

$$(128) \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

El Teorema 4 se generaliza a este caso si se verifican las siguientes condiciones:

(a) Se tiene la estimación

$$(129) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma$$

para las soluciones de

$$(130) \quad \begin{cases} \phi'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla\phi) = 0 & \text{en } Q \\ \phi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1. \end{cases}$$

(b) Se tiene el siguiente resultado de continuación única:

$$\left. \begin{array}{l} \phi'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla\phi) + V(x,t)\phi = 0 \quad \text{en } Q \\ \phi = 0 \quad \text{en } \Sigma \\ \phi = 0 \quad \text{en } \omega \times (0,T) \\ \phi \in H^1(Q), V \in L^\infty(Q) \end{array} \right\} \implies \phi \equiv 0.$$

Gracias a [2], [3] y [66] sabemos que ambas condiciones se verifican si $a \in C^\infty(\bar{\Omega})$ siendo Ω de clase C^∞ .

El caso general en que $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$ permanece abierto.



4. Dimensión $n=1$.

En el caso de una dimensión espacial ($n=1$) combinando las técnicas de este capítulo y las del apartado III.4, los Teoremas 4 y 6 se extienden a la ecuación con coeficientes variables (127) para todo subintervalo ω de Ω .

5. El problema abierto fundamental en el contexto de la ecuación de ondas semilineal es la obtención de resultados de controlabilidad global con no linealidades superlineales en el infinito. Un primer resultado en esta dirección, en dimensión $n=1$, ha sido probado en [80].

V - ECUACION DE ONDAS CON DISIPACION INTERNA NO LINEAL

V.1 - Formulación del problema.

En este capítulo estudiaremos la velocidad de decaimiento de las soluciones de la ecuación de ondas con disipación no lineal.

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$(1) \quad g \in C(\mathbb{R}); \quad g(0) = 0; \quad g \text{ es no decreciente, } g(s)s > 0 \text{ si } s \neq 0.$$

Consideremos la ecuación de ondas disipativa:

$$(2) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + g(y') = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in H_0^1(\Omega); y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Tal y como veremos en el siguiente apartado, el problema (2) admite una única solución en un sentido débil apropiado.

La energía del sistema es

$$(3) \quad E_y(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[|y'(x,t)|^2 + |\nabla y(x,t)|^2 \right] dx.$$

Multiplicando la ecuación (2) por y' e integrando por partes se obtiene

$$(4) \quad \frac{dE_y(t)}{dt} = - \int_{\Omega} g(y'(x,t)) y'(x,t) dx \leq 0.$$

Observación 1. Estos cálculos son formales pero serán rigurosamente justificados más adelante. \square

De (4) se deduce que las trayectorias $\{y(t), y'(t)\}$ están acotadas en el espacio de la energía $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, es decir

$$(5) \quad y \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Además la energía decrece con el tiempo.

Por otra parte se observa que la única solución en equilibrio de (2) es la trivial $y \equiv 0$.

Se plantean por lo tanto las dos cuestiones siguientes:

- (a) ¿ Bajo que condiciones sobre g se puede asegurar que $E_y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$?

- (b) ¿ Puede obtenerse un orden de decaimiento uniforme para la energía en función de las propiedades de la no linealidad g ?

En el apartado I.2 dimos respuesta afirmativa a estas cuestiones en el caso en que g era una función lineal y obtuvimos un decaimiento exponencial uniforme. En este capítulo abordaremos estas cuestiones en el caso general.

En el apartado V.2 enunciaremos un resultado de A. Haraux [26] sobre la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de (2). En el apartado V.3 aplicaremos el Principio de Invarianza de La Salle para dar respuesta afirmativa a la primera cuestión (a) en una amplia clase de no linealidades. En el apartado V.4 desarrollaremos una técnica de funciones de Lyapunov que permitirá obtener estimaciones sobre el orden de decaimiento uniforme de la energía bajo condiciones adecuadas sobre el comportamiento de la no linealidad g en el origen y en el infinito. En el último apartado mencionaremos algunas posibles extensiones de los resultados de este capítulo así como algunos problemas abiertos.

V.2 - El problema de valores iniciales.

Como consecuencia del Th. II.2.3.4, Prop. II.2.3.6, Th. II.1.1.1, Prop. II.1.2.2 de A. Haraux [26] (vease también [27]) se tiene el siguiente resultado para el problema de valores iniciales (2).

Teorema 1. ([26]).

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera $\partial\Omega$ de clase C^∞ . Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface (1).

(i) Entonces, para cada par de datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe una única solución de

$$(6) \quad y \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega))$$

$$(7) \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1$$

$$(8) \quad g(y') \in L_{loc}^1((0, \infty); L^1(\Omega)) \cap H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, \infty))$$

$$(9) \quad y'' - \Delta y + g(y') = 0 \quad \text{en} \quad H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, \infty))$$

que satisface

$$(10) \quad g(y')y' \in L_{loc}^1((0, \infty); L^1(\Omega))$$

$$(11) \quad E_y(t) \in W_{loc}^{1,1}(0, \infty); \quad \frac{dE_y(t)}{dt} = - \int_{\Omega} g(y'(x, t))y'(x, t) dx$$

p.c.t. $t \in (0, \infty)$.

(ii) Estabilidad.

Si $\{y^0, y^1\}$ son reemplazados por $\{\bar{y}^0, \bar{y}^1\}$ la correspondiente solución \bar{y} es tal que

$$(12) \quad E_{y-\bar{y}}(t) \leq E_{y-\bar{y}}(0) \quad \forall t \geq 0.$$

(iii) Regularidad.

Si los datos iniciales son más regulares $\{y^0, y^1\} \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$ y $g(y^1) \in L^2(\Omega)$ entonces la

solución pertenece a la clase

$$(13) \quad y \in W^{2,\infty}(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \infty; H^2(\Omega)).$$

Observación 2. En (8), $g(y') \in H_{loc}^{-1}(\Omega \times (0, \infty))$ significa que para todo $0 < t_1 < t_2 < \infty$, $g(y') \in H^{-1}(\Omega \times (t_1, t_2))$. □

Observación 3. A partir de este momento, cuando nos referamos a una solución de (2) se sobreentenderá que se trata de la única que verifica (6) - (11). □

V.3 - El Principio de Invarianza de La Salle y sus consecuencias.

El siguiente resultado responde a la cuestión (a) planteada en el apartado V.1.

Teorema 2. Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 1 y que además

$$(14) \quad g(s)s > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Entonces, para toda solución $y = y(x, t)$ de (1) con datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ se tiene

$$(15) \quad E_y(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Demostración.

Procedemos en dos etapas.

Etapa 1. Soluciones regulares.

Supongamos que los datos iniciales son tales que

$$(16) \quad \{y^0, y^1\} \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega); g(y^1) \in L^2(\Omega).$$

Del Teorema 1 se deduce que

$$\{y(t), y'(t)\}_{t \geq 0} \text{ est\u00e1 acotada en } H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

y por tanto

$$\{y(t), y'(t)\}_{t \geq 0} \text{ es relativamente compacta en } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

Basta probar que el \u00fanico punto de acumulaci\u00f3n de la trayectoria en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ es $\{0, 0\}$.

Sea $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$(17) \quad \{y(t_n), y'(t_n)\} \rightarrow \{z^0, z^1\} \text{ en } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Sea $z_n = z_n(x, t)$ la funci\u00f3n

$$(18) \quad z_n(x, t) = y(x, t + t_n).$$

Dado $T > 0$,

$$\{z_n\} \text{ est\u00e1 acotado en } W^{2, \infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$$

y por tanto, extrayendo una subsucesi\u00f3n que seguimos denotando $\{z_n\}$, se deduce que:

$$(19) \quad z_n \rightarrow z \text{ en } C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$$

con $z = z(x, t)$, que gracias a (17) verifica

$$(20) \quad z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1.$$

Por otra parte

$$(21) \quad - \int_0^T \int_{\Omega} g(z'_n) z'_n dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} g(y'(x, t_n + t)) y'(x, t_n + t) dt dx \\ = E_y(t_n + T) - E_y(t_n).$$

Como $E_y(\cdot)$ es decreciente y no negativa,

$$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} E_y(t)$$

y por tanto, de (21) se deduce que

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} g(z'_n) z'_n dx dt = 0.$$

Como g es no decreciente y verifica (14) se

tiene

$$(23) \quad \int_0^T \int_{\Omega} |g(z'_n)| dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega \cap \{|z'_n| \geq 1\}} g(z'_n) z'_n dx dt + \\ + \int_0^T \int_{\Omega \cap \{|z'_n| \leq 1\}} |g(z'_n)| dx dt.$$

Combinando (22) y (23) se deduce que

$$g(z'_n) \rightarrow 0 \text{ en } L^1(\Omega \times (0, T)).$$

Como $z_n = z_n(x, t)$ es soluci\u00f3n de

$$z_n'' - \Delta z_n + g(z'_n) = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T)$$

se deduce que

$$(24) \quad z'' - \Delta z = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

y además

$$g(z') = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

lo cual, por (14), implica

$$(25) \quad z' = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T).$$

Combinando (24) y (25) vemos que $z = z(x) \in H_0^1(\Omega)$ y además $-\Delta z = 0$ en Ω , lo cual implica $z \equiv 0$ y por lo tanto

$$z^0 = z^1 = 0.$$

Esto concluye la demostración del teorema en el caso en que los datos iniciales son regulares.

Etapa 2. Caso general.

Dados $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, construimos una sucesión de datos $\{y_n^0, y_n^1\} \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$ tal que $g(y_n^1) \in L^2(\Omega)$ y

$$(26) \quad y_n^0 \rightarrow y^0 \quad \text{en } H_0^1(\Omega), \quad y_n^1 \rightarrow y^1 \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

De (12) se obtiene

$$(27) \quad \begin{aligned} E_y(t) &\leq E_{y-y_n}(t) + E_{y_n}(t) \\ &\leq E_{y-y_n}(0) + E_{y_n}(t). \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, fijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(28) \quad E_{y-y_n}(0) < \epsilon/2$$

lo cual es posible gracias a (26). Seguidamente, para n fijado, por lo demostrado en la etapa anterior, vemos que existe $t_0 > 0$ tal que

$$(29) \quad E_{y_n}(t) < \epsilon/2 \quad \forall t \geq t_0.$$

Combinando (27)-(29) se deduce que $E_y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Esto concluye la demostración del teorema. \square

V.4 - Orden de decaimiento de la energía.

En el siguiente teorema demostramos algunas estimaciones superiores sobre el orden de decaimiento de la energía en función de la coercividad de g en el origen y de su crecimiento en el infinito.

Teorema 3. Supongamos que se verifican las condiciones del Teorema 1 y que además:

(a) $\exists p > 0, c > 0$:

$$(30) \quad g(s)s \geq c|s|^{p+1} \quad \forall s \in [-1, 1]$$

$$(31) \quad g(s)s \geq c|s|^2 \quad \forall s \in \mathbb{R}: |s| \geq 1;$$

(b) $\exists \lambda > 0, C > 0, q > 1$:

$$(32) \quad |g(s)| \leq C|s|^\lambda \quad \forall s \in [-1, 1]$$

$$(33) \quad |g(s)| \leq C|s|^q \quad \forall s \in \mathbb{R}: |s| \geq 1 \quad \text{con} \\ (n-2)q \leq (n+2).$$

Entonces,

(i) Si $\lambda = p = 1$, existen constantes $M > 1$, $\gamma > 0$ independientes de los datos iniciales tales que

$$(34) \quad E(t) \leq M E(0) e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0$$

para toda solución de (2);

(ii) Si $\lambda < 1$, existe una constante M que depende de $E_y(0)$ tal que

$$(35) \quad E_y(t) \leq 4 \left[M t + (E_y(0))^{-\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \right]^{-2\lambda/(p+1-2\lambda)} \quad \forall t \geq 0;$$

(iii) Si $\lambda \geq 1$ y $p > 1$, existe una constante $M > 0$ que depende de $E_y(0)$ tal que

$$(36) \quad E_y(t) \leq 4 \left[M t + (E_y(0))^{-\frac{(p-1)}{2}} \right]^{-2/(p-1)} \quad \forall t \geq 0.$$

Observación 4. Las condiciones (30) y (31) aseguran la coercividad de g en el origen y en el infinito. Sin embargo, (32) y (33) controlan su crecimiento.

Es importante observar que el orden de decaimiento de la energía depende únicamente de p y λ , es decir, del comportamiento de g en el origen.

El caso $\lambda = p = 1$ contiene el caso en que g es lineal y se obtiene un orden de decaimiento exponencial. En los otros casos se obtiene un orden de decaimiento polinomial.



