HİPERBOLİK BİR PROBLEMDE BAŞLANGIÇ ŞARTININ OPTİMAL KONTROLÜ

Yeşim SARAÇ

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Murat SUBAŞI
2012

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HİPERBOLİK BİR PROBLEMDE BAŞLANGIÇ ŞARTININ OPTİMAL KONTROLÜ

Yeşim SARAÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2012

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

HİPERBOLİK BİR PROBLEMDE BAŞLANGIÇ ŞARTININ OPTİMAL KONTROLÜ

Doç. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında Yeşim SARAÇ tarafından hazırlanan bu çalışma 19/06/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Doğan KAYA	*İmza*	
Üye	: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Murat SUBAŞI	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Şakir AYDOĞAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Ercan ÇELİK	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

HİPERBOLİK BİR PROBLEMDE BAŞLANGIÇ ŞARTININ OPTİMAL KONTROLÜ

Yeşim SARAÇ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat SUBAŞI

Bu tezde hiperbolik bir problem için sistemin başlangıç konumunun kontrol edilebilirliği ele alınmaktadır. Optimal kontrol teorisinin temelleri göz önünde bulundurularak, başlangıç konum fonksiyonun kontrolü için değişik tipteki fonksiyonel seçimlerinin sonuçları incelenmiştir. İlk bölümde, hiperbolik problemler için optimal kontrol problemleri hakkında genel bir giriş yapıldıktan sonra, ikinci bölümde tezde kullanılan bazı matematiksel kavramlara yer verilmektedir. Sonraki bölümde ilk olarak incelenen optimal kontrol problemlerinin ifadeleri verilmekte ve ele alınan hiperbolik problem için genelleştirilmiş çözüm elde edilmektedir. Takip eden bölümlerde optimal çözümün varlığı ve tekliği ispatlandıktan sonra bu çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kurulmakta ve bu dizinin yakınsaklık hızı araştırılmaktadır. Son olarak, bir bilgisayar programı yazılarak, bu program yardımıyla nümerik örneklerde optimal çözüm sembolik olarak elde edilmektedir.

2012, 142 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Optimal kontrol, Hiperbolik problem, Nümerik hesaplama.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

OPTIMAL CONTROL OF THE INITIAL POSITION IN A HYPERBOLIC PROBLEM

Yeşim SARAÇ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this thesis, the controllability of the initial position of the system for a hyperbolic problem has been dealt with. The results of various types of functionals have been investigated to control the initial position function under the hypothesis of optimal control theory. In the first chapter, after giving a general introduction about the optimal control problems for the hyperbolic problems, in the second chapter some basic mathematical concepts used in this thesis are presented. First, in the next chapter, the statements of the optimal control problems considered are presented and the generalized solution for the considered hyperbolic problem is obtained. In the following, after proving the existence and uniqueness of the optimal solution, a minimizing sequence convergence to this solution is constructed and the convergence rate of this sequence is investigated. Finally, a computer program is developed and optimal solution is getted symbolically in the some numerical examples by using this program.

2012, 142 Pages

Keywords: Optimal control, Hyperbolic problem, Numerical computation.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada, değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen, fikirleri ile bana yol gösteren Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden danışman hocam Sayın Doç. Dr. Murat SUBAŞI'na yakın ilgi, teşvik ve yardımlarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Matematik bölümünde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN olmak üzere matematik bölümünün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Teze yapmış olduğu katkılardan dolayı İstanbul Ticaret Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Doğan Kaya hocama teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında büyük ilgi ve destekleri ile her zaman yanımda olan canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, doktora öğrenimim süresince gerçekleştirdiğim çalışmaları burs vererek maddi açıdan destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na da teşekkürlerimi sunarım.

Yeşim SARAÇ
Mayıs 2012

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	Her yerde
$\Omega=(0,l)\times(0,T]$	$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$	$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$L_2(0,l)$	$(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	Ω bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^1(0,l)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$H^1(\Omega)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$H_0^1(0,l)$	$H^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup $(0,l)$ aralığının sınırlarında sıfır olan fonksiyonların uzayı
$\widehat{H}_0^1(\Omega)$	$H_0^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup $t=T$ için $(x,T)=0$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayı
$o\left(\\|\Delta\varphi\\|^2\right)$	$\\|\Delta\varphi\\|$ ifadesinden daha hızlı sıfıra giden terim

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Dalga denklemleri fen ve mühendislikte oldukça ilgi çekici bir konu olup birçok uygulama sahasına sahiptir. Optik, ses dalgaları ve değişik türdeki cisimlerin titreşimi bu uygulama sahalarına örnek olarak verilebilir.

Dalga denklemi ile ilgili optimal kontrol problemleri 1970'li yıllarda araştırılmaya başlanmıştır. Son zamanlarda, kontrol fonksiyonları dalga denkleminin değişik yerlerindeyken bu tür çalışmalara literatürde oldukça sık rastlanmaktadır.

Literatürde, hiperbolik denklemler için optimal kontrol problemleri farklı yönleriyle ele alınmıştır. Kontrolün sınırlarda, katsayıda ve denklemin sağ tarafında olması durumları farklı yazarlar tarafından çalışılmıştır.

Yamamoto (1995) ters kaynak problemini göz önünde bulundurarak bir kontrol metodu ile yeniden oluşum formülü ve regülerleştirme metodu elde etmiştir.

Benamou (1999) kontrol fonksiyonunun denklemin sağ tarafında yer aldığı bir optimal kontrol problemi için genel bir metot sunmuştur.

Feng *et al.* (2003) düzenleme parametresi içeren bir amaç fonksiyoneli kullanarak, dalga denkleminde bilinmeyen fonksiyonun katsayı fonksiyonunu kontrol etmiştir.

Negreanu and Zuazua (2003) Dirichlet sınır şartları ile verilmiş dalga denkleminde sağ sınır şartını kontrol etmiştir.

Mordukhovich and Raymond (2004) hiperbolik bir problemde bir integral fonksiyonelini minimalleştirerek, Dirichlet sınır şartlarının kontrolünü araştırmıştır.

Münch *et al.* (2006) Dirchlet sınır şartları ile verilmiş dalga denkleminde bilinmeyen fonksiyonun zamana göre türevinin katsayı fonksiyonunu kontrol etmiştir.

Gugat (2008) hiperbolik bir problemde yine Dirichlet sınır şartlarını onların L_2 normlarını minimalleştirerek kontrol etmeye çalışmıştır.

Hasanov (2009) hiperbolik bir problemde kaynak terimlerinin eş zamanlı belirlenmesini çözümün bir final anındaki durumunu ve onun zamana göre birinci türevini içeren bir fonksiyoneli minimalleştirerek ele almıştır.

Zhang *et al*. (2009) sınırlı bir bölgede ayrık bir dalga denkleminin tam sınır kontrollenebilirliğini araştırmıştır.

Periago (2009) kontrolün denklemin sağ tarafında yer aldığı bir boyutlu dalga denkleminde optimizasyon problemini çalışmıştır.

Smyshlyaev and Krstic (2009) Neumann sınır değer probleminde sağ sınır şartının kontrolünü çalışmıştır.

Bloshanskaya and Smirnov (2009) telin titreşim probleminde karışık tipte verilmiş sınır şartlarının kontrolünü araştırmıştır.

Dalga denklemi için optimal kontrol problemlerini ele alan önemli bilim adamlarından biriside Lions'dur. Lions (1971) kontrol fonksiyonu sınırlarda ve denklemin sağ tarafında bulunduğunda ortaya çıkacak sonuçları ayrıntılı olarak vermiştir. Ayrıca sistemin başlangıç şartlarının kontrolü de Lions (1971) tarafından konu alınmıştır. Lions sistemin başlangıç hızının kontrolünden detaylı olarak bahsetmiştir. Fakat başlangıç konumunun kontrolünde ise $\varphi \in L_2(0,l)$ kontrolü için kullanılması gereken amaç fonksiyonelini sadece ifade etmiştir.

Dirichlet sınır şartlı sonsuz basamaktan lineer bir hiperbolik sistem için başlangıç şartının, L_2 uzayında optimal kontrolü Kowalewski (2011) tarafından çalışılmıştır.

Kontrol fonksiyonu sistemin başlangıç hızı olduğunda optimal kontrole yakınsayacak minimalleştirici dizinin elde edilmesi ve yakınsaklığının ispatı ise Subaşı and Saraç (2012) çalışmasında ele alınmıştır.

Bu çalışmada, verilen iki final değerinden bir tanesi veya ikisi birlikte kullanılarak, sistemin başlangıç konumunun $H_0^1(0,l)$ uzayından belirlenmesi problemleri ele alınmıştır. Başlangıç konumunun kontrolü açısından bakıldığında en yakın çalışma Lions (1971) tarafından yapılmıştır. Fakat bu çalışma kontrol fonksiyonunun arandığı uzay ve amaç fonksiyonellerinin seçimi bakımından farklıdır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, Hunter and Nachtergaele (2001) ve Zeidler (1995) çalışmalarından bildiğimiz ileriki bölümler için temel teşkil eden bazı tanımlara ve teorem ile lemmalara yer verilmiştir.

Tanım 2.1 (Fonksiyonel): $F \subset \mathbb{R}$ veya $F \subset \mathbb{C}$ olmak üzere X , F üzerinde bir vektör uzayı olsun. $J : X \to F$ operatörüne fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.2 (Kapalı Küme): X kümesinde her yakınsak dizinin yakınsadığı nokta bu kümeye ait ise X kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.3 (Yoğun Küme): A , X metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\overline{A} = X$ oluyorsa A kümesine X metrik uzayında yoğun küme denir.

Tanım 2.4 (Konveks Küme): $X \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X$$

şartı sağlanıyorsa X kümesine konveks küme adı verilir.

Tanım 2.5 (Konveks Fonksiyon): X **,** $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \le \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona X kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Ayrıca $\lambda \in (0,1)$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) < \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda)\, f\left(x_2\right)$$

eşitsizliği geçerli ise kesin konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.6 (Güçlü Konveks Fonksiyon): X , $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_{1,} x_2 \in X$ olmak üzere

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda)\, f\left(x_2\right) - \chi\lambda(1-\lambda)\left\|x_1 - x_2\right\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\chi > 0$ sabiti varsa bu fonksiyona χ sabiti ile güçlü konveks fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.7 (Aşağıdan Yarı Süreklilik): $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ ve her $x_n \to x_0$ dizisi için

$$\liminf_{n\to\infty} f\left(x_n\right) \geq f\left(x_0\right)$$

ise f fonksiyonuna x_0 noktasında aşağıdan yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.8 (Lineer Operatör): X ve Y , F cismi üzerinde birer lineer uzay olsun. $T : X \to Y$ operatörü, her $\lambda, \mu \in F$ ve $x, y \in X$ için

$$T\left(\lambda x + \mu y\right) = \lambda T\left(x\right) + \mu T\left(y\right)$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüme lineer operatör denir.

Tanım 2.9 (Bilineer Form): V, F cismi üzerinde lineer uzay ve $a: V \times V \to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\lambda, \mu \in F$ ve her $u, v, w \in V$ için

B1. $a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w)$

B2. $a(w, \lambda u + \mu v) = \lambda a(w, u) + \mu a(w, v)$

şartları sağlanıyorsa bu dönüşüme bilineer form denir.

Ayrıca her $u, v \in V$ için $a(u,v) = a(v,u)$ şartı sağlanıyorsa $a(u,v)$ dönüşümüne simetrik bilineer form denir.

V Hilbert uzayı olmak üzere her $u, v \in V$ için

$$|a(u,v)| \le C\|u\|\|v\|$$

olacak şekilde bir C sabiti varsa $a(u,v)$ dönüşümüne sürekli bilineer form denir.

Tanım 2.10 (Koersiv Fonksiyon): $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$$

şartını sağlıyorsa koersiv olarak adlandırılır.

H Hilbert uzayı ve $a: H \times H \to \mathbb{R}$ bilineer form olsun. Her $x \in H$ için

$$a(x,x) \geq c\|x\|^2$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti varsa a dönüşümüne koersiv bilineer form denir. Burada $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$ şeklindedir.

Tanım 2.11 (Lipschitz Süreklilik): $X = (X, d)$, bir metrik uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ sabiti varsa f fonksiyonu X kümesinde Lipschitz süreklidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük L sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Tanım 2.12 (Gradyen – Frechet Türevi): W kümesinde tanımlanan $J(w)$ fonksiyoneli için,

$$\Delta J(w) = J(w + \Delta w) - J(w) = \langle J'(w), \Delta w \rangle_W + o\left(\|\Delta w\|_W^2\right)$$

şartı sağlanırsa bu fonksiyonele $w \in W$ elemanında Frechet anlamında diferensiyellenen fonksiyonel, $J'(w)$ elemanına ise $J(w)$ fonksiyonelinin gradyeni veya Frechet türevi denir.

Tanım 2.13 (Banach Uzay): $X = (X, \|.\|)$**,** normlu lineer uzay olsun. X uzayı $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğine göre tam uzay ise bu uzaya Banach uzayı denir.