Observación 5. Notese que en el caso $n = 2$ es suficiente con que (33) se verifique para algún $q > 1$. En el caso de la dimensión $n = 1$ la hipótesis (33) puede ser eliminada. Gracias a la continuidad de la inyección $H_0^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, basta con que g sea continua. \square

Observación 6. Vamos a utilizar un método basado en la construcción de una energía perturbada, equivalente a la energía $E_y(\cdot)$, y para la cual se obtienen desigualdades diferenciales que conducen a las conclusiones del teorema.

Las estimaciones (34) y (36) fueron demostradas en E. Zuazua [75] generalizando resultados anteriores de A. Haraux y E. Zuazua [30]. La estimación (35) es nueva. En su demostración nos inspiramos en el trabajo de J. Lagnese y G. Leugering [46] para la construcción de la energía perturbada adecuada. \square

Demostración del Teorema 3.

Consideramos primero datos iniciales regulares

$$y^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \quad g(y^1) \in L^2(\Omega); \quad y^1 \in H_0^1(\Omega)$$

ya que las estimaciones se extenderán al caso general por un simple argumento de densidad.

Distinguimos los casos $\lambda \geq 1$ y $\lambda < 1$.

Caso 1. $\lambda \geq 1$.

Definimos la función

$$(37) \quad \phi(t) = [E_y(t)]^{(p-1)/2} \int_{\Omega} y(x,t)y'(x,t) dx.$$

En lo que sigue no explicitaremos la dependencia de la energía en y , ya que trabajaremos con una solución arbitraria fijada.

Se tiene

$$(38) \quad \frac{d\phi}{dt}(t) = \phi'(t) = \frac{p-1}{2} [E(t)]^{\frac{p-3}{2}} E'(t) \int_{\Omega} yy' dx + [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} [|y'|^2 + yy''] dx.$$

Como

$$\left| \int_{\Omega} yy' dx \right| \leq CE(t)$$

y

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall t \geq 0$$

se sigue que

$$\frac{p-1}{2} [E(t)]^{\frac{p-3}{2}} E'(t) \int_{\Omega} yy' dx \leq -C_1 E'(t).$$

Por otra parte, utilizando la ecuación (2) vemos que

$$\int_{\Omega} [|y'|^2 + yy''] dx = \int_{\Omega} [|y'|^2 - |\nabla y|^2 + yg(y')] dx$$

De (38) deducimos por tanto

$$(39) \quad \phi'(t) \leq -C_1 E'(t) + [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Omega} [|y'|^2 - |\nabla y|^2 + yg(y')] dx$$

Por otra parte,

$$(40) \quad \left| \int_{\Omega} g(y') y dx \right| = |\langle g(y'), y \rangle_{H^{-1}, H_0^1}| \leq \|g(y')\|_{H^{-1}(\Omega)} \|y\|_{H_0^1(\Omega)}$$

A este nivel precisamos del siguiente lema.

Lema 1. Existen constantes $C_2, C_3 > 0$ (independientes de la solución) tales que

$$(41) \quad \|g(v)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_2 \left[\int_{\Omega} g(v) v dx \right]^{q/(q+1)} + C_3 \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración del Lema 1.

Primeramente observamos que como $(n-2)q \leq n+2$, en tonces, $L^{(q+1)/q}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ con inyección continua.

De (33) se deduce que

$$(42) \quad |g(s)|^{q+1} \leq C |s|^q |g(s)|^q \quad \forall s \in \mathbb{R}: |s| \geq 1.$$

De (32) y (42) deducimos que

$$(43) \quad \|g(v)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|g(v)\|_{L^{(q+1)/q}(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^{(q+1)/q}(\Omega)} + C \|g(v)v\|_{L^1(\Omega)}$$

de donde se obtiene (41).



De (40) y (41) se obtiene

$$(44) \quad \left| \int_{\Omega} g(y') y' dx \right| \leq c_3 \|y'\|_{L^2(\Omega)} \|y\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ + c_2 \left[\int_{\Omega} g(y') y' dx \right]^{q/(q+1)} \|y\|_{H_0^1(\Omega)} \\ \leq \frac{1}{2} \|y\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + c_4 \|y'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ + c_2 \left[\int_{\Omega} g(y') y' dx \right]^{q/(q+1)} \|y\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Combinando (39) y (44) se deduce

$$(45) \quad \phi'(t) \leq -c_1 E'(t) + c_4 [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \\ - \frac{1}{2} [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \\ + c_2 [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \left[\int_{\Omega} g(y') y' \right]^{q/(q+1)} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Aplicando la desigualdad de Young con exponentes $(q+1)/q$ y $q+1$ al último término de esta desigualdad obtenemos

$$(46) \quad \phi'(t) \leq -c_1 E'(t) + c_4 [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \\ - \frac{1}{4} [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ + c_5 \int_{\Omega} g(y') y' dx$$

$$= -(c_1 + c_5) E'(t) + c_4 [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ - \frac{1}{4} [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

ya que

$$E'(t) = - \int_{\Omega} g(y'(x,t)) y'(x,t) dx.$$

Definimos la energía perturbada

$$(47) \quad E_{\varepsilon}(t) = (1 + \varepsilon(c_1 + c_5)) E(t) + \varepsilon \phi(t).$$

Observese que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(48) \quad \frac{1}{2} [E_{\varepsilon}(t)]^{\frac{p+1}{2}} \leq [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} \leq 2 [E_{\varepsilon}(t)]^{\frac{p+1}{2}} \quad \forall t \geq 0, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Cuando $p > 1$, ε_0 depende continuamente de $E(0)$. Sin embargo, cuando $p = 1$, ε_0 puede ser elegido independiente de $E(0)$.

Distinguimos seguidamente los casos $p = 1$, $p > 1$.

Caso 1.a: $\lambda \geq 1$, $p = 1$.

Se tiene

$$(49) \quad E_{\varepsilon}'(t) \leq E'(t) + \varepsilon c_4 \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\varepsilon}{4} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Como

$$E'(t) = - \int_{\Omega} g(y') y' dx \leq -c_6 \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

tomando

$$\varepsilon < \frac{c_6}{2c_4} = \varepsilon_1$$

tenemos

$$E'_\epsilon(t) \leq -\frac{C_6}{2} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\epsilon}{4} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

y si

$$\epsilon < 2C_6 = \epsilon_2$$

obtenemos

$$(50) \quad E'_\epsilon(t) \leq -\frac{\epsilon}{2} E(t) \leq -\frac{\epsilon}{4} E_\epsilon(t).$$

De (50) deducimos que si

$$\epsilon < \min(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2)$$

se tiene

$$E_\epsilon(t) \leq E_\epsilon(0) e^{-\frac{\epsilon}{4}t} \quad \forall t \geq 0$$

de donde se deduce

$$(51) \quad E(t) \leq 4E(0) e^{-\frac{\epsilon}{4}t} \quad \forall t \geq 0.$$

Caso 1.b. $\lambda \geq 1, p > 1.$

En este caso tenemos

$$(52) \quad E'_\epsilon(t) \leq -\int_{\Omega} g(y')y' dx - \frac{\epsilon}{4} [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \epsilon C_4 [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Por otra parte, de (30) y (31) se deduce que existe $C_6 > 0$ (que depende de la solución) tal que

$$(53) \quad \int_{\Omega} g(y')y' dx \geq C_6 \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^{p+1}.$$

En efecto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(y')y' dx &\geq C \left[\int_{\{|y'| \leq 1\}} |y'|^{p+1} dx + C \int_{\{|y'| \geq 1\}} |y'|^2 dx \right] \\ &\geq \frac{C}{|\Omega|^{\frac{p-1}{2}}} \left[\int_{\{|y'| \leq 1\}} |y'|^2 dx \right]^{\frac{p+1}{2}} + \frac{C}{[2E(0)]^{\frac{p-1}{2}}} \left[\int_{\{|y'| \geq 1\}} |y'|^2 dx \right]^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned}$$

de donde se deduce (53) con

$$C_6 = C [\max\{|\Omega|, 2E(0)\}]^{-\frac{(p-1)}{2}}$$

siendo $|\Omega|$ = medida de Lebesgue de Ω en \mathbb{R}^n .

Combinando (52) y (53) se deduce que

$$(54) \quad E'_\epsilon(t) \leq -C_6 \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^{p+1} + \epsilon C_4 [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\epsilon}{4} [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = -C_6 \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^{p+1} - \frac{\epsilon}{2} [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} + \epsilon(C_4 + \frac{1}{4}) [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ahora bien

$$(55) \quad [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \|y'\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\mu} \|y'\|_{L^2(\Omega)}^{p+1} + \mu^{\frac{p+1}{p-1}} [E(t)]^{\frac{p+1}{2}}$$

para todo $\mu > 0$. Combinando (54) y (55) con $\mu > 0$ suficiente pequeño de forma que

$$\mu^{\frac{p+1}{p-1}} \left(C_4 + \frac{1}{4} \right) \leq \frac{1}{4}$$

obtendremos

$$E'(t) \leq -\frac{\varepsilon}{4} [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} - \left[C_6 - \varepsilon \left(\frac{4C_4 + 1}{4\lambda} \right)^{\frac{p+1}{2}} \right] \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

y eligiendo finalmente

$$\varepsilon \leq \varepsilon_1 = \frac{4C_6 \mu^{(p+1)/2}}{4C_4 + 1}$$

se tendrá

$$(56) \quad \begin{aligned} E'_\varepsilon(t) &\leq -\frac{\varepsilon}{4} [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{8} [E_\varepsilon(t)]^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned}$$

Integrando la desigualdad (56) se obtiene

$$(57) \quad \begin{aligned} E_\varepsilon(t) &\leq \left[\frac{\varepsilon(p-1)}{16} t + [E_\varepsilon(0)]^{-\frac{p-1}{2}} \right]^{-\frac{2}{p-1}} \\ &\leq 2^{\frac{2}{p+1}} \left[\frac{\varepsilon(p-1)}{2(3p+5)/(p+1)} t + [E(0)]^{-\frac{p-1}{2}} \right]^{-\frac{2}{p-1}} \end{aligned}$$

de donde se deduce (36).

Caso 2. $\lambda < 1$.

Definimos la función

$$(58) \quad \phi(t) = [E(t)]^{(p+1-2\lambda)/2\lambda} \int_{\Omega} y(x,t) y'(x,t) dx.$$

De (30) y (32) se sigue que $p \geq \lambda$ y por lo tanto $p+1-2\lambda > 0$.

Tenemos

$$(59) \quad \begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{p+1-2\lambda}{2\lambda} [E(t)]^{\frac{p+1-4\lambda}{2\lambda}} \left[\int_{\Omega} yy' dx \right] E'(t) + \\ &+ [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \int_{\Omega} [|y'|^2 + yy''] dx \\ &\leq -c_1 E'(t) + [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \int_{\Omega} [|y'|^2 - |\nabla_y|^2 + g(y')y] dx. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{|y'| \leq 1\}} g(y') y dx \right| &\leq c \int_{\{|y'| \leq 1\}} |y'|^\lambda |y| dx \leq c \int_{\{|y'| \leq 1\}} [g(y') y']^{\frac{\lambda}{p+1}} |y| dx \leq \\ &\leq c \left[\int_{\Omega} [g(y') y']^{\lambda/(p+1)} dx \right]^{\frac{(p+1)}{(p+1-\lambda)}} \left[\int_{\Omega} |y|^{(p+1)/\lambda} dx \right]^{\frac{(p+1-\lambda)}{(p+1)}} \end{aligned}$$

pero como $(p+1)/(p+1-\lambda) < 2$ obtenemos

$$(60) \quad \begin{aligned} \left| \int_{\{|y'| \leq 1\}} g(y') y dx \right| &\leq c \|y\|_{H_0^1(\Omega)} \left[\int_{\Omega} [g(y') y']^{\lambda/(p+1)} dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c [E(t)]^{1/2} \left[\int_{\Omega} [g(y') y']^{\lambda/(p+1)} dx \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Asimismo, argumentando como en la demostración del

Lema 1 se obtiene

$$(61) \quad \left| \int_{\{|y'| \geq 1\}} g(y') y dx \right| \leq c \left[\int_{\Omega} [g(y') y']^{q/(q+1)} dx \right]^{\frac{1}{2}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Combinando (59)-(61) obtenemos

$$\begin{aligned}
E'_\varepsilon(t) &\leq -c_1 E'(t) + [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \\
&\quad - [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \\
&\quad + c_2 [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \left[\int_{\Omega} g(y') y' dx \right]^{\lambda/(p+1)} + \\
&\quad + c_2 [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \left[\int_{\Omega} g(y') y' dx \right]^{q/(q+1)}.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young con exponentes $(p+1)$ y $(q+1)/q$ en el último sumando de la desigualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
E'_\varepsilon(t) &\leq -(c_1 + c_3) E'(t) + [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \\
&\quad - \frac{1}{2} [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \|y(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \\
&\quad + c_2 [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \left[\int_{\Omega} g(y') y' dx \right]^{\lambda/(p+1)} \\
&= -(c_1 + c_3) E'(t) - [E(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}} + \frac{3}{2} [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + c_2 [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \left[\int_{\Omega} g(y') y' dx \right]^{\lambda/(p+1)}.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young con exponentes $(p+1)/(p+1-\lambda)$ y $(p+1)/\lambda$ en el último término se deduce

$$\begin{aligned}
E'_\varepsilon(t) &\leq -(c_1 + c_3 + c_4) E'(t) - \frac{1}{2} [E(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}} + \\
&\quad + \frac{3}{2} [E(t)]^{\frac{p+1-2\lambda}{2\lambda}} \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Aplicamos Young en el último término con exponentes $(p+1)/(p+1-2\lambda)$ y $(p+1)/2\lambda$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
(63) \quad E'_\varepsilon(t) &\leq -(c_1 + c_3 + c_4) E'(t) - \frac{1}{4} [E(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}} \\
&\quad + c_5 \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p+1}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Finalmente observamos que

$$(64) \quad -E'(t) = \int_{\Omega} g(y') y' dx \geq c_6 \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^{p+1} \geq c_7 \|y'(t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{p+1}{\lambda}}.$$

Combinando (63)-(64) deducimos

$$(65) \quad E'_\varepsilon(t) \leq -c_8 E'(t) - \frac{1}{4} [E(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}}$$

$$\text{con } c_8 = c_1 + c_3 + c_4 + \frac{c_5}{c_7}$$

Definimos la energía perturbada

$$(66) \quad E_\varepsilon(t) = (1 + \varepsilon c_8) E(t) + \varepsilon \phi(t).$$

Se tiene, por (65),

$$\begin{aligned}
(67) \quad E'_\varepsilon(t) &\leq E'(t) - \frac{\varepsilon}{4} [E(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}} \\
&\leq -\frac{\varepsilon}{4} [E(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}}.
\end{aligned}$$

Además si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño se

obtiene

$$(68) \quad \frac{1}{2} [E_\varepsilon(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}} \leq [E(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}} \leq 2 [E_\varepsilon(t)]^{\frac{p+1}{2\lambda}}.$$

Combinando (67) y (68) se obtiene (35) como en el caso 1.6.

De esta manera la demostración queda concluida para datos iniciales regulares. Las estimaciones (34)-(36) se extienden a datos iniciales arbitrarios $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ por densidad ya que las constantes de las estimaciones dependen continuamente de $E_y(0)$. \square

V.5 - Comentarios

1. En la demostración del Teorema 2, el hecho de que g sea no decreciente es crucial ya que permite probar la precompacidad de las trayectorias con datos iniciales regulares.

No se sabe si la conclusión del Teorema 2 es cierta si $g \in C(\mathbb{R})$ verifica

$$(69) \quad g(s)s > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

pero no es necesariamente no decreciente.

M. Slemrod [69] introdujo un principio de invarianza "relajado" que permite demostrar que si

$$(70) \quad |g(s)| \leq C|s| \quad \forall s \in \mathbb{R}: |s| \geq 1$$

y se verifica (69), entonces toda trayectoria de (2) verifica

$$(71) \quad \{y(t), y'(t)\} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \{0, 0\} \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad \square$$

2. El Teorema 2 puede ser ampliamente generalizado en diversas direcciones. En particular, pueden considerarse ecuaciones de ondas de la forma

$$(72) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + a(x)\beta(y') = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in H_0^1(\Omega), y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

con $a = a(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que

$$(73) \quad a \geq a_0 > 0 \quad \text{en } \omega \subset \Omega$$

donde ω es un conjunto medible con medida positiva y β es una función no decreciente pero discontinua que verifica

$$(74) \quad \beta(s)s > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

A. Haraux en [28] demostró que en estas condiciones, las trayectorias $\{y(t), y'(t)\}$ de (72) convergen fuertemente a un equilibrio $\{z, 0\}$ en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde $z = z(x)$ es solución de

$$(75) \quad -\Delta z \in -a(x)\beta(0) \quad \text{en } \Omega, \quad z \in H_0^1(\Omega).$$

El símbolo \in en (75) indica que β puede ser una función multívoca.

Otra de las consecuencias de los resultados de [28] es que para que se tenga

$$E_y(t) \rightarrow 0$$

para toda solución de (2) es suficiente con que $g \in C(\mathbb{R})$

sea no decreciente y verifique

$$0 \notin \text{int}\{g^{-1}(0)\}.$$

Observese que la hipótesis (14) del teorema asegura que $\{g^{-1}(0)\} = \{0\}$ y por lo tanto $\text{int}\{g^{-1}(0)\} = \emptyset$. \square

3. En el Teorema 3 hemos demostrado estimaciones superiores sobre el orden de decaimiento de la energía. Estas estimaciones son probablemente óptimas pero esto nunca ha sido demostrado. \square

4. Tal y como hemos mencionado en la Observación 4, el orden de decaimiento obtenido depende únicamente del comportamiento de g en el origen. Sin embargo, precisamos las condiciones (31) y (33) que limitan el comportamiento de g en el infinito.

Sería interesante saber si las estimaciones (34)-(36) son válidas sin las hipótesis (31) y (33), es decir suponiendo únicamente (30) y (32). \square

5. Las hipótesis (30) y (32) aseguran que cerca del origen el grafo de g está contenido en la región limitada por dos funciones de la forma $|s|^{r-1}s$ con $r > 0$.

Sería interesante adaptar el método de demostración del Teorema 3 para obtener estimaciones del orden de decaimiento de la energía cuando g degenera más rápidamente o es mayor que cualquier función de la forma $|s|^{r-1}s$ con $r > 0$. \square

6. Los resultados de este capítulo se generalizan a ecuaciones abstractas del tipo

$$y'' + Ay + g(y') = 0$$

donde A es un operador elíptico de orden mayor o igual que dos (cf. A.Haroux [26], A.Haroux y E.Zuazua [30] y E.Zuazua [75]). En particular, se obtienen resultados análogos para la ecuación de ondas con condición de contorno de Neumann

$$(76) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + y + g(y') = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in H^1(\Omega), y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

y para la ecuación de placas vibrantes

$$(77) \quad \begin{cases} y'' + \Delta^2 y + g(y') = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in H_0^2(\Omega); y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad \square$$

7. Los métodos de este capítulo permiten también obtener estimaciones para la velocidad de decaimiento de dos soluciones distintas de una ecuación no autónoma de la forma (cf. [26], [30] y [75])

$$(78) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + g(y') = h(x, t) & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in H_0^1(\Omega), y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad \square$$

8. Las mismas técnicas permiten obtener estimaciones sobre la velocidad de decaimiento de las soluciones para ecuaciones semilineales de la forma

$$(79) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + f(y) + g(y') = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$ es una función creciente que verifica ciertas condiciones de crecimiento en el infinito y tal que $f(0) = 0$ (cf. [26], [75]). \square

9. La situación se complica considerablemente cuando consideramos ecuaciones de ondas con disipación localizada

$$(80) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + f(y) + a(x)y' = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

con $a \in L_+^\infty(\Omega)$ tal que

$$(81) \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \omega$$

siendo ω un subconjunto abierto no vacío de Ω .

En el caso lineal $f \equiv 0$, se demuestra que si se tiene la estimación

$$(82) \quad \|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi'|^2 dx dt$$

con $T > 0$ independiente de la solución $\phi = \phi(x, t)$ de la ecuación conservativa

$$(83) \quad \begin{cases} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \phi = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 \end{cases}$$

entonces las soluciones de (80), bajo la hipótesis (81), decaen exponencialmente en $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ (cf. [29]). Sabemos, por el Teorema 1 del Capítulo III, que (82) se cumple si ω es un entorno de un subconjunto de la frontera de la forma $\overline{\Gamma(x^0)}$. Por otra parte, por [2], [3], sabemos que si Ω es de clase C^∞ , (82) se cumple si ω verifica la propiedad de control geométrico.

En el caso particular en que ω es un entorno de toda la frontera Γ , estos resultados se extienden al problema semilineal bajo condiciones adecuadas sobre f (cf. E. Zuazua [77]). En E. Zuazua [78] se demuestran resultados análogos para dominios Ω no acotados cuando ω es la unión de un entorno de infinito en \mathbb{R}^n y de un entorno de $\partial\Omega$ en Ω .

J. da Silva Ferreira en [15] ha obtenido resultados análogos para sistemas de ecuaciones de ondas semilineales con disipación localizada. \square

10. Sea ω_ε un entorno de anchura $\varepsilon > 0$ de $\partial\Omega$ y consideremos la ecuación de ondas con disipación localizada en ω_ε :

$$(84) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + c_\varepsilon \chi_{\omega_\varepsilon} y' = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

con $c_\varepsilon > 0$.

Sería interesante estudiar la posibilidad de elegir c_ε de forma que (84) converja (en un sentido a precisar) a una ecuación de ondas con condiciones de frontera disipativas cuyas soluciones decaigan exponencialmente.

Esta cuestión está relacionada con el comentario 6 del apartado III.5. \square

11. Las técnicas de este capítulo permiten también estudiar ecuaciones de ondas no lineales de la forma

$$(85) \quad \begin{cases} y'' - M\left(\int_{\Omega} |\nabla y(x,t)|^2 dx\right) \Delta y + (-\Delta)^\alpha y' = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

con $\alpha \geq 0$ y $M \in C(\mathbb{R})$ tal que $M(s) \geq m_0 > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

En L.A. Medeiros y M. Milla Miranda [63] se demuestra que cuando $\alpha > 0$ el problema (85) tiene soluciones globales que decaen exponencialmente. El problema de la existencia global y su decaimiento con $\alpha = 0$ es un problema interesante que permanece abierto. \square

12. La obtención de estimaciones sobre la velocidad de decaimiento de las soluciones de ecuaciones de ondas con disipación no lineal localizada del tipo

$$(86) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + \chi_\omega |y'|^{p-1} y' = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 \end{cases}$$

con $p > 1$ y ω entorno de $\partial\Omega$, constituye un problema completamente abierto. \square

VI - ESTABILIZACION FRONTERA DE LA ECUACION DE ONDAS.

VI.1 - Formulaci3n del problema.

En este capítulo estudiaremos la velocidad de decaimiento de la energa de las soluciones de ecuaciones de ondas con condiciones de contorno disipativas.

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera Γ de clase C^2 . Sea $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ una partici3n de la frontera tal que

$$(1) \quad \text{int}(\Gamma_i) \neq \emptyset, \quad i = 0, 1$$

i.e. Γ_i contiene un subconjunto abierto no vacio de Γ para $i = 0, 1$.

Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funci3n tal que

$$(2) \quad g \in C(\mathbb{R}); g(0) = 0; g \text{ no decreciente}$$

y

$$(3) \quad \alpha = \alpha(x) \in L^{\infty}_+(\Gamma_0).$$

Consideramos la ecuación de ondas

$$(4) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = -\alpha(x)g(y') & \text{en } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in V; y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

donde

$$(5) \quad V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\} = H^1_{\Gamma_1}(\Omega).$$

Observación 1. La condición (1) para $i=1$ asegura que $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ define una norma en V , equivalente a la inducida por $H^1(\Omega)$.

Por otra parte, si

$$(6) \quad \begin{cases} g(s)s > 0 & \forall s \in \mathbb{R} \\ \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 & \text{p.c.t. } x \in \Gamma'_0 \end{cases}$$

siendo Γ'_0 un subconjunto abierto y no vacío de Γ_0 , podemos asegurar que el único equilibrio o solución estacionaria del sistema es $y \equiv 0$. \square

Definimos la energía del sistema

$$(7) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla y(x,t)|^2 + |y'(x,t)|^2] dx.$$

Multiplicando la ecuación (4) por y' e integrando por partes se obtiene (este argumento es, por ahora, formal pero será justificado rigurosamente en el siguiente apartado):

$$(8) \quad \frac{dE(t)}{dt} = E'(t) = - \int_{\Gamma_0} \alpha(x)g(y'(x,t))y'(x,t)d\Gamma.$$

De (2), (3) y (8) se deduce que $E(t)$ es decreciente. Por tanto, las condiciones de contorno de (4) son disipativas.