Teorem 2.1 U, $B-$Banach uzayının konveks alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve

$U_* = \left\{ u \in U : J(u) = J_* = \operatorname*{Inf}_{U} J(u) \right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde her $u_* \in U_*$ ve her $u \in U$ için $\left\langle J'(u_*), u - u_* \right\rangle_B \geq 0$ şartı sağlanır (Vasilyev 1981).

Tanım 2.14 (Hilbert Uzayı): $(X, \langle\ \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. Bu uzay $d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$ metriğine göre tam ise Hilbert uzayı olarak adlandırılır.

Lemma 2.1 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $(X, \langle\ \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada norm, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanmaktadır.

Lemma 2.2 (ε-Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a, b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzhenskaya 1985).

Tanım 2.15 (Zayıf Yakınsaklık): (x_n), H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in H$ için

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

ise $\left(x_n\right)$ dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.16 (Zayıf Süreklilik): X , Y Banach uzayı ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0 \in X$ noktasına zayıf yakınsayan $\left(x_n\right) \in X$ dizisi için $f\left(x_n\right)$ dizisi $f\left(x_0\right)$ elemanına zayıf yakınsıyorsa f dönüşümü x_0 noktasında zayıf süreklidir denir.

Tanım 2.17 (Aşağıdan Zayıf Yarı Süreklilik): A, X Banach uzayının bir alt kümesi ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in A$ elemanına zayıf yakınsayan her $\left(x_n\right) \in A$ dizisi için

$$\liminf_{n \to \infty} f\left(x_n\right) \geq f\left(x_0\right)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında aşağıdan zayıf yarı süreklidir denir.

Tanım 2.18 (Zayıf Kapalı Küme): X kümesinde her zayıf yakınsak dizinin zayıf limiti bu kümeye ait ise X kümesine zayıf kapalı küme denir.

Tanım 2.19: $L_2\left(0,l\right)$,

$$\int_0^l |f|^2 \, dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm $f : \left(0,l\right) \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların kümesidir. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)v(x)\,dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

$L_2(0,l)$ uzayı yukarıda tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır

Tanım 2.20: $L_2(\Omega)$,

$$\iint_\Omega |u|^2\,d\Omega < \infty$$

şartını sağlayan tüm $u:\Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u,v\rangle_{L_2(\Omega)} = \iint_\Omega u(x,t)v(x,t)\,dxdt,$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

ile tanımlanır.

$L_2(\Omega)$ uzayı yukarıda tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.21: $W_2^1(0,l)=H^1(0,l)$, Hilbert uzayı olup kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır.

$H_0^1(0,l)$ uzayı $H^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0,l)$ aralığının sınırlarında sıfır olan fonksiyonları içermektedir. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u,v\rangle_{H_0^1(0,l)}=\int_0^l\left(u(x)v(x)+\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}\right)dx,$$

$$\|u\|_{H_0^1(0,l)}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{H_0^1(0,l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca bu uzayda Poincare iç çarpım ve normu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{H_0^1(0,l)}=\int_0^l\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}dx,$$

$$\|u\|_{H_0^1(0,l)}=\left(\int_0^l\frac{du(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx}dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$H_0^1(0,l)$ uzayında yukarıda verilen iki norm denk normlardır.

Tanım 2.22: $W_2^1(\Omega)=H^1(\Omega)$ Hilbert uzayı olup, kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)}=\iint_\Omega\left(u(x,t)v(x,t)+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)dxdt\ ,$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{H_0^1(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayı $H^1(\Omega)$ uzayında her mertebeden sürekli türevlere ve kompakt dayanağa sahip fonksiyonların kümesinin kapanışıdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayında Poincare iç çarpım ve normu sırasıyla

$$\langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L_2(\Omega)},$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

şeklinde tanımlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Hiperbolik Denklem İçin Genelleştirilmiş Çözüm

Bu tezde,

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (0,l) \times (0,T] \tag{3.1.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in (0,l) \tag{3.1.2}$$

$$u(0,t) = 0, \; u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T] \tag{3.1.3}$$

hiperbolik probleminde sırasıyla

$$J_\alpha^1(\varphi) = \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - y_1(x)\right]^2 dx + \alpha \|\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)}, \tag{3.1.4}$$

$$J_\alpha^2(\varphi) = \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - y_2(x)\right]^2 dx + \alpha \|\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)} \tag{3.1.5}$$

ve

$$J_\alpha^3(\varphi) = \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - y_1(x)\right]^2 dx + \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - y_2(x)\right]^2 dx + \alpha \|\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)} \tag{3.1.6}$$

fonksiyonellerini minimum yapacak olan φ fonksiyonlarını kontrol etmek istiyoruz.

(3.1.1) denklemi, l uzunluğundaki homojen bir telin titreşim sürecini tanımlar. $F(x,t)$ birim kütleye uygulanan kuvvetin yoğunluğu olmak üzere denklemin $u(x,t)$ çözümü, t zamanda x noktasındaki telin konumunu verir. Ayrıca φ fonksiyonu sistemin başlangıç konumunu ve ψ fonksiyonu sistemin başlangıç hızını tanımlar (Tikhonov and Samarskii 1963).

Bu tür kontrol problemleri Lions (1971) çalışmasında incelenmiştir. Kontrol fonksiyonları φ fonksiyonunun dışında diğer fonksiyonlar olduğunda ortaya çıkacak sonuçları bu kaynakta ayrıntılı olarak bulabilmekteyiz. Lions kontrolün φ fonksiyonu olması halinde ise $\varphi \in L_2(0,l)$ için

$$
\begin{aligned}
J(\varphi) = & \int_0^l \left[u(x,T;\varphi) - y_1(x)\right]^2 dx + \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - y_2(x)\right]^2 dx \\
& + \int_0^l \frac{d}{dx}\left[u_t(x,T;\varphi) - y_2(x)\right]^2 dx
\end{aligned}
$$

fonksiyonelinin kullanılabileceğini kısaca ifade etmiştir. Yani $\varphi \in L_2(0,l)$ kontrolü için $u(x,T;\varphi)$ fonksiyonunu $L_2(0,l)$ uzayında ve $u_t(x,T;\varphi)$ fonksiyonunu $H^{-1}(0,l)$ uzayında gözlemlemenin yeterli olacağını belirtmiştir. Biz bu çalışmada $\varphi \in H_0^1(0,l)$ kontrolü için $u_t(x,T;\varphi)$ ve $u_x(x,T;\varphi)$ fonksiyonlarından bir tanesini ya da ikisini birlikte $L_2(0,l)$ uzayında gözlemlemenin yeterli olacağını ileri sürmekteyiz.

Kontrol fonksiyonumuzun uzayı $H_0^1(0,l)$ olup, bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$
\langle u,v\rangle_{H_0^1} = \int_0^l u_x v_x dx \tag{3.1.7}
$$

ve

$$\|u\|_{H_0^1} = \left\{ \int_0^l u_x^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.8}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iç çarpım ve norma $H_0^1(0,l)$-Poincare iç çarpım ve normu da denir. Aday kontrol fonksiyonlarımızın kümesi ise $H_0^1(0,l)$ uzayının kapalı ve konveks bir Φ_{ad} alt kümesi olarak seçilmiştir. O halde amacımız

$$\inf_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^i(\varphi),\ i=1,2,3. \tag{3.1.9}$$

problemlerini çözmektir.

Öncelikle (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyelim. (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümü deyince $v(x,T)=0$ özelliğindeki her $v\in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_0^T\int_0^l \left(-u_t v_t + a^2 u_x v_x\right) dxdt = \int_0^T\int_0^l F v dxdt + \int_0^l \psi(x) v(x,0) dx \tag{3.1.10}$$

eşitliğini sağlayan $u\in H_0^1(\Omega)$, $u(x,0)=\varphi(x)$ fonksiyonu anlaşılacaktır. Bu çözüme zayıf veya genelleştirilmiş çözüm de denmektedir. Bu çözümün var olabilmesi için

$$F\in L_2(\Omega),\ \varphi\in H_0^1(0,l),\ \psi\in L_2(0,l) \tag{3.1.11}$$

olarak seçilmesi gerekir.

Teorem 3.1.1: (3.1.11) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her bir $\varphi \in \Phi_{ad}$ fonksiyonu için (3.1.1)-(3.1.3) başlangıç sınır değer probleminin bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \le c_0 T \left(\|\varphi\|_{H_0^1(0,l)}^2 + \|\psi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|F\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \tag{3.1.12}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat: Teoremin ispatını Ladyzhenskaya (1985) çalışmasında olduğu gibi Galerkin metodu ile yapalım. Galerkin metoduna göre yaklaşık çözüm

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \varphi_k(x) \tag{3.1.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\varphi_k(x)$ fonksiyonları $H_0^1(0,l)$ uzayının temel sistemidir. (3.1.1) denklemi $u^N(x,t)$ için

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{d^2 c_k^N(t)}{dt^2} \varphi_k(x) - a^2 \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \varphi_k''(x) = F(x,t) \tag{3.1.14}$$

biçiminde yazılır.

(3.1.14) denkleminin her iki tarafı φ_l ile çarpıldıktan sonra $[0,l]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^l \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{d^2 c_k^N(t)}{dt^2} \varphi_k(x)\varphi_l(x) - a^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^N(t)\varphi_k''(x)\varphi_l(x) \right] dx$$
$$= \int_0^l F(x,t)\varphi_l(x)\,dx, \quad l = 1,2,...,N \tag{3.1.15}$$

elde edilir.

Şimdi (3.1.15) ifadesinde sol taraftaki ikinci integrale kısmi integrasyon uygulanıp, $\varphi_k \in H_0^1(0,l)$ olduğu yani $\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_0^l \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{d^2 c_k^N(t)}{dt^2} \varphi_k(x)\varphi_l(x) + a^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^N(t)\varphi_k'(x)\varphi_l'(x) \right] dx$$
$$= \int_0^l F(x,t)\varphi_l(x)\,dx, \quad l = 1,2,...,N$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede temel sistemimizin φ_k elemanlarının $\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle_{L_2(0,l)} = \delta_k^l = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left[c_1^N(t)\right]'' + a^2 c_1^N(t)\int_0^l \varphi_1'\varphi_1' dx + ... + a^2 c_N^N(t)\int_0^l \varphi_N'\varphi_1' dx &= \int_0^l F(x,t)\varphi_1(x)\,dx \\
\left[c_2^N(t)\right]'' + a^2 c_1^N(t)\int_0^l \varphi_1'\varphi_2' dx + ... + a^2 c_N^N(t)\int_0^l \varphi_N'\varphi_2' dx &= \int_0^l F(x,t)\varphi_2(x)\,dx \\
&\vdots \\
\left[c_N^N(t)\right]'' + a^2 c_1^N(t)\int_0^l \varphi_1'\varphi_N' dx + ... + a^2 c_N^N(t)\int_0^l \varphi_N'\varphi_N' dx &= \int_0^l F(x,t)\varphi_N(x)\,dx
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi için

$$c_k^N(0)=\langle\varphi,\varphi_k\rangle_{L_2(0,l)} \text{ ve } \frac{dc_k^N(0)}{dt}=\langle\psi,\varphi_k\rangle_{L_2(0,l)} \tag{3.1.17}$$

başlangıç şartları geçerlidir. (3.1.16) denklemleri $c_k^N(t)$ bilinmeyen fonksiyonlu t 'ye göre ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem sistemi oluşturur. Katsayı fonksiyonları sabittir ve sağ taraflar $L_1(0,T]$ uzayındandır. Bu sistemin (3.1.17) başlangıç şartları altında bir tek çözümü vardır. Buradan elde edilecek $u^N(x,t)$ çözümü için

$$\|u_x^N\|_{L_2(0,l)}^2+\|u_t^N\|_{L_2(0,l)}^2\le c_0\left(\|\varphi\|_{H_0^1(0,l)}^2+\|\psi\|_{L_2(0,l)}^2+\|F\|_{L_2(\Omega)}^2\right) \tag{3.1.18}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösterelim.