Bajo la hipótesis (6) cabe además esperar que

$$(9) \quad E(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

para toda solución del sistema, o lo que es lo mismo,

$$(10) \quad \{y(t), y'(t)\} \rightarrow \{0, 0\} \quad \text{en } V \times L^2(\Omega), \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

En el apartado VI.3 probaremos, utilizando el principio de Invarianza de La Salle, que efectivamente, (9) y (10) se cumplen bajo la hipótesis (6).

Tras haber demostrado (9)-(10) se plantea de forma natural la siguiente cuestión: ¿Bajo condiciones adecuadas sobre la partición $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ y la no linealidad g , se puede estimar la velocidad de decaimiento de la energía?

En particular, cuando la función g es lineal se espera un decaimiento exponencial uniforme de la energía. Sin embargo, por un argumento clásico de D.L. Russell [67] sabemos que si se tiene decaimiento exponencial uniforme de la energía con disipación a soporte en Γ_1 , entonces la ecuación

ción de ondas es exactamente controlable con controles en $\Gamma_1 \times (0, T)$ para $T > 0$ suficientemente grande.

Tal y como vimos en el capítulo II, es bien sabido que para que la ecuación de ondas sea exactamente controlable con controles a soporte en $\Gamma_1 \times (0, T)$, es preciso que Γ_1 sea una parte suficientemente grande de Γ .

Por lo tanto, si bien cabe esperar que (9)-(10) se cumpla para una amplia clase de particiones $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$, la obtención de estimaciones sobre la velocidad de decaimiento exigirá condiciones geométricas importantes sobre la partición $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$.

Inspirados por los resultados de controlabilidad exacta de los capítulos anteriores, obtenidos mediante técnicas de multiplicadores, el primer caso a considerar es cuando

$$(11) \quad \begin{cases} \Gamma_0 = \Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma : (x - x^0) \cdot \nu(x) > 0\} \\ \Gamma_1 = \Gamma_*(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0). \end{cases}$$

En el apartado VI.4 combinaremos las técnicas de multiplicadores y los métodos del capítulo V y probaremos estimaciones sobre la velocidad de decaimiento de la energía para la partición (11). Tal y como veremos, la elección del potencial $\alpha(x)$ será fundamental. En efecto, elegiremos

$$(12) \quad \alpha(x) = (x - x^0) \cdot \nu(x).$$

Se trata de un potencial positivo en $\Gamma(x^0)$, pero que se anula linealmente en los puntos de interfase $x \in \Gamma(x^0) \cap \Gamma_*(x^0)$.

A primera vista, esta elección de α parece contradecir la idea (errónea) de que cuanto mayor sea α mayor ha de ser la velocidad de decaimiento. En efecto, notese que si $\alpha = \text{cte} \rightarrow \infty$, las condiciones de contorno de (4) tienden, al menos formalmente, a las condiciones de contorno

$$g(y') = 0 \text{ en } \Gamma(x^0) \times (0, \infty); y = 0 \text{ en } \Gamma_*(x^0) \times (0, \infty)$$

que, en el caso particular en que $g(s)s > 0 \forall s \neq 0$ y $y^0 \in H_0^1(\Omega)$, coinciden con las condiciones homogéneas de Dirichlet.

Por lo tanto, no es de extrañar que se obtengan resultados de decaimiento para potenciales que degeneran en las interfases $\Gamma(x^0) \cap \Gamma_*(x^0)$ y no para potenciales uniformemente coercivos. \square

Debido a las condiciones de contorno de tipo mixto Dirichlet-Neumann, las soluciones de (4) desarrollan singularidades en los puntos $x \in \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1}$ donde se produce el cambio de condiciones de contorno, incluso si los datos iniciales son regulares. Por ello, es preciso ser prudentes en la aplicación de las técnicas de multiplicadores ya que algunas de las integraciones por partes que se precisan no se pueden justificar. P. Grisvard en [21] y [22] realizó un estudio detallado de estas singularidades y probó que algunas de las identidades que serían deseables en la aplicación de los multiplicadores no son ciertas. Sin embargo, en [21], [22] se demuestra que para la partición (11), se verifican determinadas desigualdades (y no identidades!), lo cual es su

ficiente para obtener las estimaciones a priori precisas. El estudio de P.Grisvard se limita a las dimensiones $n \leq 3$ y por lo tanto nuestros resultados también se referirán únicamente a los casos $n = 1, 2, 3$.

La restricción $n \leq 3$ es muy probablemente técnica y los resultados de este capítulo son posiblemente válidos en cualquier dimensión. De hecho, los argumentos que nosotros utilizamos (exceptuando la utilización de las desigualdades de P.Grisvard) no dependen de la dimensión. Pero insistimos en que solamente están plenamente justificados si $n \leq 3$. \square

Por supuesto, las soluciones no desarrollan singularidades si no hay puntos de interfase, i.e. si

$$(13) \quad \overline{\Gamma(x^0)} \cap \overline{\Gamma_*(x^0)} = \emptyset.$$

En este caso las observaciones anteriores no se aplican. Sin embargo (13) impone condiciones muy restrictivas sobre la geometría del dominio y se cumple esencialmente si

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega_1}$$

siendo Ω_0 y Ω_1 dominios estrellados con respecto a x^0 y con $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_0$. \square

Es conveniente hacer la siguiente observación sobre la condición (1). En el caso de la partición (11), la condición

$$\text{int}(\Gamma(x^0)) \neq \emptyset$$

es necesaria si se pretende obtener el decaimiento de las soluciones. Sin embargo, en principio, la condición

$$\text{int}(\Gamma_*(x^0)) \neq \emptyset$$

no parece natural. En este punto hemos de tener en cuenta que si $\Gamma_*(x^0) = \emptyset$ y $\Gamma(x^0) = \Gamma$ las condiciones de contorno de (4) son de tipo Neumann

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = -\alpha(x)g(y') \quad \text{en } \Gamma \times (0, \infty).$$

En este caso, toda función constante es solución del sistema y si bien es de energía cero no tiene sentido hablar de su decaimiento. Lo que ocurre es que $V = H^1(\Omega)$ y la seminorma $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ no define una norma en $H^1(\Omega)$.

En este caso, con el objeto de eliminar estas soluciones estacionarias no triviales y de probar el decaimiento de toda trayectoria $\{y(t), y'(t)\}$ en $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ conviene considerar condiciones de contorno del tipo

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + \beta(x)y = -\alpha(x)g(y') \quad \text{en } \Gamma \times (0, \infty)$$

con $\beta \in L^{\infty}_+(\Gamma)$, $\beta \neq 0$. \square

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En VI.2 estudiamos el problema de valores iniciales (4). En VI.3 aplicamos el principio de invarianza de La Salle y probamos el decaimiento (sin estimaciones) de toda solución bajo condiciones muy generales sobre la partición de la frontera y la no linealidad g . En VI.4 obtenemos estimaciones sobre la velocidad de decaimiento de la energía en el caso

de la partici3n (11). En VI.5 damos una segunda demostraci3n del decaimiento exponencial en el caso de la disipaci3n lineal. Concluimos el capitulo con un apartado dedicado a comentarios sobre las extensiones de los resultados de este capitulo y algunos problemas abiertos.

VI.2 - El problema de valores iniciales.

Sea $V = H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ y definamos el operador $A \in L(V, V')$ mediante

$$(14) \quad \langle Av, w \rangle = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx, \quad \forall v, w \in V.$$

En (14), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad entre V' y V .

Supongamos que $g \in C(\mathbb{R})$, adem3s de verificar (2) satisface

$$(15) \quad \exists C > 0: |g(s)| \leq C(1 + |s|) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Definimos el operador no lineal $B: V \rightarrow V'$ siguiendo

$$(16) \quad \langle Bv, w \rangle = \int_{\Gamma_0} \alpha(x) g(v(x)) w(x) d\Gamma \quad \forall v, w \in V.$$

De (15) se deduce que $v \rightarrow g(v)$ es continua de $L^2(\Gamma_0) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$. Por otra parte, como $\alpha \in L^\infty(\Gamma_0)$ y la aplicaci3n traza $\gamma: H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_0)$ es continua, Bv define un 3nico elemento de V' para cada $v \in V$.

Como $\alpha \geq 0$ y g es mon3tona no decreciente, el operador B es mon3tono ya que

$$\langle Bv, w \rangle = \int_{\Gamma_0} \alpha(x) (g(v(x)) - g(w(x))) (v(x) - w(x)) d\Gamma \geq 0$$

Introducimos la variable vectorial

$$(17) \quad u(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

(que para simplificar la notaci3n escribiremos como $u(t) = \{y(t), y'(t)\}$) y el operador matricial

$$(18) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix}$$

con domini3

$$(19) \quad \mathcal{D}(A) = \{ \{v, w\} \in V \times V / Av + Bw \in L^2(\Omega) \}.$$

Con estas definiciones, el sistema (4) se escribe

$$(20) \quad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ u(0) = \{y^0, y^1\} \in V \times L^2(\Omega) \\ u(t) \in V \times L^2(\Omega) & \text{para } t \in (0, \infty) \end{cases}$$

Veamos que el operador $(A, \mathcal{D}(A))$ es maximal mon3tono en $V \times L^2(\Omega)$.

Dados $u_1 = \{v_1, w_1\}, u_2 = \{v_2, w_2\} \in \mathcal{D}(A)$ se tiene

$$(21) \quad \begin{aligned} & (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_{V \times L^2(\Omega)} = \\ & = (\{w_2 - w_1, Av_1 - Av_2 + Bw_1 - Bw_2\}, \{v_1 - v_2, w_1 - w_2\})_{V \times L^2(\Omega)} = \\ & = \int_{\Omega} \nabla(w_2 - w_1) \nabla(v_1 - v_2) dx + \langle Av_1 - Av_2, w_1 - w_2 \rangle + \\ & + \langle Bw_1 - Bw_2, w_1 - w_2 \rangle = \langle Bw_1 - Bw_2, w_1 - w_2 \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $(A, \mathcal{D}(A))$ es monótono en $V \times L^2(\Omega)$.

En (21), $(\cdot, \cdot)_{V \times L^2(\Omega)}$ denota el producto escalar en $V \times L^2(\Omega)$:

$$(22) \quad ((v_1, w_1), (v_2, w_2))_{V \times L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla v_2 dx + \int_{\Omega} w_1 w_2 dx$$

$$V\{(v_1, w_1), (v_2, w_2)\} \in V \times L^2(\Omega).$$

Veamos que $R(I+A) = \text{rango de } (I+A) = V \times L^2(\Omega)$.

Dados $(f, g) \in V \times L^2(\Omega)$ consideramos la ecuación

$$(23) \quad (v, w) + A\{v, w\} = (f, g)$$

es decir

$$(24) \quad v - w = f \in V, \quad w + Av + Bw = g \in L^2(\Omega).$$

Escribiendo $v = f + w$ en la segunda ecuación se obtiene

$$(25) \quad Aw + Bw + w = g - Af \in V'.$$

Como A es estrictamente coercivo en V , ya que

$$(26) \quad \langle Av, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

y $\langle Bw, w \rangle \geq 0$ en V , se observa que $(A+B+I)^{-1}$ (bien definido en $R(A+B+I)$) envía conjuntos acotados de V' en conjuntos acotados de V . Como por otra parte, $A+B$ es monótono y continuo de V en V' , se deduce que $R(A+B+I) = V'$ (vease F.Browder [6], capítulo I).

Si $w \in V$ es la única solución de (25), entonces $\{w+f, w\} \in V \times V$ es la única solución de (23). Por otra parte $Bw + Av = g - w \in L^2(\Omega)$ (con $v = w+f$) y por lo tanto $\{v, w\} \in \mathcal{D}(A)$.

Como A es maximal monótono, genera un semigrupo continuo de contracciones no lineales en $\overline{\mathcal{D}(A)}$. Por otra parte, como $g(0) = 0$,

$$(27) \quad \{v \in V : Av \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_0} = 0\} \times V \subset \mathcal{D}(A).$$

Deducimos que $\mathcal{D}(A)$ es denso en $V \times H$; i.e. $\overline{\mathcal{D}(A)} = V \times H$.

Aplicando los resultados de H.Brezis [5], capítulo III, obtenemos (vease también A.Haraux [23], p. 70-79) el siguiente resultado de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones.

Teorema 1. Supongamos que se verifican (1) - (3) y (15).
Entonces se tienen los siguientes resultados:

(a) Soluciones fuertes.

Si $\{y^0, y^1\} \in \mathcal{D}(A)$ existe una única solución de (4)
en la clase

$$(28) \quad \begin{cases} y \in W^{1, \infty}(0, \infty; V) \cap W^{2, \infty}(0, \infty; L^2(\Omega)) \\ Ay(t) + By'(t) \in L^2(\Omega), \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

y la energía asociada verifica

$$(29) \quad \frac{dE(t)}{dt} = E'(t) = - \int_{\Gamma_0} \alpha(x) g(y'(x, t)) y'(x, t) d\Gamma, \quad \forall t > 0.$$

(b) Soluciones débiles.