Bunun için (3.1.14) denklemi u_t^N ile çarpılarak, $[0,l]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^l\left[u_{tt}^N-a^2u_{xx}^N\right]u_t^N dx=\int_0^l F(x,t)u_t^N dx$$

yazılır. Burada $u_{xx}^N u_t^N=\left(u_x^N u_t^N\right)_x-u_x^N u_{tx}^N$ özdeşliğinden faydalanılırsa

$$\int_0^l\left[u_{tt}^N u_t^N+a^2u_x^N u_{tx}^N\right]dx=\int_0^l F(x,t)u_t^N dx+a^2\int_0^l\left(u_x^N u_t^N\right)_x dx$$

olur. Ayrıca $u^N(0,t)=0$, $u^N(l,t)=0$ olduğundan $u_t^N(0,t)=u_t^N(l,t)=0$ şartlarından ve $u_{tt}^N u_t^N+a^2u_x^N u_{tx}^N=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(u_t^N\right)^2+a^2\left(u_x^N\right)^2\right]$ özdeşliğinden

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l\left[\left(u_t^N\right)^2+a^2\left(u_x^N\right)^2\right]dx=\int_0^l F\left(x,t\right)u_t^N dx$$

yazılır. Ayrıca $[0,t]$ de integral alınırsa

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[u_t^N\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[u_x^N\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx-\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[u_t^N\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[u_x^N\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx$$
$$=\int_0^t\int_0^l F\left(x,\tau\right)u_\tau^N dxd\tau,\ \ \forall t\in\left[0,T\right]$$

elde edilir. Şimdi $E\left(t\right)=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[u_t^N\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[u_x^N\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx$ ve $P\left(t\right)=\left[E\left(t\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda yukarıdaki eşitlik

$$P^2\left(t\right)-P^2\left(0\right)=\int_0^t\int_0^l F\left(x,\tau\right)u_\tau^N dxd\tau,\ \ \forall t\in\left[0,T\right] \tag{3.1.19}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi $\left\|u_x^N\left(.,t\right)\right\|_{L_2(0,l)}$ ve $\left\|u_t^N\left(.,t\right)\right\|_{L_2(0,l)}$ normlarını değerlendirelim.

$$\begin{aligned}\int_0^l\left[u_x^N\left(x,t\right)\right]^2 dx&=\frac{1}{a^2}\int_0^l a^2\left[u_x^N\left(x,t\right)\right]^2 dx\\&\le\frac{1}{a^2}\int_0^l\left\{\left[u_t^N\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[u_x^N\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx\\&\le\frac{2}{a^2}E\left(t\right)\end{aligned}$$

olup,

$$\left\|u_x^N\right\|_{L_2(0,l)} \le \frac{\sqrt{2}}{|a|} P(t) \tag{3.1.20}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\int_0^l \left[u_t^N(x,t)\right]^2 dx &\le \int_0^l \left\{\left[u_t^N(x,t)\right]^2 + a^2\left[u_x^N(x,t)\right]^2\right\} dx \\ &\le 2E(t)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\|u_t^N\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{2} P(t) \tag{3.1.21}$$

bulunur. (3.1.19) ifadesinin t değişkenine göre türevi alınır ve sağ taraftaki integrale Cauchy-Schawarz eşitsizliği uygulanırsa

$$2P(t)P'(t) \le \|F\|_{L_2(0,l)} \left\|u_t^N\right\|_{L_2(0,l)}$$

bulunur. Burada (3.1.21) değerlendirmesi kullanılırsa

$$2P(t)P'(t) \le \|F\|_{L_2(0,l)} \sqrt{2} P(t)$$

$$P'(t) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|F\|_{L_2(0,l)}$$

olur. $[0,t]$ aralığında integral alınırsa

$$P(t) \le P(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|F\|_{L_2(0,l)} d\tau, \quad \forall t \in [0,T]$$

yazılır.

Bu eşitsizlik (3.1.20) ve (3.1.21) ifadelerinde değerlendirilirse

$$\begin{aligned}
\left\|u_x^N\right\|_{L_2(0,l)} &\leq \frac{\sqrt{2}}{|a|}\left\{P(0)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \|F\|_{L_2(0,l)}\,d\tau\right\}, \quad \forall t\in[0,T] \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{|a|}P(0)+\frac{1}{|a|}\int_0^t \|F\|_{L_2(0,l)}\,d\tau, \quad \forall t\in[0,T] \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{|a|}P(0)+\frac{\sqrt{t}}{|a|}\|F\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad \forall t\in[0,T]
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\|u_t^N\right\|_{L_2(0,l)} &\leq \sqrt{2}\left\{P(0)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \|F\|_{L_2(0,l)}\,d\tau\right\}, \quad \forall t\in[0,T] \\
&\leq \sqrt{2}P(0)+\int_0^t \|F\|_{L_2(0,l)}\,d\tau, \quad \forall t\in[0,T] \\
&\leq \sqrt{2}P(0)+\sqrt{t}\|F\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad \forall t\in[0,T]
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

bulunur. Ayrıca $r_0=\max\{1,a^2\}$ alınırsa $P(0)$ için

$$\begin{aligned}
P(0) &= \left\{\frac{1}{2}\int_0^l \left\{\left[u_t^N(x,0)\right]^2+a^2\left[u_x^N(x,0)\right]^2\right\}dx\right\}^{1/2} \\
&\leq \sqrt{\frac{r_0}{2}}\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|u_x^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}^2\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{\frac{r_0}{2}}\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|u_x^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (3.1.22) ve (3.1.23) ifadelerinde kullanılırsa

$$\left\|u_x^N\right\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{\sqrt{r_0}}{|a|}\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|u_x^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\right)+\frac{\sqrt{t}}{|a|}\|F\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad \forall t\in[0,T],$$

$$\left\|u_t^N\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{r_0}\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|u_x^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\right) + \sqrt{t}\left\|F\right\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad \forall t \in [0,T]$$

bulunur. Bu iki eşitsizlik $t = T$ için

$$\left\|u_x^N\right\|_{L_2(0,l)} \le \frac{\sqrt{r_0}}{a}\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|u_x^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\right) + \frac{\sqrt{T}}{a}\left\|F\right\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\left\|u_t^N\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{r_0}\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|u_x^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\right) + \sqrt{T}\left\|F\right\|_{L_2(\Omega)}$$

şeklinde yazılır. Burada $c_1 = \max\left\{\dfrac{\sqrt{r_0}}{|a|}, \dfrac{\sqrt{T}}{|a|}\right\}$ ve $c_2 = \max\left\{\sqrt{r_0}, \sqrt{T}\right\}$ alınırsa

$$\left\|u_x^N\right\|_{L_2(0,l)} \le c_1\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|u_x^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|F\right\|_{L_2(\Omega)}\right),$$

$$\left\|u_t^N\right\|_{L_2(0,l)} \le c_2\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|u_x^N(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|F\right\|_{L_2(\Omega)}\right)$$

olur. Bu eşitsizliklerden

$$\left\|u_x^N\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 3c_1^2\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|u_x^N(x,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right),$$

$$\left\|u_t^N\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 3c_2^2\left(\left\|u_t^N(x,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|u_x^N(x,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

elde edilir. $c_0 = 3c_1^2 + 3c_2^2$ olmak üzere bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanarak, $u_x^N(x,0) = \varphi_x(x)$ ve $u_t^N(x,0) = \psi(x)$ olduğu kullanılarak

$$\left\|u_x^N\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|u_t^N\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_0\left(\left\|\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)} + \left\|\psi\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

yazılır. O halde (3.2.18) ispatlanmış olur.

Şimdi $[0,T]$ aralığında integral alınırsa

$$\left\|u^N\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le c_0 T\left(\left\|\varphi\right\|^2_{H^1_0(0,l)} + \left\|\psi\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.1.24}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|u^N\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le c_3 \tag{3.1.25}$$

eşitsizliği yazılır. (3.1.25) değerlendirmesi kullanılarak, $\{u^N\}$ dizisinden bir $u(x,t) \in H^1_0(\Omega)$ elemanına zayıf yakınsayan bir alt dizinin elde edilebileceği söylenebilir. Bu zayıf limitin (3.1.1) denkleminin genelleştirilmiş çözümü olduğunu gösterelim. $u(x,0) = \varphi(x)$ şartı $L_2(0,l)$ uzayında $u^N(x,t)$'nin $u(x,t)$'ye yakınsamasının, bir sonucu olarak sağlanır. (3.1.10) ifadesinin ispatı için, (3.1.15) ifadesindeki eşitlikleri $d_l(T) = 0$ şeklindeki $d_l(t) \in H^1(0,T)$ fonksiyonlarıyla çarpıp, $l = 1$ den $l = N$'ye kadar toplayarak ifadenin içerisinde

$$v(x,t) = \sum_{l=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x)$$

fonksiyonunu oluşturalım. $[0,T]$ aralığında integral alınarak, kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^T\int_0^l \left(-u_t^N v_t + a^2 u_x^N v_x\right) dxdt = \int_0^T\int_0^l Fvdxdt + \int_0^l u_t^N(x,0)v(x,0)dx \tag{3.1.26}$$

eşitliği elde edilir. Bu şekildeki v fonksiyonlarının hepsini $\Re_N$ ile gösterelim. Sabit bir $v(x,t)$ fonksiyonu için (3.1.26) ifadesinin limitini alalım. Böylece (3.1.10) ifadesinin $u(x,t)$ limit fonksiyonu için yazılmış hali elde edilir. $\bigcup_{N=1}^{\infty}\Re_N$ kümesi $\widehat{H}_0^1(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan (3.1.10) ifadesi her $v(x,t)\in \widehat{H}_0^1(\Omega)$ için sağlanır. Ayrıca bu $u(x,t)$ limit fonksiyonu için

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le c_0 T\left(\|\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)} + \|\psi\|^2_{L_2(0,l)} + \|F\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Çözümün tekliği için önce u_1 ve u_2 gibi iki genelleştirilmiş çözümün olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\begin{gathered}
(u_1)_{tt} - a^2 (u_1)_{xx} = F(x,t), \quad (x,t)\in\Omega \\
u_1(x,0) = \varphi(x), \quad (u_1)_t(x,0) = \psi(x), \quad x\in(0,l) \\
u_1(0,t) = 0, \quad u_1(l,t) = 0, \quad t\in(0,T]
\end{gathered}$$

ve

$$\begin{gathered}
(u_2)_{tt} - a^2 (u_2)_{xx} = F(x,t), \quad (x,t)\in\Omega \\
u_2(x,0) = \varphi(x), \quad (u_2)_t(x,0) = \psi(x), \quad x\in(0,l) \\
u_2(0,t) = 0, \quad u_2(l,t) = 0, \quad t\in(0,T]
\end{gathered}$$

problemleri elde edilir. Buradan $r = u_1 - u_2$ farkı için

$$r_{tt} - a^2 r_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \Omega$$
$$r(x,0) = 0, \quad r_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,l)$$
$$r(0,t) = 0, \quad r(l,t) = 0, \quad t \in (0,T]$$

problemi yazılır. (3.1.12) eşitsizliğinin ispatında yapılan işlemler kullanılarak benzer şekilde bu problemin (3.1.10) anlamındaki çözümü için

$$\|r\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le 0$$

eşitsizliği bulunur. Buradan $H_0^1(\Omega)$ uzayında $r = 0$ olduğu görülür. Yani zayıf çözüm tektir. Böylece Teorem 3.1.1 ispatlanmış olur (Ladyzhenskaya 1985).

3.2. Optimal Çözümün Elde Edilmesi

Optimal kontrol problemlerimizin her birindeki amacımız; final zamanda, sistemin çözümünü istenilen değere veya değerlere uygun bir normda en yakın yapacak olan sistemin başlangıç konumunu belirlemektir.

$i = 1,2,3$ için $J_\alpha^i(\varphi)$ fonksiyonelleri amaç fonksiyoneli olarak adlandırılır. Amaç fonksiyonellerimizdeki $\alpha \int_0^l \varphi_x^2 dx$ terimi minimalleştirme sürecinde çok büyük kontrollerden kaçınmak ve fonksiyonellerin güçlü konveksliği için kullanılır. Benzer düzenleme terimini içeren fonksiyonellerin minimalleştirilmesi daha önce incelenmiştir (Subaşı 2002, 2004).

Optimal kontrol problemlerini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{cases} J_\alpha^i\left(u_i^*,\varphi_i^*\right)=\min\limits_{(u,\varphi)\in H_0^1(\Omega)\times\Phi_{ad}} J_\alpha^i\left(u,\varphi\right),\ i=1,2,3 \\ u_{tt}-a^2u_{xx}=F\left(x,t\right) \\ u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ \ u_t\left(x,0\right)=\psi\left(x\right) \\ u\left(0,t\right)=0,\ \ u\left(l,t\right)=0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

problemi için $\left(u_i^*,\varphi_i^*\right)\in H_0^1\left(\Omega\right)\times\Phi_{ad}$, $i=1,2,3$ elemanlarının bulunmasıdır.

Bu optimal kontrol problemlerinde halletmemiz gereken meseleler şunlardır:

1) Optimal çözümün varlığının ve tekliğinin gösterilmesi
2) Gerekli optimallik şartlarının çıkarılması
3) Optimal çözüme yakınsayan minimalleştirici dizi kurulması ve bu dizinin yakınsaklık hızı

3.2.1. Optimal çözümün varlığı ve tekliği

Bu bölümde Lions (1971) çalışmasından faydalanılarak, optimal çözümün varlığını ve tekliğini ifade eden teoremler verilmiştir.

$J_\alpha^1\left(\varphi\right)$ amaç fonksiyoneli

$$J_\alpha^1\left(\varphi\right)=\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi\right)-u_t\left(x,T;0\right)+u_t\left(x,T;0\right)-y_1\left(x\right)\right]^2dx+\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\pi_1\left(\varphi,\varphi\right)=\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx, \tag{3.2.1.1}$$

$$L_1\varphi = \int_0^l \left[u_t\left(x,T;\varphi\right) - u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[y_1\left(x\right) - u_t\left(x,T;0\right)\right]dx \tag{3.2.1.2}$$

ve

$$b_1 = \int_0^l \left[y_1\left(x\right) - u_t\left(x,T;0\right)\right]^2 dx \tag{3.2.1.3}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

Böylece $J_\alpha^1\left(\varphi\right)$ fonksiyoneli

$$J_\alpha^1\left(\varphi\right) = \pi_1\left(\varphi,\varphi\right) - 2L_1\varphi + b_1 \tag{3.2.1.4}$$

şeklinde yazılır.

Aşağıdaki teorem (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini ifade ve ispat eder.

Teorem 3.2.1.1: $\pi_1\left(\varphi,\varphi\right)$ bilineer, koersiv, sürekli ve simetrik form ve $L_1\varphi$ lineer sürekli fonksiyonel olsun. O halde (3.2.1.4) ile verilen fonksiyonel için

$$J_\alpha^1\left(\varphi_1^*\right) = \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^1\left(\varphi\right)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi_1^* \in \Phi_{ad}$ elemanı vardır.

İspat: Önce $\pi_1\left(\varphi,\eta\right)$ fonksiyonelinin bilineer olduğunu gösterelim. (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çözümü

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{an\pi t}{l}+\frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$+\int_0^t\int_0^l\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{an\pi}\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu çözümde $\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$ ve $\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$ katsayıları yerine yazılırsa

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\right]\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{an\pi}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\right]\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$+\int_0^t\int_0^l\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{an\pi}\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$

veya

$$u(x,t)=\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi$$
$$+\int_0^l\left\{\frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}\psi(\xi)\,d\xi$$
$$+\int_0^t\int_0^l\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{an\pi}\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$

olur (Hasanoğlu 2010).

O halde

$$G_1(x,t,\xi)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$G_2(x,t,\xi)=\frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

ve

$$G(x,t,\xi,\tau)=\sum_{n=}^{\infty}\frac{2}{an\pi}\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

fonksiyonları tanımlanırsa u çözümü

$$u=\int_0^l G_1(x,t,\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^l G_2(x,t,\xi)\psi(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

biçiminde yazılır. Bu çözümü kullanarak, $\varphi\to u[\varphi]-u[0]$ dönüşümünün lineer olduğunu göstermek mümkündür. Gerçekten

$$\begin{aligned}u[\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2]&=\beta_1\int_0^l G_1(x,t,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi+\beta_2\int_0^l G_1(x,t,\xi)\varphi_2(\xi)d\xi\\&+\int_0^l G_2(x,t,\xi)\psi(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau\end{aligned}$$

ve

$$u[0]=\int_0^l G_2(x,t,\xi)\psi(\xi)d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

olup,

$$u[\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2]-u[0]=\beta_1\int_0^l G_1(x,t,\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi+\beta_2\int_0^l G_1(x,t,\xi)\varphi_2(\xi)\,d\xi$$

şeklindedir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\beta_1 u[\varphi_1]-\beta_1 u[0]+\beta_2 u[\varphi_2]-\beta_2 u[0]\\
&=\beta_1\int_0^l G_1(x,t,\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi+\beta_1\int_0^l G_2(x,t,\xi)\psi(\xi)\,d\xi\\
&+\beta_1\int_0^t\int_0^l G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau-\beta_1\int_0^l G_2(x,t,\xi)\psi(\xi)\,d\xi\\
&-\beta_1\int_0^t\int_0^l G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+\beta_2\int_0^l G_1(x,t,\xi)\varphi_2(\xi)\,d\xi\\
&+\beta_2\int_0^l G_2(x,t,\xi)\psi(\xi)\,d\xi+\beta_2\int_0^t\int_0^l G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\\
&-\beta_2\int_0^l G_2(x,t,\xi)\psi(\xi)\,d\xi-\beta_2\int_0^t\int_0^l G(x,t,\xi,\tau)F(\xi,\tau)\,d\xi d\tau
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan her $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ ve her $\varphi_1,\varphi_2\in H_0^1(0,l)$ için

$$u[\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2]-u[0]=\beta_1\left(u[\varphi_1]-u[0]\right)+\beta_2\left(u[\varphi_2]-u[0]\right)$$

olduğu görülür. Böylece $\varphi \to u[\varphi]-u[0]$ dönüşümünün lineer olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $\pi_1(\varphi,\eta)$ dönüşümünün bilineer form olduğunu gösterelim. Her $\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ ve her $\varphi_1,\varphi_2,\varphi \in H_0^1(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\pi_1(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]dx \\ &\quad +\alpha\int_0^l (\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)_x \varphi_x dx\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $\varphi \to u[\varphi]-u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned}\pi_1(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi) &= \beta_1\int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi_1)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]dx \\ &\quad +\beta_2\int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]dx \\ &\quad +\beta_1\alpha\int_0^l \varphi_{1_x}\varphi_x dx+\beta_2\alpha\int_0^l \varphi_{2_x}\varphi_x dx\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\pi_1(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi)=\beta_1\pi_1(\varphi_1,\varphi)+\beta_2\pi_1(\varphi_2,\varphi)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\pi_1(\varphi,\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)=\beta_1\pi_1(\varphi,\varphi_1)+\beta_2\pi_1(\varphi,\varphi_2)$$

elde edilir. O halde $\pi_1(\varphi,\varphi)$ dönüşümü bilineer formdur.

Şimdi $\pi_1(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin koersiv olduğunu gösterelim. Öncelikli olarak (3.1.1)-(3.1.3) problemi için fark problemini oluşturalım. Bunun için φ elemanına $\Delta\varphi$ artımını verelim ve $\varphi+\Delta\varphi$ elemanına karşılık gelen hiperbolik problemimizin çözümünü $u_\Delta(x,t)=u(x,t;\varphi+\Delta\varphi)$ ile gösterelim. O halde

$$(u_\Delta)_{tt}-a^2(u_\Delta)_{xx}=F(x,t),\ (x,t)\in\Omega$$
$$u_\Delta(x,0)=(\varphi+\Delta\varphi)(x),\ (u_\Delta)_t(x,0)=\psi(x),\ x\in(0,l)$$
$$u_\Delta(0,t)=0,\ u_\Delta(l,t)=0,\ t(0,T]$$

problemi yazılır.

$\Delta u(x,t)=u(x,t;\varphi+\Delta\varphi)-u(x,t;\varphi)$ olmak üzere yukarıdaki problemden (3.1.1)-(3.1.3) problemi çıkarılırsa

$$\Delta u_{tt}-a^2\Delta u_{xx}=0,\ (x,t)\in\Omega \tag{3.2.1.5}$$
$$\Delta u(x,0)=\Delta\varphi,\ \Delta u_t(x,0)=0,\ x\in(0,l) \tag{3.2.1.6}$$
$$\Delta u(0,t)=0,\ \Delta u(l,t)=0,\ t\in(0,T] \tag{3.2.1.7}$$

fark problemi elde edilir. Tezde ele alınan üç optimal kontrol problemi için bu fark problemi geçerlidir.

$\Delta u(x,t)=u(x,t;\varphi)-u(x,t;0)$ denirse $\alpha>0$ ve her $\varphi\in H_0^1(0,l)$ için

$$\left|\pi_1(\varphi,\varphi)\right|=\int_0^l\left(\Delta u_t(x,T)\right)^2dx+\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx$$
$$=\left\|\Delta u_t(x,T)\right\|_{L_2(0,l)}^2+\alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}^2$$

olur. Buradan

$$\left|\pi_1\left(\varphi,\varphi\right)\right| \geq \alpha \left\|\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.8}$$

yazılır. Bu eşitsizlik $\pi_1\left(\varphi,\varphi\right)$ fonksiyonelinin koersiv olduğunu gösterir.

Şimdi $\pi_1\left(\varphi,\varphi\right)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle (3.2.1.5)- (3.2.1.7) fark probleminin çözümüne ait aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.2.1.2: $\Delta u\left(x,t\right)$, (3.2.1.5)-(3.2.1.7) probleminin çözümü olsun. O zaman

$$\left\|\Delta u_t\left(x,T\right)\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_4 \left\|\Delta\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.9}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: (3.2.1.5) denklemi Δu_t ile çarpıldıktan sonra $\left[0,l\right]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^l \left(\Delta u_{tt} - a^2 \Delta u_{xx}\right)\Delta u_t dx = 0 \tag{3.2.1.10}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left(\Delta u_x \Delta u_t\right)_x = \Delta u_{xx}\Delta u_t + \Delta u_x \Delta u_{tx}$$

olduğundan

$$-a^2\Delta u_{xx}\Delta u_t = -a^2\left(\Delta u_x \Delta u_t\right)_x + a^2\Delta u_x \Delta u_{tx}$$

yazılır. Bu özdeşlik (3.2.1.10) denkleminde kullanılarak,

$$\int_0^l \left(\Delta u_{tt}\Delta u_t + a^2\Delta u_x \Delta u_{tx}\right)dx = a^2\int_0^l \left(\Delta u_x \Delta u_t\right)_x dx$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \left[\left(\Delta u_t\right)^2 + a^2\left(\Delta u_x\right)^2\right]dx = a^2\Delta u_x\left(l,t\right)\Delta u_t\left(l,t\right) - a^2\Delta u_x\left(0,t\right)\Delta u_t\left(0,t\right)$$

bulunur. (3.2.1.7) sınır şartlarından dolayı $\Delta u_t\left(0,t\right)=0$ ve $\Delta u_t\left(l,t\right)=0$ olup,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l \left[\left(\Delta u_t\right)^2 + a^2\left(\Delta u_x\right)^2\right]dx = 0 \qquad (3.2.1.11)$$

yazılır. (3.2.1.11) ifadesinin $\left[t,T\right]$ de integrali alınırsa

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left\{\left[\Delta u_t\left(x,t\right)\right]^2 + a^2\left[\Delta u_x\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{\left[\Delta u_t\left(x,T\right)\right]^2 + a^2\left[\Delta u_x\left(x,T\right)\right]^2\right\}dx$$

elde edilir. Şimdi

$$R\left(t\right) = \left\{\frac{1}{2}\int_0^l \left\{\left[\Delta u_t\left(x,t\right)\right]^2 + a^2\left[\Delta u_x\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O halde yukarıdaki eşitlik

$$R^2(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{ \left[\Delta u_t(x,T)\right]^2 + a^2\left[\Delta u_x(x,T)\right]^2 \right\} dx \qquad (3.2.1.12)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi de (3.2.1.11) denklemi $[0,t]$ de integrallenirse

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left\{ \left[\Delta u_t(x,t)\right]^2 + a^2\left[\Delta u_x(x,t)\right]^2 \right\} dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{ \left[\Delta u_t(x,0)\right]^2 + a^2\left[\Delta u_x(x,0)\right]^2 \right\} dx$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca $\Delta u_t(x,0) = 0$ ve $\Delta u_x(x,0) = \Delta\varphi_x(x)$ olduğundan

$$R^2(t) = \frac{a^2}{2}\int_0^l \Delta\varphi_x^2 dx = \frac{a^2}{2}\left\|\Delta\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)} \qquad (3.2.1.13)$$

yazılır. (3.2.1.12) ve (3.2.1.13) denklemleri bir arada düşünülürse

$$\int_0^l \left\{ \left[\Delta u_t(x,T)\right]^2 + a^2\left[\Delta u_x(x,T)\right]^2 \right\} dx = a^2\left\|\Delta\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)}$$

elde edilir. O halde

$$\left\|\Delta u_t(x,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_4\left\|\Delta\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)}$$

yazılır. Burada $c_4 = a^2$ şeklindedir. Böylece Lemma 3.2.1.2 için ispat tamamlanır.

$\pi_1(\varphi,\eta)$ fonksiyonelinin sürekliliğine dönecek olursak her $\varphi,\eta \in H_0^1(0,l)$ için

$$\pi_1(\varphi,\eta) = \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\eta) - u_t(x,T;0)\right]dx + \alpha\int_0^l \varphi_x\eta_x dx$$

olup, Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\left|\pi_1(\varphi,\eta)\right| \le &\left\|u_t(x,T;\varphi) - u_t(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|u_t(x,T;\eta) - u_t(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)} \\ &+ \alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)}\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik $\Delta u(x,t;\varphi) = u(x,t;\varphi) - u(x,t;0)$ ve $\Delta u(x,t;\eta) = u(x,t;\eta) - u(x,t;0)$ için

$$\left|\pi_1(\varphi,\eta)\right| \le \left\|\Delta u_t(x,T;\varphi)\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\Delta u_t(x,T;\eta)\right\|_{L_2(0,l)} + \alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)}$$

şeklinde yazılır. Burada (3.2.1.9) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|\pi_1(\varphi,\eta)\right| &\le \sqrt{c_4}\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\sqrt{c_4}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)} + \alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)} \\ &\le c_4\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)} + \alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $c_5 = \max\{c_4, \alpha\}$ için

$$\left|\pi_1(\varphi,\eta)\right| \le c_5\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.14}$$

bulunur. Bu eşitsizlik $\pi_1(\varphi,\eta)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi $\pi_1(\varphi,\eta)$ fonksiyonelinin simetrik olduğunu gösterelim. Her $\varphi,\eta \in H_0^1(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\pi_1(\varphi,\eta) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\eta)-u_t(x,T;0)\right]dx + \alpha\int_0^l \varphi_x\eta_x dx \\ &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\eta)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]dx + \alpha\int_0^l \eta_x\varphi_x dx\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$$\pi_1(\varphi,\eta) = \pi_1(\eta,\varphi)$$

olduğu görülür. Yani $\pi_1(\varphi,\eta)$ fonksiyoneli simetrik formdur.