Si $\{y^0, y^1\} \in V \times L^2(\Omega)$ el sistema (4) admite única solución débil tal que

$$(30) \quad y \in C([0, \infty); V) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

(c) Estabilidad.

Dados dos soluciones débiles y , cualesquiera se tiene

$$(31) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla y(x, t) - \nabla \bar{y}(x, t)|^2 + |y'(x, t) - \bar{y}'(x, t)|^2] dx \leq \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla y^0(x) - \nabla \bar{y}^0(x)|^2 + |y^1(x) - \bar{y}^1(x)|^2] dx.$$

Observación 2. Se pueden demostrar resultados de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones más generales, considerando por ejemplo, funciones multivocas g con crecimiento superlineal en el infinito (cf. I. Lasiecka [48], [49]). \square

VI.3 - Consecuencias del Principio de Invarianza de La Salle.

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2. Supongamos que se verifican las condiciones (1)-(3) y (15) y que además

(32) $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ p.c.t. $x \in \Gamma'_0$ subconjunto abierto no vacío de Γ

(33) $g(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$

Entonces, para todo $\{y^0, y^1\} \in V \times L^2(\Omega)$ la solución débil correspondiente de (4) es tal que

$$(34) \quad E(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Observación 3. Las condiciones (32) y (33) nos aseguran que la disipación es efectiva en Γ'_0 cualquiera que sea el valor de $y' \neq 0$. \square

Demostración del Teorema 2.

Tal y como observamos en la demostración del Teorema 2 del capítulo V, gracias a la propiedad de estabilidad (31) y a la densidad de $\mathcal{D}(A)$ en $V \times L^2(\Omega)$, basta considerar el caso de los datos iniciales $\{y^0, y^1\} \in \mathcal{D}(A)$.

Combinando (28) y la ecuación (4) deducimos que

$$(35) \quad \{y(t), y'(t)\}_{t \geq 0} \text{ es relativamente compacta en } V \times L^2(\Omega).$$

Por lo tanto, basta probar que el único punto de acumulación de la trayectoria en $V \times L^2(\Omega)$ es $\{0, 0\}$.

Sea $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$(36) \quad \{y(t_n), y'(t_n)\} \rightarrow \{z^0, z^1\} \text{ en } V \times L^2(\Omega).$$

Definimos las soluciones trasladadas

$$(37) \quad z_n(x, t) = y(x, t + t_n).$$

Dado $T > 0$ cualquiera

$$(38) \quad \{z_n\} \text{ está acotada en } W^{1,\infty}(0, T; V) \cap W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

y además es solución de (4) para $t \in [0, T]$. Utilizando (4) y (28) deducimos que

$$(39) \quad \{z_n\} \text{ es relativamente compacta en } C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Por tanto, extrayendo una subsucesión (que seguiremos denotando mediante $\{z_n\}$) tendremos

$$(40) \quad z_n \rightarrow z \text{ en } C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$$

con

$$(41) \quad z(0) = z^0, z'(0) = z^1.$$

Por otra parte, se tiene

$$(42) \quad z'' - \Delta z = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T).$$

De (29) deducimos que la energía $E(t)$ asociada a $y = y(x, t)$ es decreciente y por lo tanto

$$(43) \quad \exists \lim_{t \rightarrow \infty} E(t).$$

Ahora bien, como

$$(44) \quad \int_0^T \int_{\Gamma_0} \alpha(x) g(z'_n(x, t)) z'_n(x, t) dx dt = \int_{t_n}^{t_n+T} \int_{\Gamma_0} \alpha(x) g(y') y' d\Gamma dt = E(t_n) - E(t_n + T)$$

deducimos que

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \alpha(x) g(z'_n(x, t)) z'_n(x, t) d\Gamma dt = 0.$$

De (45) se sigue que

$$\alpha(x) g(z'(x, t)) z'(x, t) = 0 \text{ en } \Gamma_0 \times (0, T)$$

y por (32)-(33) deducimos

$$(46) \quad z'(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma_0^i \times (0, T).$$

Pero entonces, pasando al límite en la condición de contorno verificada por z_n obtenemos también

$$(47) \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \Gamma_0 \times (0, T).$$

Por tanto, el límite $z = z(x, t)$ satisface

$$(48) \quad \begin{cases} z'' - \Delta z = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \Gamma_0 \times (0, T); z = 0 & \text{en } \Gamma_1 \times (0, T) \\ z' = 0 & \text{en } \Gamma_0^i \times (0, T) \\ z(0) = z^0, z'(0) = z^1. \end{cases}$$

La función $\eta = z'$ satisface entonces

$$(49) \quad \begin{cases} \eta'' = \Delta \eta = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = \eta = 0 & \text{en } \Gamma'_0 \times (0, T). \end{cases}$$

Pero por el Teorema de Holmgren sabemos que si $T > 0$ es suficientemente grande ($T > 2 \text{ diam}(\Omega)$), de (49) se deduce (con $2\varepsilon = T - \text{diam}(\Omega)$)

$$\eta \equiv 0 \quad \text{en } \Omega \times \left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right)$$

y por lo tanto

$$z = z(x) \quad \text{en } \Omega \times \left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right).$$

Como z satisface entonces

$$\begin{cases} -\Delta z = 0 & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \Gamma_0 \end{cases}$$

deducimos que $z \equiv 0$ en $\Omega \times \left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right)$ y por consiguiente $z \equiv 0$ en $\Omega \times (0, T)$. En particular $z^0 = z^1 = 0$.

El Teorema 2 está demostrado. \square

Observación 4. En G.Chen y H.K.Wang [11] y I.Lasiecka [49] se demuestran resultados más generales que se aplican a funciones multívocas g que son superlineales en el infinito.

No hemos insistido en las condiciones óptimas de crecimiento sobre g en el infinito ya que en el próximo

apartado precisaremos que g sea sublineal en el infinito. \square

VI.4 - Estimaciones sobre la velocidad de decaimiento.

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n de frontera Γ de clase C^2 . Dado un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(50) \quad \text{int}(\Gamma_*(x^0)) \neq \emptyset$$

definimos

$$(51) \quad \alpha(x) = (x - x^0) \cdot \nu(x)$$

y consideramos el sistema

$$(52) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \Gamma_*(x^0) \times (0, \infty) \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = -\alpha(x)g(y') & \text{en } \Gamma(x^0) \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in V, y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

con $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_*(x^0)} = 0\}$.

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3. Supongamos que la dimensión espacial $n \leq 3$.
Supongamos que se verifica (50) y que $g \in C(\mathbb{R})$
es una función no decreciente que satisface.

$$(53) \quad \exists \lambda > 0, C > 0: |g(s)| \leq C|s|^\lambda \quad \forall s \in [-1, 1]$$

$$(54) \quad \exists c > 0: \quad |g(s)| \leq c|s| \quad \forall s \in \mathbb{R}: |s| \geq 1$$

$$(55) \quad \exists p > 0, c > 0: \quad g(s)s \geq c|s|^{p+1} \quad \forall s \in [-1, 1]$$

$$(56) \quad \exists c > 0: \quad g(s)s \geq c|s|^2 \quad \forall s \in \mathbb{R}: |s| \geq 1.$$

Entonces,

(i) Si $\lambda = p = 1$, existen constantes $M > 1, \gamma > 0$ independientes de los datos iniciales tales que

$$(57) \quad E(t) \leq ME(0)e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0$$

para toda solución de (52);

(ii) Si $\lambda < 1$, existe una constante M que depende de $E(0)$ tal que

$$(58) \quad E(t) \leq 4 \left(Mt + (E(0)) \frac{-p+1-2\lambda}{2\lambda} \right)^{-2\lambda/(p+1-2\lambda)} \quad \forall t \geq 0;$$

(iii) Si $\lambda \geq 1$ y $p > 1$, existe una constante $M > 0$ que depende de $E(0)$ tal que

$$(59) \quad E(t) \leq 4 \left(Mt + (E(0)) \frac{-(p-1)}{2} \right)^{-2/(p-1)} \quad \forall t \geq 0.$$

Observación 5. Los ordenes de decaimiento son análogos a los obtenidos en el Teorema 3 del Capítulo V. Obsérvese que las condiciones (54) y (56) en el infinito son muy restrictivas e imponen sobre g un comportamiento prácticamente lineal. Sin embargo, el orden de decaimiento de la energía depende únicamente de las propiedades de g en el origen. \square

Observación 6. La restricción $n \leq 3$ sobre la dimensión es debida, tal y como mencionamos en VI.1, a las singularidades que las soluciones de (52) desarrollan en los puntos de interfase $x \in \overline{\Gamma(x^0)} \cap \overline{\Gamma_*(x^0)}$. El resultado es probablemente cierto para cualquier dimensión de espacio.

Por supuesto, en el caso particular en que

$$\overline{\Gamma(x^0)} \cap \overline{\Gamma_*(x^0)} = \emptyset$$

las soluciones no presentan singularidades y el resultado anterior se aplica sin ninguna restricción sobre la dimensión n . \square

Observación 7. Este resultado fue demostrado en E. Zuazua [76] para el caso $\lambda \geq 1$. En la demostración del caso $\lambda < 1$ nos inspiramos en la perturbación de la energía utilizada por J. Lagnese y G. Leugering en [46]. \square

Demostración del Teorema 3.

Gracias a la propiedad de estabilidad (3) y a que todos las constantes que aparecerán en las estimaciones siguientes dependerán continuamente de $E(0)$, basta con que consideremos datos iniciales

$$\{y^0, y^1\} \in \mathcal{D}(A).$$

Consideramos la función

$$(60) \quad \rho(t) = 2 \int_{\Omega} y'(x,t) m(x) \cdot \nabla y(x,t) dx + (n-1) \int_{\Omega} y'(x,t) y(x,t) dx$$

con $m(x) = x - x^0$.

Observese que

$$(61) \quad |\rho(t)| \leq C_1 E(t)$$

con $C_1 = 2R + (n-1)\mu$ donde $R = \|x - x^0\|_{L^\infty(\Omega)}$ y $\mu > 0$ es la menor constante tal que

$$(62) \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

A partir de este momento, con el objeto de simplificar la notación, omitiremos la variable x en los signos de integración.

Calculamos la derivada de ρ y obtenemos

$$(63) \quad \begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = \rho'(t) &= 2 \int_{\Omega} y'' m \cdot \nabla y dx + 2 \int_{\Omega} y' m \cdot \nabla y' dx + \\ &+ (n-1) \int_{\Omega} |y'|^2 dx + (n-1) \int_{\Omega} y'' y dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \Delta y m \cdot \nabla y dx + \int_{\Omega} m \cdot \nabla (|y'|^2) dx + \\ &+ (n-1) \int_{\Omega} |y'|^2 dx + (n-1) \int_{\Omega} \Delta y y dx. \end{aligned}$$

Tenemos

$$(64) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} m \cdot \nabla (|y'|^2) dx &= -n \int_{\Omega} |y'|^2 dx + \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma \\ &= -n \int_{\Omega} |y'|^2 dx + \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma \end{aligned}$$

$$(65) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta y y dx &= - \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu} y d\Gamma = \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \int_{\Gamma(x^0)} \alpha(x) g(y') y d\Gamma. \end{aligned}$$

Precisamos de este resultado, esencialmente debido a P.Grisvard [21] y [22].

Lema 1. Para toda función $y \in V$ tal que $\Delta y \in L^2(\Omega)$ y $\frac{\partial y}{\partial \nu} = (m \cdot \nu)v$ con $v \in L^2(\Gamma(x^0))$ se verifica la desigualdad

$$(66) \quad 2 \int_{\Omega} \Delta y m \cdot \nabla y dx \leq (n-2) \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + R^2 \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |v|^2 d\Gamma.$$

Demostración del Lema 1.

P.Grisvard en [22], [23] probó que si $v = 0$ se tiene

$$(67) \quad \begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \Delta y m \cdot \nabla y dx &\leq (n-2) \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \int_{\Gamma_*(x^0)} (m \cdot \nu) \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |\nabla_{\sigma} y|^2 d\Gamma \end{aligned}$$

cuando $n \leq 3$ (En (67), ∇_{σ} denota el gradiente tangencial).