Şimdi $L_1\varphi$ fonksiyonelinin lineer olduğunu gösterelim. Her $\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ ve her $\varphi_1,\varphi_2 \in H_0^1(0,l)$ için

$$L_1(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2) = \int_0^l \left[u_t(x,T;\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right]\left[y_1(x)-u_t(x,T;0)\right]dx$$

yazılır. Buradan $\varphi \to u[\varphi]-u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned}L_1(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2) &= \beta_1\int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi_1)-u_t(x,T;0)\right]\left[y_1(x)-u_t(x,T;0)\right]dx \\ &+ \beta_2\int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right]\left[y_1(x)-u_t(x,T;0)\right]dx\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$L_1(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2) = \beta_1 L_1\varphi_1 + \beta_2 L_1\varphi_2$$

yazılır ve $L_1\varphi$ fonksiyonelinin lineer olduğu görülür.

Şimdi (3.2.1.2) ile tanılanan $L_1\varphi$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim.

$$L_1\varphi = \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - u_t(x,T;0)\right]\left[y_1(x) - u_t(x,T;0)\right]dx$$

fonksiyonelinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanıp, $\Delta u(x,t) = u(x,t;\varphi) - u(x,t;0)$ olarak değerlendirilirse

$$\left|L_1\varphi\right| \le \left\|\Delta u_t(x,T)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|y_1(x) - u_t(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)}$$

elde edilir. Burada

$$\left\|y_1(x) - u_t(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_6$$

alalım. O halde

$$\left|L_1\varphi\right| \le c_6 \left\|\Delta u_t(x,T)\right\|_{L_2(0,l)}$$

bulunur. (3.2.1.9) eşitsizliği $\Delta u_t(x,T) = u_t(x,T;\varphi) - u_t(x,T;0)$ dikkate alınırsa

$$\left|L_1\varphi\right| \le \sqrt{c_4}\, c_6 \left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}$$

yazılır. O halde $c_7 = \sqrt{c_4}\, c_6$ alınarak,

$$\left|L_1\varphi\right| \le c_7 \left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.15}$$

bulunur. Bu eşitsizlik $L_1\varphi$ fonksiyonelinin sürekliliğini gösterir.

$J_\alpha^1(\varphi)$ fonksiyoneli için $\{\varphi_n\} \in \Phi_{ad}$ bir minimalleştirici dizi olsun. Yani $n \to \infty$ için

$$J_\alpha^1(\varphi_n) \to \operatorname*{Inf}_{\varphi \in \Phi_{ad}} J_\alpha^1(\varphi) \tag{3.2.1.16}$$

yakınsaması geçerli olsun. $\pi_1(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin koersiv ve $L_1\varphi$ fonksiyonelinin sürekli olmasından faydalanılarak, yani (3.2.1.8) ve (3.2.1.15) eşitsizlikleri kullanılarak

$$J_\alpha^1(\varphi) \ge \alpha \left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}^2 - 2c_7 \left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.17}$$

yazılır.

(3.2.1.16) ve (3.2.1.17) birlikte değerlendirilirse c_8 keyfi bir sabit olmak üzere

$$\left\|\varphi_n\right\|_{H_0^1(0,l)} \le c_8$$

olur. O halde $\{\varphi_n\}$ dizisinin $w \in H_0^1(0,l)$ elemanına zayıf yakınsayan bir $\{\varphi_\mu\}$ alt dizisi mevcuttur. Φ_{ad} kapalı ve konveks olduğundan zayıf kapalıdır. Bu durumda

$$w \in \Phi_{ad} \tag{3.2.1.18}$$

olacaktır. Ayrıca $\varphi \to \pi_1(\varphi,\varphi)$ dönüşümü aşağıdan zayıf yarı sürekli ve $\varphi \to L_1\varphi$ dönüşümü zayıf süreklidir. Sonuç olarak $\varphi \to J_\alpha^1(\varphi)$ dönüşümü aşağıdan zayıf yarı süreklidir. O halde aşağıdan zayıf yarı süreklilik tanımı gereği

$$\liminf J_\alpha^1(\varphi_\mu) \geq J_\alpha^1(w)$$

olacaktır. Bu durumda (3.2.1.16) ifadesinden

$$J_\alpha^1(w) \leq \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^1(\varphi)$$

yazılıp, (3.2.1.18) ifadesinden $J_\alpha^1(w) = \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^1(\varphi)$ olmak zorundadır. Böylece (3.1.1)-(3.1.4) probleminin varlığı gösterilmiş olur.

Şimdi optimal çözümün tekliğini ispatlayalım. Önce $\varphi \to \pi_1(\varphi,\varphi)$ dönüşümü kesin konveks olduğundan $\varphi \to J_\alpha^1(\varphi)$ dönüşümünün de kesin konveks olduğunu gösterelim.

$\varphi \to u[\varphi]-u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned} u_t(x,t;\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)-u_t(x,t;0) &= \beta_1\left[u_t(x,t;\varphi_1)-u_t(x,t;0)\right] \\ &+\beta_2\left[u_t(x,t;\varphi_2)-u_t(x,t;0)\right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $\beta\in[0,1]$ olmak üzere $\beta_1=\beta,\ \beta_2=1-\beta$ ve $t=T$ için

$$\begin{aligned} u_t(x,T;\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2)-u_t(x,T;0) &= \beta\left[u_t(x,T;\varphi_1)-u_t(x,T;0)\right] \\ &+(1-\beta)\left[u_t(x,T;\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right] \end{aligned} \tag{3.2.1.19}$$

şeklinde yazılır.

Önce $\pi_1(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğunu gösterelim. $\pi_1(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin tanımı gereği her $\varphi_1,\varphi_2 \in \Phi_{ad}$ ve $\beta \in (0,1)$ için

$$\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)=\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx$$
$$+\alpha\int_0^l\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)_x^2dx$$

yazılır. Bu ifadede (3.2.1.19) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\&=\int_0^l\left[\beta\left(u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right)+(1-\beta)\left(u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right)\right]^2dx\\&+\alpha\int_0^l\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)_x^2dx\end{aligned}\tag{3.2.1.20}$$

olur. O halde basit işlemlerle

$$\begin{aligned}&\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\&=\beta^2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)^2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\&+2\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]dx\\&+\alpha\int_0^l\left[\beta^2\left(\varphi_1\right)_x^2+(1-\beta)^2\left(\varphi_2\right)_x^2+2\beta(1-\beta)\left(\varphi_1\right)_x\left(\varphi_2\right)_x\right]dx\end{aligned}$$

elde edilir.

$\varepsilon-$Cauchy eşitsizliği kullanılarak,

$$\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2$$

ve

$$(\varphi_1)_x(\varphi_2)_x\leq\frac{\varepsilon}{2}(\varphi_1)_x^2+\frac{1}{2\varepsilon}(\varphi_2)_x^2$$

yazılır. Bu eşitsizliklerde $\varepsilon=1$ alınarak, $\varphi_1\neq\varphi_2$ için yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)$$
$$<\beta^2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)^2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx$$
$$+\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx$$
$$+\alpha\int_0^l\left[\beta^2(\varphi_1)_x^2+(1-\beta)^2(\varphi_2)_x^2+\beta(1-\beta)(\varphi_1)_x^2+\beta(1-\beta)(\varphi_2)_x^2\right]dx$$

elde edilir. Buradan

$$\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)$$
$$<\beta\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx$$
$$+\alpha\int_0^l\left[\beta(\varphi_1)_x^2+(1-\beta)(\varphi_2)_x^2\right]dx$$

bulunur. O halde

$$\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)<\beta\pi_1\left(\varphi_1,\varphi_1\right)+(1-\beta)\pi_1\left(\varphi_2,\varphi_2\right) \quad (3.2.1.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $\pi_1(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğunu göstermektedir.

Şimdi $L_1\varphi$ fonksiyonelinin konveks olduğunu gösterelim. $L_1\varphi$ fonksiyonelinin tanımından her $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi_{ad}$ için

$$L_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)=\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[y_1(x)-u_t\left(x,T;0\right)\right]dx$$

yazılır.

Bu ifadede (3.2.1.19) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}L_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)&=\beta\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[y_1(x)-u_t\left(x,T;0\right)\right]dx\\&+(1-\beta)\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[y_1(x)-u_t\left(x,T;0\right)\right]dx\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$L_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)=\beta L_1\left(\varphi_1\right)+(1-\beta)L_1\left(\varphi_2\right) \quad (3.2.1.22)$$

olduğu görülür. Yani $L_1\varphi$, konveks bir fonksiyoneldir.

Şimdi $J_\alpha^1(\varphi)$ fonksiyoneline dönelim. Her $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi_{ad}$ ve tüm $\beta\in(0,1)$ için

$$J_\alpha^1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)=\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)-2L_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)+b_1$$

olup, (3.2.1.21) ve (3.2.1.22) değerlendirmeleri göz önüne alınırsa $\varphi_1 \neq \varphi_2$ iken

$$J_\alpha^1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)<\beta\pi_1\left(\varphi_1,\varphi_1\right)+(1-\beta)\pi_1\left(\varphi_2,\varphi_2\right)-2\left(\beta L_1\varphi_1+(1-\beta)L_1\varphi_2\right)+b_1$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}J_\alpha^1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)&<\beta\left\{\pi_1\left(\varphi_1,\varphi_1\right)-2L_1\varphi_1+b_1\right\}+(1-\beta)\left\{\pi_1\left(\varphi_2,\varphi_2\right)-2L_1\varphi_2+b_1\right\}\\&<\beta J_\alpha^1\left(\varphi_1\right)+(1-\beta)J_\alpha^1\left(\varphi_2\right)\end{aligned}$$

bulunur. O halde $J_\alpha^1(\varphi)$ fonksiyoneli kesin konvekstir.

Şimdi φ_1 ve φ_2,

$$J_\alpha^1\left(\varphi_1\right)=J_\alpha^1\left(\varphi_2\right)=\operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^1(\varphi)$$

şartını sağlayan iki eleman olsun. Φ_{ad} kümesi konveks olduğundan

$$\frac{1}{2}\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\in\Phi_{ad}$$

ve $J_\alpha^1(\varphi)$ fonksiyoneli kesin konveks olduğundan $\varphi_1 \neq \varphi_2$ iken

$$J_\alpha^1\left(\frac{1}{2}\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)<\frac{1}{2}J_\alpha^1\left(\varphi_1\right)+\frac{1}{2}J_\alpha^1\left(\varphi_2\right)=\operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^1(\varphi)$$

olur. Bu ifade bir çelişki oluşturmaktadır. O halde $\varphi_1 = \varphi_2$ olmak zorundadır yani minimum eleman tektir. Böylece Teorem 3.2.1.1 için ispat tamamlanır.

$J_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyoneli

$$J_\alpha^2(\varphi) = \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - u_x(x,T;0) + u_x(x,T;0) - y_2(x)\right]^2 dx + \alpha \int_0^l \varphi_x^2 dx$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer

$$\pi_2(\varphi,\varphi) = \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - u_x(x,T;0)\right]^2 dx + \alpha \int_0^l \varphi_x^2 dx, \tag{3.2.1.23}$$

$$L_2\varphi = \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - u_x(x,T;0)\right]\left[y_2(x) - u_x(x,T;0)\right] dx \tag{3.2.1.24}$$

ve

$$b_2 = \int_0^l \left[y_2(x) - u_x(x,T;0)\right]^2 dx \tag{3.2.1.25}$$

fonksiyonları tanımlanırsa

$$J_\alpha^2(\varphi) = \pi_2(\varphi,\varphi) - 2L_2\varphi + b_2 \tag{3.2.1.26}$$

olur.

Aşağıdaki teorem (3.1.1)-(3.1.3) hiperbolik probleminde $J_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyonelini minimum yapacak bir tek kontrolün bulunduğunu ifade ve ispat eder.

Teorem 3.2.1.3: $\pi_2(\varphi,\varphi)$ bilineer, koersiv, sürekli ve simetrik form ve $L_2\varphi$ lineer sürekli fonksiyonel olsun. O halde (3.2.1.26) ile verilen fonksiyonel için

$$J_\alpha^2(\varphi_2^*) = \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^2(\varphi)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi_2^* \in \Phi_{ad}$ elemanı vardır.

İspat: Öncelikle $\pi_2(\varphi,\eta)$ dönüşümünün bilineer form olduğunu gösterelim. Her $\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ ve her $\varphi_1,\varphi_2,\varphi \in H_0^1(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\pi_2(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi) &= \int_0^l \left[u_x(x,T;\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]dx \\ &\quad +\alpha\int_0^l (\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)_x\,\varphi_x\,dx\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $\varphi \to u[\varphi]-u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned}\pi_2(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi) &= \beta_1\int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi_1)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]dx \\ &\quad +\beta_2\int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi_2)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]dx \\ &\quad +\beta_1\alpha\int_0^l \varphi_{1_x}\varphi_x\,dx+\beta_2\alpha\int_0^l \varphi_{2_x}\varphi_x\,dx\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\pi_2(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi)=\beta_1\pi_2(\varphi_1,\varphi)+\beta_2\pi_2(\varphi_2,\varphi)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\pi_2(\varphi,\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)=\beta_1\pi_2(\varphi,\varphi_1)+\beta_2\pi_2(\varphi,\varphi_2)$$

olduğu elde edilir. O halde $\pi_2(\varphi,\varphi)$ dönüşümü bilineer formdur.