Ahora bien, como $m \cdot \nu \geq 0$ sobre $\Gamma(x^0)$ y $m \cdot \nu \leq 0$ sobre $\Gamma_*(x^0)$, obtenemos

$$(68) \quad 2 \int_{\Omega} \Delta y m \cdot \nabla y dx \leq (n-2) \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx.$$

Seguidamente, en V. Komornik y E. Zuazua [39] probamos que si $v \in H^{1/2}(\Gamma(x^0))$ se verifica

$$(69) \quad 2 \int_{\Omega} \Delta y m \cdot \nabla y dx \leq \\ \leq (n-2) \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu} m \cdot \nabla y d\Gamma - \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma.$$

Por otra parte,

$$(70) \quad 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu} m \cdot \nabla y d\Gamma - \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma = \\ = 2 \int_{\Gamma(x^0)} \frac{\partial y}{\partial \nu} m \cdot \nabla y d\Gamma - \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_*(x^0)} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma \leq \\ \leq 2 \int_{\Gamma(x^0)} \frac{\partial y}{\partial \nu} m \cdot \nabla y d\Gamma - \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma \\ \leq R^2 \int_{\Gamma(x^0)} \frac{1}{(m \cdot \nu)} \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma = R^2 \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |v|^2 d\Gamma.$$

Combinando (69) y (70) se obtiene (66).

Por último la desigualdad (66) se extiende al caso $v \in L^2(\Gamma(x^0))$ por densidad. \square

Combinando (63), (64), (65) y (66) obtenemos

$$(71) \quad p'(t) \leq -2E(t) + \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) [R^2 |g(y')|^2 - (n-1)g(y')y + |y'|^2] d\Gamma.$$

A este nivel distinguimos los casos $\lambda \geq 1$ y $\lambda < 1$.

Caso 1. $\lambda \geq 1$.

Sea $\beta > 0$ la mayor constante tal que

$$(72) \quad \beta \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |v|^2 d\Gamma \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \quad \forall v \in V.$$

Se tiene

$$(n-1) \left| \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) g(y') y d\Gamma \right| \leq E(t) + \frac{(n-1)^2}{2\beta} \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |g(y')|^2 d\Gamma$$

y por tanto, por (53)-(54),

$$(73) \quad (n-1) \left| \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) g(y') y d\Gamma \right| \leq E(t) + C \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma.$$

Combinando (71) y (73) se obtiene

$$(74) \quad p'(t) \leq -E(t) + C \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma.$$

Sea

$$(75) \quad \phi(t) = [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \rho(t).$$

Se tiene

$$(76) \quad \phi'(t) = \frac{p-1}{2} [E(t)]^{\frac{p-3}{2}} \rho(t) E'(t) + [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \rho'(t) \\ \leq -C_2 E'(t) - [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} + C [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma$$

$$\text{con } C_2 = \left(\frac{p-1}{2}\right) C_1 (E(0))^{\frac{p-1}{2}}.$$

Dado $\epsilon > 0$ definimos el funcional

$$(77) \quad E_{\epsilon}(t) = (1 + \epsilon C_2) E(t) + \epsilon [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \rho(t).$$

Como $E(t) \leq E(0)$, tomando $\varepsilon \leq \varepsilon_0(E_0)$ se obtiene

$$\frac{1}{2} [E_\varepsilon(t)]^{\frac{p+1}{2}} \leq [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} \leq 2 [E_\varepsilon(t)]^{\frac{p+1}{2}}.$$

De (29) y (76) se obtiene

$$(78) \quad E'_\varepsilon(t) \leq - \int_{\Gamma(x^0)} (m.v) g(y') y' d\Gamma - \\ - \varepsilon [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} + \varepsilon C [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma(x^0)} (m.v) |y'|^2 d\Gamma.$$

De (56) se deduce que si $\varepsilon \leq \varepsilon_1(E_0)$:

$$(79) \quad \varepsilon C [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \geq 1\}} (m.v) |y'|^2 d\Gamma \leq$$

$$\leq \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \geq 1\}} (m.v) g(y') y' d\Gamma.$$

Por otra parte, si $p > 1$,

$$(80) \quad C [E(t)]^{\frac{p-1}{2}} \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v) |y'|^2 d\Gamma \leq \\ \leq \frac{1}{2} [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} + C \left[\int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v) |y'|^2 d\Gamma \right]^{\frac{p+1}{2}}$$

pero por (55),

$$(81) \quad \left[\int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v) |y'|^2 d\Gamma \right]^{\frac{p+1}{2}} \leq \\ \leq C \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v) |y'|^{p+1} d\Gamma \leq C \int_{\Gamma(x^0)} (m.v) g(y') y' d\Gamma.$$

Combinando (78) - (81) con $\varepsilon > 0$ eventualmente menor se deduce que

$$(82) \quad E'_\varepsilon(t) \leq - \frac{\varepsilon}{2} [E(t)]^{\frac{p+1}{2}} \leq - \frac{\varepsilon}{4} [E_\varepsilon(t)]^{\frac{p+1}{2}}$$

de donde se concluye (59).

Cuando $p=1$, se obtiene fácilmente de (78):

$$(83) \quad E'_\varepsilon(t) \leq - E(t) \leq - \frac{\varepsilon}{2} E_\varepsilon(t)$$

de donde se concluye (57).

Caso 2. $\lambda \leq 1$.

Definimos

$$(84) \quad \phi(t) = [E(t)]^{\frac{(p+1-2\lambda)}{2\lambda}} \rho(t).$$

Tenemos

$$(85) \quad \phi'(t) = \frac{p+1-2\lambda}{2\lambda} [E(t)]^{\frac{(p+1-4\lambda)}{2\lambda}} \rho(t) E'(t) + \\ + [E(t)]^{\frac{(p+1-2\lambda)}{2\lambda}} \rho'(t) \leq \\ \leq -C E'(t) - 2 [E(t)]^{\frac{(p+1)}{2\lambda}} + \\ + [E(t)]^{\frac{(p+1-2\lambda)}{2\lambda}} \int_{\Gamma(x^0)} (m.v) [R^2 |g(y')|^2 - (n-1)g(y')y + |y'|^2] d\Gamma.$$

Observamos que gracias a (53) y (55):

$$\begin{aligned}
 (86) \quad & \left| \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v)g(y')y'dr \right| \leq C \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v)|y'|^\lambda |y|dr \leq \\
 & \leq C \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v)(g(y')y')^{\frac{\lambda}{(p+1)}} |y|dr \leq \\
 & \leq C \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right]^{\frac{\lambda}{(p+1)}} \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)|y|^{\frac{(p+1)}{(p+1-\lambda)}} dr \right]^{\frac{(p+1-\lambda)}{(p+1)}} \leq \\
 & \leq C |E(t)|^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right]^{\frac{\lambda}{(p+1)}}
 \end{aligned}$$

ya que $\frac{(p+1)}{(p+1-\lambda)} \leq 2$.

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned}
 (87) \quad & (n-1) \left| \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \geq 1\}} (m.v)g(y')y'dr \right| \leq \\
 & \leq C \left(\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)|y|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \geq 1\}} (m.v)|g(y')|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C [E(t)]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

y ademās

$$\begin{aligned}
 (88) \quad & \int_{\Gamma(x^0)} (m.v)|g(y')|^2 dr \leq C \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \geq 1\}} (m.v)g(y')y'dr + \\
 & + C \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v) \left[g(y')y' \right]^{\frac{2\lambda}{(1+\lambda)}} dr \leq \\
 & \leq -CE'(t) + C \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right]^{\frac{2\lambda}{1+\lambda}}.
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$(89) \quad \int_{\Gamma(x^0)} (m.v)|y'|^2 dr \leq C \int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr + C \int_{\Gamma(x^0) \cap \{|y'| \leq 1\}} (m.v) \left[g(y')y' \right]^{\frac{2}{(p+1)}} dr$$

$$\leq \begin{cases} -CE'(t) & \text{si } p \leq 1 \\ -CE'(t) + C \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right]^{\frac{2}{(p+1)}} & \text{si } p > 1. \end{cases}$$

Combinando (85) - (89) obtenemos

$$\begin{aligned}
 (90) \quad \phi'(t) & \leq -CE'(t) - 2[E(t)]^{\frac{(p+1)}{2\lambda}} + \\
 & + [E(t)]^{\frac{(p+1-\lambda)}{2\lambda}} \left\{ \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right]^{\frac{\lambda}{(p+1)}} + \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right]^{\frac{2\lambda}{(1+\lambda)}} \right. \\
 & \left. + [E(t)]^{\frac{(p+1-2\lambda)}{2\lambda}} \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right]^{\frac{2\lambda}{(1+\lambda)}} \right. \\
 & \left. + [E(t)]^{\frac{(p+1-2\lambda)}{2\lambda}} \left[\int_{\Gamma(x^0)} (m.v)g(y')y'dr \right]^{\frac{2}{(p+1)}} \right\} \text{ si } p > 1.
 \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young en (90) se obtiene

$$(91) \quad \phi'(t) \leq -C_3 E'(t) - [E(t)]^{\frac{(p+1)}{2\lambda}}$$

con $C_3 > 0$ que depende continuamente de $E(0)$.

Dado $\varepsilon > 0$ definimos el funcional

$$(92) \quad E_\varepsilon(t) = (1 + \varepsilon C_3)E(t) + \varepsilon \phi(t).$$

Como $E(t) \leq E(0)$, tomando $\varepsilon \leq \varepsilon_0(E(0))$ se tiene

$$(93) \quad \frac{1}{2} [E_\varepsilon(t)]^{\frac{(p+1)}{2\lambda}} \leq [E(t)]^{\frac{(p+1)}{2\lambda}} \leq 2 [E_\varepsilon(t)]^{\frac{(p+1)}{2\lambda}}.$$

Por otra parte, de (29) y (91) se deduce

$$(94) \quad E'_\varepsilon(t) \leq E'(t) - \varepsilon [E(t)]^{\frac{(p+1)}{2\lambda}} \leq -\frac{\varepsilon}{2} [E_\varepsilon(t)]^{\frac{(p+1)}{2\lambda}}$$

de donde se concluye (58). —

VI.5 - Segunda demostración del decaimiento exponencial.

En este apartado vamos a presentar una segunda demostración del decaimiento exponencial de la energía de las soluciones de sistemas del tipo (52) con condiciones de contorno no lineales. Presenta la ventaja de aplicarse en situaciones en las que no se sabe construir funcionales de energía perturbados que permiten, como en el apartado anterior, obtener estimaciones para la velocidad de decaimiento. Su mayor inconveniente es que sólo se aplica con condiciones lineales (o que crecen linealmente tanto en el origen como en el infinito).

Consideremos el sistema

$$(95) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + by = -[(x - x^0) \cdot \nu(x)] y' & \text{en } \Gamma(x^0) \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \Gamma_*(x^0) \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in V, y'(0) = y^1 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Suponemos que

$$(96) \quad b > -\beta$$

donde

$$(97) \quad \beta = \beta(x^0) = \inf_{v \in V} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Gamma(x^0)} |v|^2 d\Gamma}$$

Cuando $\text{int}(\Gamma_*(x^0)) \neq \emptyset$ se tiene $\beta > 0$ y por lo tanto el caso $b = 0$ está incluido en (96). Se trataría del

sistema (52) con $g(s) = s$.

Cuando $\text{int}(\Gamma_*(x^0)) = \emptyset$, $\beta = 0$ y por lo tanto (96) equivale a $b > 0$.

La energía asociada a este sistema es

$$(98) \quad E_b(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla y(x,t)|^2 + |y'(x,t)|^2] dx + \frac{b}{2} \int_{\Gamma(x^0)} |y(x,t)|^2 d\Gamma$$

y gracias a (96), podemos asegurar que $[E_b]^{1/2}$ define en $V \times L^2(\Omega)$ una norma equivalente a la inducida por $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Por otra parte,

$$(99) \quad \frac{dE_b(t)}{dt} = E_b'(t) = - \int_{\Gamma(x^0)} [(x - x^0) \cdot \nu(x)] |y'(x,t)|^2 d\Gamma.$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio verifican

$$(100) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + by = y' = 0 & \text{en } \Gamma(x^0) \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \Gamma_*(x^0) \times (0, \infty). \end{cases}$$

Pero aplicando el Teorema de Holmgren se deduce que $y' \equiv 0$, i.e. $y = y(x)$. Pero entonces:

$$(101) \quad \begin{cases} -\Delta y = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + by = 0 & \text{en } \Gamma(x^0); y = 0 & \text{en } \Gamma_*(x^0). \end{cases}$$

Multiplicando en (101) por y e integrando por partes se obtiene

$$\int_{\Omega} |\nabla y(x)|^2 dx + b \int_{\Gamma(x^0)} |y(x)|^2 d\Gamma = 0$$

lo cual, combinado con (96), implica $y \equiv 0$.