Şimdi $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin koersiv olduğunu gösterelim. O halde $\Delta u(x,T)=u(x,T;\varphi)-u(x,T;0)$ denirse $\alpha>0$ ve her $\varphi\in H_0^1(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\left|\pi_2(\varphi,\varphi)\right|&=\int_0^l\left(\Delta u_x(x,T)\right)^2dx+\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx\\&=\left\|\Delta u_x(x,T)\right\|_{L_2(0,l)}^2+\alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}^2\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\left|\pi_2(\varphi,\varphi)\right|\geq\alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}^2 \tag{3.2.1.27}$$

bulunur. O halde $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyoneli koersivdir.

Şimdi $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.2.1.4: $\Delta u(x,t)$, (3.2.1.5)-(3.2.1.7) probleminin çözümü olsun. O zaman

$$\left\|\Delta u_x\left(x,T\right)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_9 \left\|\Delta\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)} \qquad (3.2.1.28)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: (3.2.1.12) ve (3.2.1.13) denklemleri bir arada düşünülürse

$$\int_0^l \left\{\left[\Delta u_t\left(x,T\right)\right]^2 + a^2\left[\Delta u_x\left(x,T\right)\right]^2\right\}dx = a^2\left\|\Delta\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitlikten

$$\left\|\Delta u_x\left(x,T\right)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_9 \left\|\Delta\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)}$$

yazılır. Burada $c_9 = 1$ şeklindedir. Böylece Lemma 3.2.1.4 için ispat tamamlanır.

$\pi_2\left(\varphi,\eta\right)$ fonksiyonelinin sürekliliğine dönecek olursak her $\varphi,\eta \in H_0^1\left(0,l\right)$ için

$$\pi_2\left(\varphi,\eta\right) = \int_0^l \left[u_x\left(x,T;\varphi\right) - u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[u_x\left(x,T;\eta\right) - u_x\left(x,T;0\right)\right]dx + \alpha\int_0^l \varphi_x\eta_x dx$$

olup, Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\pi_2(\varphi,\eta)\right| \le \left\|u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|u_x(x,T;\eta)-u_x(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)} + \alpha \left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)}$$

yazılır. $\Delta u(x,T;\varphi)=u(x,T;\varphi)-u(x,T;0)$ ve $\Delta u(x,T;\eta)=u(x,T;\eta)-u(x,T;0)$ için

$$\left|\pi_2(\varphi,\eta)\right| \le \left\|\Delta u_x(x,T;\varphi)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|\Delta u_x(x,T;\eta)\right\|_{L_2(0,l)} + \alpha \left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)}$$

olur. Burada (3.2.1.28) eşitsizliği $\Delta u_x(x,T;\varphi)=u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)$ için değerlendirilirse

$$\left|\pi_2(\varphi,\eta)\right| \le \sqrt{c_9}\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \sqrt{c_9}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)} + \alpha \left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)}$$

yazılır.

Yukarıdaki eşitsizlik $c_{10}=\max\{c_9,\alpha\}$ için

$$\left|\pi_2(\varphi,\eta)\right| \le c_{10}\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)} \qquad (3.2.1.29)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizlik $\pi_2(\varphi,\eta)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi $\pi_2(\varphi,\eta)$ fonksiyonelinin simetrik olduğunu gösterelim. Her $\varphi,\eta \in H_0^1(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\pi_2(\varphi,\eta) &= \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\eta)-u_x(x,T;0)\right]dx + \alpha\int_0^l \varphi_x\eta_x dx \\ &= \int_0^l \left[u_x(x,T;\eta)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]dx + \alpha\int_0^l \eta_x\varphi_x dx\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$$\pi_2(\varphi,\eta)=\pi_2(\eta,\varphi)$$

şeklindedir. Yani $\pi_2(\varphi,\eta)$ fonksiyoneli simetriktir.

Şimdi $L_2\varphi$ fonksiyonelinin lineer olduğunu gösterelim. Her $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ ve her $\varphi_1,\varphi_2\in H_0^1(0,l)$ için

$$L_2(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)=\int_0^l\left[u_x(x,T;\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)-u_x(x,T;0)\right]\left[y_2(x)-u_x(x,T;0)\right]dx$$

yazılır. Buradan $\varphi\to u[\varphi]-u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned}L_2(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)=&\ \beta_1\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi_1)-u_x(x,T;0)\right]\left[y_2(x)-u_x(x,T;0)\right]dx\\&+\beta_2\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi_2)-u_x(x,T;0)\right]\left[y_2(x)-u_x(x,T;0)\right]dx\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$L_2(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)=\beta_1L_2\varphi_1+\beta_2L_2\varphi_2$$

yazılır. Bu eşitlik $L_2\varphi$ fonksiyonelinin lineer olduğu gösterir.

Şimdi (3.2.1.24) ile tanılanan $L_2\varphi$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim. Bu fonksiyonelde Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|L_2\varphi\right| \le \left\|u_x\left(x,T;\varphi\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right\|_{L_2(0,l)}\left\|y_2\left(x\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right\|_{L_2(0,l)}$$

yazılır. Burada

$$\left\|y_2\left(x\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{11}$$

alalım. O halde $\Delta u_x\left(x,T\right)=u_x\left(x,T;\varphi\right)-u_x\left(x,T;0\right)$ için

$$\left|L_2\varphi\right| \le c_{11}\left\|\Delta u_x\left(x,T\right)\right\|_{L_2(0,l)}$$

yazılır. (3.2.1.28) eşitsizliği $\Delta u_x\left(x,T\right)=u_x\left(x,T;\varphi\right)-u_x\left(x,T;0\right)$ için değerlendirilerek,

$$\left|L_2\varphi\right| \le \sqrt{c_9}\,c_{11}\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}$$

bulunur. O halde $c_{12}=\sqrt{c_9}\,c_{11}$ alınarak,

$$\left|L_2\varphi\right| \le c_{12}\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \qquad (3.2.1.30)$$

bulunur. Bu eşitsizlik $L_2\varphi$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterir.

$\left\{\varphi_n\right\}\in\Phi_{ad}$ bir minimalleştirici dizi olsun. Yani $n\to\infty$ için

$$J_\alpha^2\left(\varphi_n\right)\to \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^2\left(\varphi\right) \qquad (3.2.1.31)$$

yakınsaması sağlansın. $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin koersivliği ve $L_2\varphi$ fonksiyonelinin sürekliliğinden faydalanılarak, yani (3.2.1.27) ve (3.2.1.30) eşitsizlikleri kullanılarak

$$J_\alpha^2(\varphi) \geq \alpha \|\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)} - 2c_{12}\|\varphi\|_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.32}$$

yazılır.

(3.2.1.31) ve (3.2.1.32) birlikte değerlendirilirse c_{13} keyfi bir sabit olmak üzere

$$\|\varphi_n\|_{H_0^1(0,l)} \leq c_{13}$$

bulunur. O halde $\{\varphi_n\}$ dizisinin $w \in H_0^1(0,l)$ elemanına zayıf yakınsayan bir $\{\varphi_\mu\}$ alt dizisi mevcuttur. Φ_{ad} kapalı ve konveks olduğundan zayıf kapalıdır. Bu durumda

$$w \in \Phi_{ad} \tag{3.2.1.33}$$

olur. Ayrıca $\varphi \to \pi_2(\varphi,\varphi)$ dönüşümü aşağıdan zayıf yarı sürekli ve $\varphi \to L_2\varphi$ dönüşümü zayıf süreklidir. Sonuç olarak $\varphi \to J_\alpha^2(\varphi)$ dönüşümü aşağıdan zayıf yarı süreklidir. O halde aşağıdan zayıf yarı süreklilik tanımı gereği

$$\liminf J_\alpha^2(\varphi_\mu) \geq J_\alpha^2(w)$$

yazılır. Bu durumda (3.2.1.31) ve (3.2.1.33) ifadelerinden

$$J_\alpha^2(w) \leq \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^2(\varphi)$$

elde edilir. O halde $J_\alpha^2(w) = \underset{\varphi \in \Phi_{ad}}{\text{Inf}} J_\alpha^2(\varphi)$ olmak zorundadır. Böylece (3.1.1)-(3.1.3) hiperbolik problemi için $J_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyonelini minimum yapan bir elemanın varlığı gösterilmiş olur.

Şimdi optimal çözümün tekliğini ispatlayalım. Önce $\varphi \to \pi_2(\varphi,\varphi)$ dönüşümü kesin konveks olduğundan $\varphi \to J_\alpha^2(\varphi)$ dönüşümünün de kesin konveks olduğunu gösterelim.

$\varphi \to u[\varphi] - u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned} u_x(x,t;\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2) - u_x(x,t;0) = \beta_1\left[u_x(x,t;\varphi_1) - u_x(x,t;0)\right] \\ + \beta_2\left[u_x(x,t;\varphi_2) - u_x(x,t;0)\right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Yukarıdaki eşitlik $\beta \in [0,1]$ olmak üzere $\beta_1 = \beta,\ \beta_2 = 1-\beta$ ve $t = T$ için

$$\begin{aligned} u_x(x,T;\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2) - u_x(x,T;0) = \beta\left[u_x(x,T;\varphi_1) - u_x(x,T;0)\right] \\ + (1-\beta)\left[u_x(x,T;\varphi_2) - u_x(x,T;0)\right] \end{aligned} \qquad (3.2.1.34)$$

şeklinde yazılır.

Önce $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğunu gösterelim. $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin tanımı gereği her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{ad}$ için

$$\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)=\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx$$
$$+\alpha\int_0^l\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)_x^2dx$$

yazılır. Bu ifadede (3.2.1.34) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&=\int_0^l\left[\beta\left(u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right)+(1-\beta)\left(u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right)\right]^2dx\\
&+\alpha\int_0^l\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)_x^2dx
\end{aligned}\tag{3.2.1.35}$$

olur. Buradan basit işlemlerle

$$\begin{aligned}
&\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&=\beta^2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)^2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+2\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]dx\\
&+\alpha\int_0^l\left[\beta^2\left(\varphi_1\right)_x^2+(1-\beta)^2\left(\varphi_2\right)_x^2+2\beta(1-\beta)\left(\varphi_1\right)_x\left(\varphi_2\right)_x\right]dx
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon-$Cauchy eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\\
&\le\frac{\varepsilon}{2}\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2
\end{aligned}$$

ve

$$\left(\varphi_1\right)_x\left(\varphi_2\right)_x \le \frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_1\right)_x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\varphi_2\right)_x^2$$

yazılır. Bu eşitsizliklerde $\varepsilon = 1$ alınarak, $\varphi_1 \ne \varphi_2$ için yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&<\beta^2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)^2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx+\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+\alpha\int_0^l\left[\beta^2\left(\varphi_1\right)_x^2+(1-\beta)^2\left(\varphi_2\right)_x^2+\beta(1-\beta)\left(\varphi_1\right)_x^2+\beta(1-\beta)\left(\varphi_2\right)_x^2\right]dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde basit işlemlerle

$$\begin{aligned}
&\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&<\beta\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+\alpha\int_0^l\left[\beta\left(\varphi_1\right)_x^2+(1-\beta)\left(\varphi_2\right)_x^2\right]dx
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)<\beta\pi_2\left(\varphi_1,\varphi_1\right)+(1-\beta)\pi_2\left(\varphi_2,\varphi_2\right) \quad (3.2.1.36)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğunu gösterir.

Şimdi $L_2\varphi$ fonksiyonelinin konveks olduğunu gösterelim. $L_2\varphi$ fonksiyonelinin tanımı gereği her $\varphi_1,\varphi_2 \in \Phi_{ad}$ için

$$L_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)=\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[y_2\left(x\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]dx$$

yazılır. Bu ifadede (3.2.1.34) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}L_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)&=\beta\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[y_2\left(x\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]dx\\&+(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[y_2\left(x\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]dx\end{aligned}$$

olur.

Buradan

$$L_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)=\beta L_2\left(\varphi_1\right)+(1-\beta)L_2\left(\varphi_2\right) \qquad (3.2.1.37)$$

yazılır. Yani $L_2\varphi$, konveks bir fonksiyoneldir.

Şimdi $J_\alpha^2\left(\varphi\right)$ amaç fonksiyoneline dönelim. Her $\varphi_1,\varphi_2 \in \Phi_{ad}$ ve tüm $\beta\in\left(0,1\right)$ için

$$J_\alpha^2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)=\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)-2L_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)+b_2$$

yazılır. Burada (3.2.1.36) ve (3.2.1.37) değerlendirmeleri göz önüne alınırsa $\varphi_1\neq\varphi_2$ iken

$$J_\alpha^2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)<\beta\pi_2\left(\varphi_1,\varphi_1\right)+(1-\beta)\pi_2\left(\varphi_2,\varphi_2\right)-2\left(\beta L_2\varphi_1+(1-\beta)L_2\varphi_2\right)+b_2$$
$$<\beta\left\{\pi_2\left(\varphi_1,\varphi_1\right)-2L_2\varphi_1+b_2\right\}+(1-\beta)\left\{\pi_2\left(\varphi_2,\varphi_2\right)-2L_2\varphi_2+b_2\right\}$$

olup,

$$J_\alpha^2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)<\beta J_\alpha^2\left(\varphi_1\right)+(1-\beta)J_\alpha^2\left(\varphi_2\right)$$

bulunur. O halde $J_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyoneli kesin konvekstir.

φ_1 ve φ_2 iki farklı optimal kontrol yani

$$J_\alpha^2\left(\varphi_1\right)=J_\alpha^2\left(\varphi_2\right)=\operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^2(\varphi)$$

şartını sağlayan iki eleman olsun.

Φ_{ad} kümesi konveks olduğundan

$$\frac{1}{2}\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\in\Phi_{ad}$$

ve $J_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyoneli kesin konveks olduğundan

$$J_\alpha^2\left(\frac{1}{2}\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)<\operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^2(\varphi)$$

yazılır. Bu ifade bir çelişki oluşturmaktadır. O halde $\varphi_1=\varphi_2$ olmak zorundadır yani minimum eleman tektir. Böylece Teorem 3.2.1.3 ispatlanmış olur.

$J_\alpha^3(\varphi)$ amaç fonksiyoneli,

$$
\begin{aligned}
J_\alpha^3(\varphi) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - u_t(x,T;0) + u_t(x,T;0) - y_1(x)\right]^2 dx \\
&+ \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - u_x(x,T;0) + u_x(x,T;0) - y_2(x)\right]^2 dx \\
&+ \alpha \int_0^l \varphi_x^2 dx
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$
\begin{aligned}
\pi_3(\varphi,\varphi) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - u_t(x,T;0)\right]^2 dx \\
&+ \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - u_x(x,T;0)\right]^2 dx + \alpha \int_0^l \varphi_x^2 dx,
\end{aligned}
\tag{3.2.1.38}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3\varphi &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - u_t(x,T;0)\right]\left[y_1(x) - u_t(x,T;0)\right] dx \\
&+ \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - u_x(x,T;0)\right]\left[y_2(x) - u_x(x,T;0)\right] dx
\end{aligned}
\tag{3.2.1.39}
$$

ve

$$
b_3 = \int_0^l \left[y_1(x) - u_t(x,T;0)\right]^2 dx + \int_0^l \left[y_2(x) - u_x(x,T;0)\right]^2 dx \tag{3.2.1.40}
$$

fonksiyonları tanımlanarak, $J_\alpha^3(\varphi)$ fonksiyoneli

$$
J_\alpha^3(\varphi) = \pi_3(\varphi,\varphi) - 2L_3\varphi + b_3 \tag{3.2.1.41}
$$

şeklinde yazılır.

Aşağıdaki teorem (3.1.1)-(3.1.3) hiperbolik probleminde $J_\alpha^3(\varphi)$ fonksiyonelini minimum yapacak bir tek kontrolün bulunduğunu belirtmektedir.

Teorem 3.2.1.5: $\pi_3(\varphi,\varphi)$ bilineer, koersiv, sürekli ve simetrik form ve $L_3\varphi$ lineer sürekli fonksiyonel olsun. O halde (3.2.1.41) ile verilen fonksiyonel için

$$J_\alpha^3(\varphi_3^*) = \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^3(\varphi)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi_3^* \in \Phi_{ad}$ elemanı vardır.

İspat: Öncelikle $\pi_3(\varphi,\eta)$ dönüşümünün bilineer form olduğunu gösterelim. Her $\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ ve her $\varphi_1,\varphi_2,\varphi \in H_0^1(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\pi_3(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]dx \\ &+\int_0^l \left[u_x(x,T;\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]dx \\ &+\alpha\int_0^l (\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)_x\,\varphi_x dx\end{aligned}$$

yazılır.

Buradan $\varphi \to u[\varphi]-u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\pi_3\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi\right)=\beta_1\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[u_t\left(x,T;\varphi\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]dx$$
$$+\beta_2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[u_t\left(x,T;\varphi\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]dx$$
$$+\beta_1\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[u_x\left(x,T;\varphi\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]dx$$
$$+\beta_2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[u_x\left(x,T;\varphi\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]dx$$
$$+\beta_1\alpha\int_0^l\varphi_{1_x}\varphi_x dx+\beta_2\alpha\int_0^l\varphi_{2_x}\varphi_x dx$$

elde edilir. Böylece

$$\pi_3\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2,\varphi\right)=\beta_1\pi_3\left(\varphi_1,\varphi\right)+\beta_2\pi_3\left(\varphi_2,\varphi\right)$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\pi_3\left(\varphi,\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)=\beta_1\pi_3\left(\varphi,\varphi_1\right)+\beta_2\pi_3\left(\varphi,\varphi_2\right)$$

olduğu elde edilir. O halde $\pi_3\left(\varphi,\varphi\right)$ dönüşümü bilineer formdur.

Şimdi $\pi_3\left(\varphi,\varphi\right)$ fonksiyonelinin koersiv bilineer form olduğunu gösterelim. $\Delta u\left(x,t\right)=u\left(x,t;\varphi\right)-u\left(x,t;0\right)$ denirse $\alpha>0$ ve her $\varphi\in H_0^1\left(0,l\right)$ için

$$\left|\pi_3\left(\varphi,\varphi\right)\right|=\int_0^l\left(\Delta u_t\left(x,T\right)\right)^2dx+\int_0^l\left(\Delta u_x\left(x,T\right)\right)^2dx+\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx$$
$$=\left\|\Delta u_t\left(x,T\right)\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|\Delta u_x\left(x,T\right)\right\|_{L_2(0,l)}^2+\alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}^2$$

yazılır. Buradan

$$\left|\pi_3(\varphi,\varphi)\right| \geq \alpha \left\|\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.42}$$

elde edilir. Böylece $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin koersiv olduğu görülür.

Şimdi $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim. Her $\varphi,\eta \in H_0^1(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\pi_3(\varphi,\eta) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\eta)-u_t(x,T;0)\right]dx \\ &+ \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\eta)-u_x(x,T;0)\right]dx + \alpha\int_0^l \varphi_x\eta_x dx\end{aligned}$$

yazılır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\left|\pi_3(\varphi,\eta)\right| \leq & \left\|u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)}\left\|u_t(x,T;\eta)-u_t(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)} \\ &+\left\|u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)}\left\|u_x(x,T;\eta)-u_x(x,T;0)\right\|_{L_2(0,l)} \\ &+\alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)}\end{aligned}$$

olur. Buradan $\Delta u(x,t;\varphi) = u(x,t;\varphi)-u(x,t;0)$ ve $\Delta u(x,t;\eta) = u(x,t;\eta)-u(x,t;0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left|\pi_3(\varphi,\eta)\right| \leq & \left\|\Delta u_t(x,T;\varphi)\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\Delta u_t(x,T;\eta)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|\Delta u_x(x,T;\varphi)\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\Delta u_x(x,T;\eta)\right\|_{L_2(0,l)} \\ &+\alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}\left\|\eta\right\|_{H_0^1(0,l)}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.2.1.9) ve (3.2.1.28) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left|\pi_3(\varphi,\eta)\right| \le \sqrt{c_4}\,\|\varphi\|_{H_0^1(0,l)}\sqrt{c_4}\,\|\eta\|_{H_0^1(0,l)} + \sqrt{c_9}\,\|\varphi\|_{H_0^1(0,l)}\sqrt{c_9}\,\|\eta\|_{H_0^1(0,l)} + \alpha\|\varphi\|_{H_0^1(0,l)}\|\eta\|_{H_0^1(0,l)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $c_{14} = \max\{c_4, c_9, \alpha\}$ için

$$\left|\pi_3(\varphi,\eta)\right| \le c_{14}\|\varphi\|_{H_0^1(0,l)}\|\eta\|_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.43}$$

şeklinde yazılır. Böylece $\pi_3(\varphi,\eta)$ fonksiyonelinin sürekli olduğu görülür.

Şimdi $\pi_3(\varphi,\eta)$ fonksiyonelinin simetrik olduğunu gösterelim. Her $\varphi,\eta \in H_0^1(0,l)$ için

$$\begin{aligned}\pi_3(\varphi,\eta) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\eta)-u_t(x,T;0)\right]dx\\ &\quad+\int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\eta)-u_x(x,T;0)\right]dx+\alpha\int_0^l \varphi_x\eta_x dx\\ &=\int_0^l \left[u_t(x,T;\eta)-u_t(x,T;0)\right]\left[u_t(x,T;\varphi)-u_t(x,T;0)\right]dx\\ &\quad+\int_0^l \left[u_x(x,T;\eta)-u_x(x,T;0)\right]\left[u_x(x,T;\varphi)-u_x(x,T;0)\right]dx+\alpha\int_0^l \eta_x\varphi_x dx\end{aligned}$$

yazılır ve

$$\pi_3(\varphi,\eta) = \pi_3(\eta,\varphi)$$

olduğu görülür. Yani $\pi_3(\varphi,\eta)$ fonksiyoneli simetrik formdur.

Şimdi $L_3\varphi$ fonksiyonelinin lineer olduğunu gösterelim. $L_1\varphi$ ve $L_2\varphi$ fonksiyonelleri lineer olduğundan her $\beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ ve her $\varphi_1,\varphi_2 \in H_0^1(0,l)$ için

$$L_3\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)=L_1\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)+L_2\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)$$
$$=\beta_1L_1\varphi_1+\beta_2L_1\varphi_2+\beta_1L_2\varphi_1+\beta_2L_2\varphi_2$$

yazılır. Buradan

$$L_3\left(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2\right)=\beta_1L_3\varphi_1+\beta_2L_3\varphi_2$$

olup, $L_3\varphi$ fonksiyonelinin lineer olduğu görülür.

Şimdi (3.2.1.39) ile tanılanan $L_3\varphi$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim. Her $\varphi\in H_0^1\left(0,l\right)$ için

$$L_3\varphi=L_1\varphi+L_2\varphi$$

olup, (3.2.1.15) ve (3.2.1.30) ifadelerinden

$$\left|L_3\varphi\right|\le c_7\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}+c_{12}\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}$$

elde edilir. O halde $c_{15}=\max\left\{c_7,c_{12}\right\}$ için

$$\left|L_3\varphi\right|\le c_{15}\left\|\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.1.44}$$

yazılır. Bu eşitsizlik $L_3\varphi$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterir.

$J_\alpha^3\left(\varphi\right)$ fonksiyoneli için $\left\{\varphi_n\right\}\in\Phi_{ad}$ bir minimalleştirici dizi olsun. Yani $n\to\infty$ için

$$J_\alpha^3(\varphi_n) \to \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^3(\varphi) \qquad (3.2.1.45)$$

yakınsaması geçerli olsun. $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyoneli koersiv ve $L_3\varphi$ fonksiyoneli sürekli olduğundan, yani (3.2.1.42) ve (3.2.1.44) eşitsizliklerinden aşağıdaki ifade yazılır:

$$J_\alpha^3(\varphi) \geq \alpha\|\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)} - 2c_{15}\|\varphi\|_{H_0^1(0,l)} \qquad (3.2.1.46)$$

(3.2.1.45) ve (3.2.1.46) birlikte değerlendirilirse c_{16} keyfi bir sabit olmak üzere

$$\|\varphi_n\|_{H_0^1(0,l)} \leq c_{16}$$

olur.

O halde $\{\varphi_n\}$ dizisinin $H_0^1(0,l)$ uzayında w elemanına zayıf yakınsayan bir $\{\varphi_\mu\}$ alt dizisi mevcuttur. Φ_{ad} kapalı ve konveks olduğundan zayıf kapalıdır. Bu durumda

$$w \in \Phi_{ad} \qquad (3.2.1.47)$$

olur. Ayrıca $\varphi \to \pi_3(\varphi,\varphi)$ dönüşümü aşağıdan zayıf yarı sürekli ve $\varphi \to L_3\varphi$ dönüşümü zayıf süreklidir. Sonuç olarak $\varphi \to J_\alpha^3(\varphi)$ dönüşümü aşağıdan zayıf yarı süreklidir. O halde aşağıdan zayıf yarı süreklilik tanımı gereği

$$\liminf J_\alpha^3(\varphi_\mu) \geq J_\alpha^3(w)$$

yazılır. Bu durumda (3.2.1.45) ve (3.2.1.47) ifadelerinden

$$J_\alpha^3(w) \le \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^3(\varphi)$$

bulunur ve $J_\alpha^3(w) = \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^3(\varphi)$ olması gerektiği görülür. Böylece optimal kontrolün varlığı gösterilmiş olur.