Estas observaciones sugieren el decaimiento exponencial de la energía $E_b(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, o lo que es lo mismo, la convergencia exponencial de toda trayectoria $\{y(t), y'(t)\}$ al único punto de equilibrio $\{0, 0\}$ en $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera de clase C^2 y con $n \leq 3$. Sea $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $b > -\beta(x^0)$.

Entonces, existen constantes $C > 1$ y $\gamma > 0$ tales que

$$(102) \quad E_b(t) \leq C E_b(0) e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0$$

para toda solución de (95), siendo $E_b(t)$ la energía definida en (98).

Observación 8. Nuevamente, si $\overline{\Gamma(x^0)} \cap \overline{\Gamma_*(x^0)} = \emptyset$, el teorema será válido sin restricción alguna sobre la dimensión n . \square

Observación 9. Este resultado fue demostrado en E. Zuazua [79]. \square

Observación 10. Los resultados de existencia, unicidad, regularidad y estabilidad de soluciones de los apartados VI.2 y VI.3 se extienden al sistema (95). \square

Demostración del Teorema 4.

Observese que basta demostrar la existencia de un tiempo $T > 0$ y una constante $C_0 > 0$ tales que se tenga

$$(103) \quad E_b(T) \leq C_0 \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot v) |y'|^2 d\Gamma dt$$

para toda solución de (95). (En (103) $m = m(x)$ denota el campo vectorial $x - x^0$).

En efecto, combinando (103) con (99) que implica

$$(104) \quad E_b(T) = E_b(0) - \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot v) |y'|^2 d\Gamma dt$$

se obtiene

$$(105) \quad E_b(T) \leq \left(\frac{C_0}{1 + C_0} \right) E_b(0).$$

Combinando (105) con el carácter decreciente de la energía y la propiedad de semigrupo se deduce

$$(106) \quad E_b(t) \leq \left(\frac{C_0}{1 + C_0} \right)^{\frac{t}{T} - 1} E_b(0)$$

de donde se obtiene (102) con

$$(107) \quad \begin{cases} C = \frac{1 + C_0}{C_0} \\ \gamma = \frac{1}{T} \log \left(\frac{1 + C_0}{C_0} \right). \end{cases}$$

Por densidad, basta considerar soluciones con datos iniciales regulares $\{y^0, y^1\} \in V \times V$ tales que $-\Delta y^0 \in L^2(\Omega)$ y que verifiquen la condición de compatibilidad

$$\frac{\partial y^0}{\partial \nu} + by^0 = -(m \cdot \nu) y^1 \quad \text{en } \Gamma(x^0).$$

En este caso la solución $y = y(x, t)$ de (95) verifica

$$y \in C^1([0, \infty); V), \quad \Delta y \in C([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Multiplicamos la ecuación (95) por $(x - x^0) \cdot \nabla y$ e integramos por partes en $\Omega \times (0, T)$ (donde $T > 0$ será fijado posteriormente). Aplicando las desigualdades de P. Grisvard, lo cual es posible ya que $n \leq 3$, obtenemos (en lo sucesivo, para simplificar la notación, escribiremos $E(t)$ en lugar de $E_b(t)$):

$$\begin{aligned} (108) \quad & \int_{\Omega} y' m \cdot \nabla y dx \Big|_0^T + \int_0^T E(t) dt + \frac{(n-1)}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [|y'|^2 - |\nabla y|^2] dx dt \leq \\ & \leq \frac{b}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y|^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial y}{\partial \nu} m \cdot \nabla y d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt \leq \\ & \leq \frac{b}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y|^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_*(x^0)} (m \cdot \nu) \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt - \\ & - b \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} y m \cdot \nabla_{\sigma} y d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) y' m \cdot \nabla_{\sigma} y d\Gamma dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) \nabla_{\sigma} |y|^2 d\Gamma dt \leq \\ & \leq c \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y|^2 d\Gamma dt + c \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt \end{aligned}$$

para $c > 0$ que depende únicamente de m y de b , ya que $m \cdot \nu \leq 0$ en $\Gamma_*(x^0)$,

$$\int_{\Gamma(x^0)} y m \cdot \nabla_{\sigma} y d\Gamma = \int_{\Gamma(x^0)} \frac{m}{2} \cdot \nabla_{\sigma} (|y|^2) d\Gamma = 0$$

y $\left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|^2 \leq 2b^2 |y|^2 + 2(m \cdot \nu)^2 |y'|^2$ en $\Gamma(x^0)$. También hemos utilizado la desigualdad

$$(m \cdot \nu) |y' m \cdot \nabla_{\sigma} y| \leq \frac{1}{2} (m \cdot \nu) |\nabla_{\sigma} y|^2 + \frac{R^2 (m \cdot \nu)}{2} |y'|^2 \quad \text{en } \Gamma(x^0)$$

con $R = \|m\|_{L^{\infty}(\Omega)}$.

Por otra parte, multiplicando la ecuación (95) por y e integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} (109) \quad & \int_0^T \int_{\Omega} [|y'|^2 - |\nabla y|^2] dx dt = \int_{\Omega} y' y dx \Big|_0^T + b \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y|^2 d\Gamma dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) y y' d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Combinando (108) y (109) deducimos

$$\begin{aligned} (110) \quad & \int_{\Omega} y' \left[m \cdot \nabla y + \frac{(n-1)}{2} \right] dx \Big|_0^T + \int_0^T E(t) dt \leq \\ & \leq c \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y|^2 d\Gamma dt + c \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Ahora bien, existe $C_1 > 0$ (que depende únicamente de Ω) tal que

$$\left| \int_{\Omega} y' \left[m \cdot \nabla y + \frac{(n-1)}{2} y \right] (x, t) dx \right| \leq C_1 E(t)$$

y por lo tanto

$$(111) \quad \left| \int_{\Omega} y' \left[m \cdot \nabla y + \frac{(n-1)}{2} y \right] dx \right|_0^T \leq C_1 (E(0) + E(T)) \\ \leq 2C_1 E(T) + C_1 \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt.$$

De (110), (111) y el hecho de que

$$T E(T) \leq \int_0^T E(t) dt$$

se obtiene

$$(112) \quad (T - 2C_1) E(T) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y|^2 d\Gamma dt + C \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt.$$

Por tanto, basta probar que si $T > 2C_1$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$(113) \quad \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y|^2 d\Gamma dt \leq C \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt.$$

Razonamos por reducción al absurdo. Si (113) no se verifica, existe una sucesión $\{y_n\}$ de soluciones de (95) tal que

$$(114) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y_n|^2 d\Gamma dt = 1 & \forall n \in \mathbb{N} \\ \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} (m \cdot \nu) |y_n'|^2 d\Gamma dt \rightarrow 0. \end{cases}$$

Combinando (114) con (112) y teniendo en cuenta que $T > 2C_1$ obtenemos que

$$\{y_n\} \text{ está acotada en } C([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$$

y por lo tanto

$$\{y_n|_{\Gamma \times (0, T)}\} \text{ es relativamente compacta en } L^2(\Gamma \times (0, T)).$$

Pasando al límite para una subsucesión, obtenemos una solución $y = y(x, t)$ de (95) que gracias a (114) verifica:

$$(115) \quad y' = 0 \text{ en } \Gamma(x^0) \times (0, T)$$

$$(116) \quad \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} |y|^2 d\Gamma dt = 1.$$

Pero, tal y como observamos al inicio de este apartado, por el Teorema de Holmgren, si $T > 0$ es suficientemente grande, la única solución de (95) que verifica (115) es $y \equiv 0$, lo cual contradice (116). Esto concluye la demostración del Teorema 4.



Observación 10. Se tiene el mismo resultado si en (95) reemplazamos la constante b por una función $b = b(x) \in C^1(\Gamma(x^0))$ tal que

$$b \geq b_0 > 0$$

en un subconjunto abierto y no vacío de $\Gamma(x^0)$.

El Teorema 4 se extiende a sistemas del tipo (95) con condiciones de contorno

$$(117) \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} + b(x)y = -[(x - x^0) \cdot \nu(x)]g(y') \quad \text{en } \Gamma(x^0) \times (0, \infty)$$

con $g \in C(\mathbb{R})$ creciente y tal que

$$c|s| \leq |g(s)| \leq C|s| \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

pero en general, no sabemos si existen resultados análogos a los del Teorema 3.

En E. Zuazua [76] el Teorema 3 se extiende a condiciones de contorno del tipo (117), pero con

$$b(x) = k[(x - x^0) \cdot \nu(x)]$$

siendo $k > 0$ una constante suficientemente pequeña.

VI.6 - Comentarios.

1. Los resultados del apartado VI.3 basados en el principio de invarianza de La Salle, se generalizan fácilmente a ecuaciones de ondas con coeficientes variables.

Sin embargo, la adaptación de los resultados de los apartados VI.4 y VI.5 a los coeficientes variables es mucho más delicada ya que en su demostración hemos utilizado téc-

La extensión del Teorema 3 a ecuaciones con coeficientes variables (pero sin imponer las condiciones artificiales mencionadas en los capítulos anteriores que son debidas a la técnica de multiplicadores en sí) es un problema abierto.

El Teorema 4 puede ser fácilmente extendido a la ecuación de ondas con coeficientes variables en una dimensión de espacio ($n=1$).

Por otra parte, las técnicas de Análisis Microlocal de [2] y [3] permiten obtener resultados de estabilización del tipo del Teorema 4 para ecuaciones con coeficientes variables y para particiones de la frontera $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ más generales que $\{\Gamma(x^0), \Gamma_*(x^0)\}$ (que verifican ciertas condiciones de tipo control geométrico), siempre y cuando $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. El caso en que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \emptyset$, i.e. cuando existen puntos en los que la condición de contorno cambia de tipo, queda, por ahora, fuera del alcance de las técnicas de propagación de singularidades. \square

2. En la demostración del Teorema 2, el carácter monótono de la no linealidad g es crucial ya que asegura la precompacidad de las trayectorias regulares. Sería interesante estudiar si el principio de invarianza "relajado" de M. Slemrod [69] puede ser adaptado a sistemas del tipo (4) con g no monótona pero tal que

$$g(s)s > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

para obtener resultados de estabilidad débil, i.e.

$\{y(t), y'(t)\} \rightarrow \{0, 0\}$ en $V \times L^2(\Omega)$ débilmente cuando $t \rightarrow \infty$.

□

3. El Teorema 3 puede ser extendido a ecuaciones de ondas semilineales

$$y'' - \Delta y + f(y) = 0$$

con condiciones de contorno disipativas (cf. [79]).

También puede ser extendido a sistemas de ecuaciones de ondas semilineales acopladas (cf. C.F. Vasconcellos - E. Zuazua [70]).

4. Las técnicas que hemos desarrollado en este capítulo permiten también obtener resultados de estabilización para el sistema de la elasticidad (cf. J. Lagnese [41]) y para la ecuación de Schrödinger (cf. E. Machtyngier [60]).

5. El problema de la estabilización de la ecuación de ondas puede también plantearse en otros marcos funcionales y con otras condiciones de contorno.

Sea $G = (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ y consideremos el sistema

$$(118) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ y = \frac{\partial}{\partial \nu} (Gy') & \text{en } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{en } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 \in L^2(\Omega), y'(0) = y^1 \in H^{-1}(\Omega) \end{cases}$$

siendo $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ una partición de la frontera Γ .

En I. Lasiecka y R. Triggiani [51] se demuestra que (118) admite una única solución en la clase

$$(119) \quad y \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); H^{-1}(\Omega)).$$

La energía asociada al sistema es

$$(120) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \|y'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$$

con $\|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = \langle Gu, u \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad entre $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$.

Se tiene

$$(121) \quad \frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Gamma_0} |y|^2 d\Gamma \quad \forall t \geq 0$$

lo cual permite demostrar, aplicando el principio de invarianza de La Salle, que

$$(122) \quad E(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

para toda solución de (118), siempre y cuando

$$(123) \quad \text{int}(\Gamma_0) \neq \emptyset.$$

En [51], bajo condiciones geométricas sobre el dominio Ω , se prueba que si $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$ y $\Gamma_1 = \Gamma_*(x^0)$, entonces se tiene un decaimiento exponencial uniforme de la energía, i.e.

$$(124) \quad E(t) \leq C E(0) e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0.$$

Los resultados de [51] se aplican esencialmente al caso en que $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega_1}$ con $\Omega_1 \subset \subset \Omega_0$ y tales que $\Gamma(x^0) = \partial\Omega_0$, $\Gamma_*(x^0) = \partial\Omega_1$.

En [1] hemos probado, utilizando técnicas de Análisis microlocal, que si Ω es regular (sin ninguna condición geométrica sobre Ω) y Γ_0 controla geoméricamente el dominio Ω , entonces se tiene (124) siempre y cuando $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. El caso en que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \emptyset$, nuevamente, permanece abierto.

En [1] se demuestran también resultados de estabilización para otros tipos de condiciones de contorno disipativas. Por ejemplo, para las condiciones de contorno absorbentes o transparentes (cf. B.Engquist y L.Halpern [16]).

BIBLIOGRAFIA

- [1] C.BARDOS, L.HALPERN, G.LEBEAU, J.RAUCH y E.ZUAZUA, Stabilization frontiere de l'équation des ondes par un feedback portant sur les conditions aux limites de Dirichlet, Asymp. Anal., en vías de publicación.
- [2] C.BARDOS, G.LEBEAU y J.RAUCH, Contrôle et stabilization dans les problèmes hyperboliques, Apéndice 2 en J.L.Lions [56], 492-537.
- [3] C.BARDOS, G.LEBEAU y J.RAUCH, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, preprint.
- [4] H.BREZIS, Analyse fonctionnelle: théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [5] H.BREZIS, Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [6] F.BROWDER, Problèmes Non-Linéaires, Séminaire de Mathématiques de l'Université de Montreal, 1965.
- [7] G.CHEN, Energy decay estimates and exact boundary controllability for the wave equation in a bounded domain, J.Math. pures et appl., 58(1979), 249-274.
- [8] G.CHEN, Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain I, SIAM J.Control Optim., 17 (1979), 66-81.
- [9] G.CHEN, Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain II, SIAM J.Control Optim., 19 (1981), 114-122.

- [10] G.CHEN, A note on the boundary, stabilization of the wave equation, SIAM J.Control Optim., 19 (1981), 106-113.
- [11] G.CHEN y H.K.WANG, Asymptotic behavior of solutions of the one-dimensional wave equation with a nonlinear elastic dissipative boundary condition, SIAM J. Control. Optim., 27(4) (1989), 758-775.
- [12] W.C.CHEWNING, Controllability of a nonlinear wave equation in several space variables, SIAM J.Control and Optimization, 14, (1) (1976), 19-25.
- [13] D.CIORANESU, P.DONATO y E.ZUAZUA, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation des ondes dans des domaines avec des petits trous, C.R.Acad.Sci.Paris, 309 (1989), 473-478.
- [14] D.CIORANESU, P.DONATO y E.ZUAZUA, Exact boundary controllability of the wave equation in domains with small holes, preprint.
- [15] J.DA SILVA FERREIRA, Exponential decay for a system of semilinear wave equations with locally distributed damping, preprint.
- [16] B.ENGQUIST y L.HALPERN, Far fields boundary conditions for computation over long time, Applied Numerical Analysis, 4 (1988), 21-45.
- [17] C.FABRE y J.P.PUEL, Comportement au voisinage du bord des solutions de l'équation des ondes, C.R.Acad. Sci. Paris, 310 (1990), 621-625.
- [18] H.O.FATTORINI, Local controllability of a nonlinear wave equation, Math. Systems Theory, 9 (1989), 35-40.

- [19] R.GLOWINSKI, C.H.LI y J.L.LIONS, A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I). Dirichlet controls: Description of the numerical methods, Japan J.Appl.Math., 1(1), (1990), 1-76.
- [20] P.GRISVARD, Contrôlabilité exacte dans des polygones et polyèdres, C.R.Acad. Sci. Paris, 304 (1987), 367-370.
- [21] P.GRISVARD, Contrôlabilité exacte avec conditions mêlées, C.R.Acad. Sci. Paris, 305 (1987), 363-366.
- [22] P.GRISVARD, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités, J.Math. Pures et Appl., 68 (1989), 215-259.
- [23] A.HARAUX, Nonlinear Evolution Equation - Global Behavior of Solutions, Lecture Notes in Mathematics 841, Springer-Verlag, 1981.
- [24] A.HARAUX, On a completion problem in the theory of distributed control of wave equations, en "Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications", (Ed. H.Brezis y J.L.Lions), Research Notes in Mathematics, Pitman, en vías de publicación.
- [25] A.HARAUX, Contrôlabilité exacte d'une membrane rectangulaire au moyen d'une fonctionnelle analytique localisée, C.R.Acad. Sci. Paris, 306 (1988), 125-128.
- [26] A.HARAUX, Semilinear Hyperbolic Problems in Bounded Domains, Mathematical reports, vol. 3, Part. 1, (Ed. J.Dieudonné), Harwood Academic Publishers, Gordon & Breach, 1987.

- [27] A.HARAUX, Nonlinear Vibrations and the wave Equation, Textos de Métodos Matemáticos 20, Publicaciones de la Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1986.
- [28] A.HARAUX, Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations, *J.Diff.Eq.* 59,2 (1985), 145-154
- [29] A.HARAUX, Une remarque sur la stabilization de certains systèmes du deuxième ordre en temps, *Portugaliae Mathematica*, 46(3) (1989), 245-258.
- [30] A.HARAUX y E.ZUAZUA, Decay Estimates for some Semi-linear Damped Hyperbolic Problems, *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 100(2), (1988), 191-206.
- [31] L.F.HO, Observabilité frontière de l'équation des ondes, *C.R.Acad. Sci. Paris*, 302 (1986), 443-446.
- [32] L.HÖRMANDER, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 1976.
- [33] L.HÖRMANDER, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Springer-Verlag, 1985.
- [34] S.JAFFARD, Contrôle interne exact des vibrations d'une plaque carrée. *C.R.Acad. Sci. Paris*, 307 (1988), 759-762.
- [35] V.KOMORNIK, Contrôlabilité exacte en un temps minimal, *C.R.Acad. Sci. Paris*, 304 (1987), 223-225.
- [36] V.KOMORNIK, Une méthode générale pour la contrôlabilité exacte en temps minimal, *C.R.Acad. Sci. Paris*, 307 (1988), 397-401.

- [37] V.KOMORNIK, Exact controllability in short time for the wave equation, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 9 (2) (1989), 153-164.
- [38] V.KOMORNIK y E.ZUAZUA, Stabilization frontière de l'équation des ondes: Une méthode directe, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 305 (1987), 605-608.
- [39] V.KOMORNIK y E.ZUAZUA, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *J. Math. Pures at Appl.*, 69 (1) (1990), 33-54.
- [40] J.LAGNESE, Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation, *J.Diff. Equations*, 50 (2), (1983), 163-182.
- [41] J.LAGNESE, Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, *SIAM J.Control Optim.*, 21 (6) (1983), 968-984.
- [42] J.LAGNESE, Control of wave processes with distributed controls supported on a subregion, *SIAM J.Control Optim.*, 21 (1), (1983), 68-85.
- [43] J.LAGNESE, Boundary stabilization of this plates, *SIAM Studies in Appl. Math.* 10, (1989).
- [44] J.LAGNESE, Note on the boundary stabilization of wave equations, *SIAM, J.Control Optim.*, 26 (1988), 1250-1256.
- [45] J.LAGNESE, Exact boundary controllability of Maxwell's equations in a general region, *SIAM J.Control and Optim.*, 27 (2) (1989), 374-388.
- [46] J.LAGNESE y G.LEUGERING, Stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback, preprint.

- [47] J.LAGNESE y J.L.LIONS, Modelling, Analysis and Control of Thin Plates. Masson, RMA 6, Paris, 1988.
- [48] I.LASIECKA, Stabilization of wave equations with nonlinear dissipative damping on the boundary, *J.Diff. Equations*, 79 (2) (1989), 340-381.
- [49] I.LASIECKA, Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary, *Applied Mathematics Reports No. RM-88-05*, Univ. of Virginia, Charlottesville, VA, 1988.
- [50] I.LASIECKA y R.TRIGGIANI, Exact controllability of semilinear abstract systems with application to waves and plates boundary control problems, *Proceedings of the 28th IEEE Conference in Decision and Control*, Tampa, Florida, (1989), 2291-2294.
- [51] I.LASIECKA y R.TRIGGIANI, Uniform exponential decay in a bounded region with $L^2(0,T;L^2(\Sigma))$ -feedback control in the Dirichlet boundary conditions, *J. Diff. Equations* 66 (1987), 340-390.
- [52] G.LEBEAU, Contrôle de l'équation de Schrödinger, preprint.
- [53] J.L.LIONS, Contrôlabilité exacte de systèmes distribués, *C.R.Acad.Sci. Paris*, 302 (1986), 471-475.
- [54] J.L.LIONS, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.*, 30 (1988), 1-68.
- [55] J.L.LIONS, Contrôle des systèmes distribués singuliers, Gauthier-Villars, MMI 13, Paris, 1983.

- [56] J.L.LIONS, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1. Contrôlabilité exacte, Masson, RMA8, Paris, 1988.
- [57] J.L.LIONS, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2. Perturbations, Masson, RMA9, Paris, 1988.
- [58] J.L.LIONS, Hidden regularity in some nonlinear hyperbolic equations, *Matemática Aplicada e Computacional*, 6 (1) (1987), 7-15.
- [59] J.L.LIONS y E.MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1 y 2, Dunod, Paris, 1968.
- [60] E.MACHTYNGIER, Contrôlabilité exacte et stabilisation de l'équation de Schrödinger, *C.R.Acad.Sci. Paris*, 310 (1990), 801-806.
- [61] L.MARKUS, Controllability of nonlinear processes, *SIAM j.Control*, 3 (1965), 78-90.
- [62] L.A.MEDEIROS y M.MILLA MIRANDA, Hidden Regularity for Semilinear Hyperbolic Partial Differential Equations, *Annales Faculté des Sciences de Toulouse*, Vol. IX, (1) (1988), 103-120.
- [63] L.A.MEDEIROS y M.MILLA MIRANDA, Remarks on a nonlinear model for vibrations of string with damping, *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, 3 (1990), 213-231.
- [64] O.NALIN, Contrôlabilité exacte sur une partie du bord des équations de Maxwell, *C.R.Acad. Sci. Paris*, 309 (1989), 811-815.

- [65] A.RUIZ, Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential, preprint.
- [66] A.RUIZ, Unique continuation for weak solutions of the wave equation with variable coefficients, en preparaci3n.
- [67] D.L.RUSSELL, Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Rev., 20 (1978), 639-739.
- [68] J.SIMON, R3gularit3 de la compos3e de deux fonctions et applications, Bolletino U.M.I., 16 (B) (1979), 501-522.
- [69] M.SLEMROD, Weak Asymptotic Decay Via a "Relaxed Invariance Principle" for a wave Equation with Nonlinear, Nonmonotone Damping, Proc. Royal Soc. Edin., 113 (1989), 87-98.
- [70] C.F.VASCONCELLOS y E.ZUAZUA, Boundary stabilization for a system of semilinear wave equations, en preparaci3n.
- [71] E.ZUAZUA, Contr3labilit3 exacte en un temps arbitrairement petit de quelques mod3les de plaques, Ap3ndice 1 en J.L.Lions [55], 465-491.
- [72] E.ZUAZUA, Contr3labilit3 exacte de syst3mes d'3volution non lineaires, C.R.Acad.Sci. Paris, 306 (1988), 129-132.
- [73] E.ZUAZUA, Exact controllability for the semilinear wave equation, J.Math. Pures et Appl., 69 (1990), 1-31.

- [74] E.ZUAZUA, Exact boundary controllability for the semilinear wave equation, en "Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications", Seminario del Coll3ge de France, Ed. H.Br3zis y J.L.Lions, Research Notes in Mathematics, en v3as de publicaci3n.
- [75] E.ZUAZUA, Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems, Asymptotic Analysis, 1 (1988), 161-185.
- [76] E.ZUAZUA, Stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, SIAM J. Control Optim., 28 (2) (1990), 466-477.
- [77] E.ZUAZUA, Exponential Decay for the Semilinear Wave Equation with Locally Distributed Damping, Communications in P.D.E., 15 (2), (1990), 205-235.
- [78] E.ZUAZUA, Exponential Decay for the Semilinear Wave Equation with Locally Distributed Damping in Unbounded Domains, J.Math. Pures et Appl., en v3as de publicaci3n.
- [79] E.ZUAZUA, Some remarks on the boundary stabilizability of the wave equation, en "Control of Boundaries and Stabilization", J.Simon Ed., Lectures Notes in Control an Information Sciences, Springer-Verlag, 125 (1989), 251-266.
- [80] E.ZUAZUA, Contr3labilit3 exacte d'une 3quation des ondes surlin3aire 3 une dimension d'espace, C. R.Acad.Sci. Paris, 311 (1990), 285-290.

| C.FABRE, Equation des ondes avec second membre singulier et application à la contrôlabilité exacte, C.R.Acad.Sci. Paris, 310 (1990), 813-818.

J.KIM, Exact semi-internal control of an Euler-Bernoulli equation with time dependent coefficients, preprint.