Şimdi optimal çözümün tekliğini ispatlayalım. Önce $\varphi \to \pi_3(\varphi,\varphi)$ dönüşümü kesin konveks olduğundan $\varphi \to J_\alpha^3(\varphi)$ dönüşümünün de kesin konveks olduğunu gösterelim.

Önce $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğunu gösterelim. $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin tanımı gereği her $\varphi_1,\varphi_2 \in \Phi_{ad}$ için

$$\begin{aligned}\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right) &= \int_0^l \left[u_t\left(x,T;\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)-u_t(x,T;0)\right]^2 dx \\ &+\int_0^l \left[u_x\left(x,T;\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)-u_x(x,T;0)\right]^2 dx \\ &+\alpha\int_0^l \left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)_x^2 dx\end{aligned}$$

yazılır. Bu ifadede (3.2.1.19) ve (3.2.1.34) özdeşlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right) \\ &=\int_0^l \left[\beta\left(u_t(x,T;\varphi_1)-u_t(x,T;0)\right)+(1-\beta)\left(u_t(x,T;\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right)\right]^2 dx \\ &+\int_0^l \left[\beta\left(u_x(x,T;\varphi_1)-u_x(x,T;0)\right)+(1-\beta)\left(u_x(x,T;\varphi_2)-u_x(x,T;0)\right)\right]^2 dx \\ &+\alpha\int_0^l \left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)_x^2 dx\end{aligned} \tag{3.2.1.48}$$

olur. O halde basit işlemlerle

$$
\begin{aligned}
&\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&=\beta^2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)^2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+2\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]dx\\
&+\beta^2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)^2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+2\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]dx\\
&+\alpha\int_0^l\left[\beta^2\left(\varphi_1\right)_x^2+(1-\beta)^2\left(\varphi_2\right)_x^2+2\beta(1-\beta)\left(\varphi_1\right)_x\left(\varphi_2\right)_x\right]dx
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\varepsilon-$Cauchy eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]\\
&\leq\frac{\varepsilon}{2}\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]\\
&\leq\frac{\varepsilon}{2}\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2
\end{aligned}
$$

ve

$$
\left(\varphi_1\right)_x\left(\varphi_2\right)_x\leq\frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_1\right)_x^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left(\varphi_2\right)_x^2
$$

yazılır. Bu eşitsizliklerde $\varepsilon=1$ alınarak, $\varphi_1\neq\varphi_2$ için yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&<\beta^2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)^2\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+\beta^2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)^2\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx+\beta(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\\
&+\alpha\int_0^l\left[\beta^2\left(\varphi_1\right)_x^2+(1-\beta)^2\left(\varphi_2\right)_x^2+\beta(1-\beta)\left(\varphi_1\right)_x^2+\beta(1-\beta)\left(\varphi_2\right)_x^2\right]dx
\end{aligned}
$$

elde edilir.

O halde

$$
\begin{aligned}
&\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&<\beta\left\{\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_1\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\right\}\\
&+(1-\beta)\left\{\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi_2\right)-u_t\left(x,T;0\right)\right]^2dx+\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx\right\}\\
&+\alpha\int_0^l\left[\beta\left(\varphi_1\right)_x^2+(1-\beta)\left(\varphi_2\right)_x^2\right]dx
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)<\beta\pi_3\left(\varphi_1,\varphi_1\right)+(1-\beta)\pi_3\left(\varphi_2,\varphi_2\right) \quad (3.2.1.49)
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğu görülür.

Şimdi de $L_3\varphi$ fonksiyonelinin konveks olduğunu gösterelim. $L_3\varphi$ fonksiyonelinin tanımı ve (3.2.1.22) ile (3.2.1.37) göz önüne alınırsa her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{ad}$ için

$$\begin{aligned} L_3\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) &= L_1\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) + L_2\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) \\ &= \beta L_1(\varphi_1) + (1-\beta)L_1(\varphi_2) + \beta L_2(\varphi_1) + (1-\beta)L_2(\varphi_2) \\ &= \beta\left(L_1(\varphi_1) + L_2(\varphi_1)\right) + (1-\beta)\left(L_1(\varphi_2) + L_2(\varphi_2)\right) \end{aligned}$$

olup,

$$L_3\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) = \beta L_3(\varphi_1) + (1-\beta)L_3(\varphi_2) \tag{3.2.1.50}$$

elde edilir. Bu ifade ile $L_3\varphi$ fonksiyonelinin konveks olduğu görülür.

Şimdi $J_\alpha^3(\varphi)$ fonksiyoneline dönelim. Her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{ad}$ ve her $\beta \in (0,1)$ için

$$J_\alpha^3\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) = \pi_3\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2, \beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) - 2L_3\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) + b_3$$

yazılır. Burada (3.2.1.49) ve (3.2.1.50) değerlendirmeleri göz önüne alınırsa $\varphi_1 \neq \varphi_2$ için

$$\begin{aligned} J_\alpha^3\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) &< \beta\pi_3(\varphi_1, \varphi_1) + (1-\beta)\pi_3(\varphi_2, \varphi_2) - 2\left(\beta L_3\varphi_1 + (1-\beta)L_3\varphi_2\right) + b_3 \\ &< \beta\left\{\pi_3(\varphi_1, \varphi_1) - 2L_3\varphi_1 + b_3\right\} + (1-\beta)\left\{\pi_3(\varphi_2, \varphi_2) - 2L_3\varphi_2 + b_3\right\} \end{aligned}$$

olup,

$$J_\alpha^3\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) < \beta J_\alpha^3(\varphi_1) + (1-\beta)J_\alpha^3(\varphi_2)$$

bulunur. O halde $J_\alpha^3(\varphi)$ fonksiyoneli kesin konvekstir.

Şimdi φ_1 ve φ_2,

$$J_\alpha^3(\varphi_1) = J_\alpha^3(\varphi_2) = \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^3(\varphi)$$

şartını sağlayan iki eleman olsun. Φ_{ad} kümesi konveks olduğundan

$$\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \in \Phi_{ad}$$

yazılır.

Ayrıca $J_\alpha^3(\varphi)$ fonksiyoneli kesin konveks olduğundan $\varphi_1 \neq \varphi_2$ için

$$J_\alpha^3\left(\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)\right) < \operatorname*{Inf}_{\varphi\in\Phi_{ad}} J_\alpha^3(\varphi)$$

olur. Bu ifade bir çelişki oluşturmaktadır. O halde $\varphi_1 = \varphi_2$ olmak zorundadır yani minimum eleman tektir. Böylece Teorem 3.2.1.5 ispatlanmış olur.

3.2.2. Optimallik için gerek şart

Problemlerimiz için gerekli olan optimallik şartlarını çıkarırken Teorem 2.1 ile verilen ifadeyi kullanacağız (Vasilyev 1981).

Bunun için amaç fonksiyonellerinin türevlerine ihtiyaç duyulur. Amaç fonksiyonellerinin Frechet türevleri ise eşlenik problem yardımıyla elde edilir.

Şimdi sırasıyla her bir optimal kontrol problemimiz için optimallik şartını ortaya çıkaralım.

İlk olarak (3.1.4) amaç fonksiyonelinin Frechet türevini elde edelim. Bunun için öncelikle (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol probleminin eşlenik problemini belirleyelim.

Lagrange fonksiyoneli,

$$\begin{aligned} L_1(u,\varphi,z) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - y_1(x)\right]^2 dx + \alpha\int_0^l \varphi_x^2 dx \\ &+ \int_0^T\int_0^l \left[u_{tt} - a^2 u_{xx} - F(x,t)\right] z_t\,dxdt \end{aligned} \tag{3.2.2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi u çözümüne

$$\delta u(x,0)=0,\ \delta u_t(x,0)=0,\ \delta u(0,t)=0 \text{ ve } \delta u(l,t)=0$$

olacak şekilde δu artımını verelim.

O halde

$$\begin{aligned}
L_1\left(u+\varepsilon\delta u,\varphi,z\right)-L_1\left(u,\varphi,z\right)=&\int_0^l\left[\left(u+\varepsilon\delta u\right)_t\left(x,T;\varphi\right)-y_1\left(x\right)\right]^2dx+\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx\\
&+\int_0^T\int_0^l\left[\left(u+\varepsilon\delta u\right)_{tt}-a^2\left(u+\varepsilon\delta u\right)_{xx}-F\left(x,t\right)\right]z_t dxdt\\
&-\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi\right)-y_1\left(x\right)\right]^2dx-\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx\\
&-\int_0^T\int_0^l\left[u_{tt}-a^2u_{xx}-F\left(x,t\right)\right]z_t dxdt
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadede iki kare farkından yararlanarak,

$$\begin{aligned}
L_1\left(u+\varepsilon\delta u,\varphi,z\right)-L_1\left(u,\varphi,z\right)=&\int_0^l\left[2u_t\left(x,T;\varphi\right)-2y_1\left(x\right)+\varepsilon\delta u_t\left(x,T\right)\right]\varepsilon\delta u_t\left(x,T\right)dx\\
&+\int_0^T\int_0^l\left[\delta u_{tt}-a^2\delta u_{xx}\right]\varepsilon z_t dxdt
\end{aligned}$$

yazılır.

Lagrange fonksiyonelinin birinci varyasyonunun,

$$\delta L_1=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L_1\left(u+\varepsilon\delta u,\varphi,z\right)-L_1\left(u,\varphi,z\right)}{\varepsilon}$$

şeklinde olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned}
\delta L_1=&\int_0^l\left[2u_t\left(x,T;\varphi\right)-2y_1\left(x\right)\right]\delta u_t\left(x,T\right)dx\\
&+\int_0^T\int_0^l\left[\delta u_{tt}-a^2\delta u_{xx}\right]z_t dxdt
\end{aligned}\tag{3.2.2.2}$$

elde edilir.

(3.2.2.2) ifadesinde sağ tarafta yer alan ikinci integralde bazı düzenlemeler yapalım.

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{tt} z_t dxdt = \int_0^l \left\{ z_t \delta u_t \Big|_0^T - \int_0^T z_{tt} \delta u_t dt \right\} dx$$
$$= \int_0^l \left\{ z_t\left(x,T\right)\delta u_t\left(x,T\right) - z_t\left(x,0\right)\delta u_t\left(x,0\right)\right\} dx - \int_0^T\int_0^l z_{tt}\delta u_t dxdt$$

olup, burada $\delta u_t\left(x,0\right)=0$ şartı kullanılırsa

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{tt} z_t dxdt = \int_0^l z_t\left(x,T\right)\delta u_t\left(x,T\right)dx - \int_0^T\int_0^l z_{tt}\delta u_t dxdt \qquad (3.2.2.3)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{xx} z_t dxdt = \int_0^T \left\{ z_t \delta u_x \Big|_0^l - \int_0^l z_{tx} \delta u_x dx \right\} dt$$
$$= \int_0^T \left\{ z_t\left(l,t\right)\delta u_x\left(l,t\right) - z_t\left(0,t\right)\delta u_x\left(0,t\right)\right\} dt - \int_0^T\int_0^l z_{tx}\delta u_x dxdt$$
$$= \int_0^T \left\{ z_t\left(l,t\right)\delta u_x\left(l,t\right) - z_t\left(0,t\right)\delta u_x\left(0,t\right)\right\} dt - \int_0^l z_x\left(x,T\right)\delta u_x\left(x,T\right)dx$$
$$+\int_0^l z_x\left(x,0\right)\delta u_x\left(x,0\right)dx + \int_0^T\int_0^l z_x\delta u_{xt} dxdt$$

bulunur.

Burada yeniden kısmi integrasyon uygulanıp, $\delta u\left(x,0\right)=0$ ise $\delta u_x\left(x,0\right)=0$ olduğu kullanılarak,

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{xx} z_t dxdt = \int_0^T \left\{ z_t\left(l,t\right)\delta u_x\left(l,t\right) - z_t\left(0,t\right)\delta u_x\left(0,t\right)\right\} dt - \int_0^l z_x\left(x,T\right)\delta u_x\left(x,T\right)dx$$
$$+\int_0^T z_x\left(l,t\right)\delta u_t\left(l,t\right)dt - \int_0^T z_x\left(0,t\right)\delta u_t\left(0,t\right)dt - \int_0^T\int_0^l z_{xx}\delta u_t dxdt$$

bulunur. Buradan $\delta u_t(0,t)=\delta u_t(l,t)=0$ olduğundan

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{xx} z_t dxdt=\int_0^T z_t(l,t)\delta u_x(l,t)dt-\int_0^T z_t(0,t)\delta u_x(0,t)dt$$
$$-\int_0^l z_x(x,T)\delta u_x(x,T)dx-\int_0^T\int_0^l z_{xx}\delta u_t dxdt \tag{3.2.2.4}$$

elde edilir.

Şimdi (3.2.2.2) ifadesinde (3.2.2.3) ve (3.2.2.4) özdeşlikleri yerine yazılırsa

$$\delta L_1=\int_0^l\left[2u_t(x,T;\varphi)-2y_1(x)+z_t(x,T)\right]\delta u_t(x,T)dx$$
$$+a^2\int_0^l z_x(x,T)\delta u_x(x,T)dx+a^2\int_0^T z_t(0,t)\delta u_x(0,t)dt-a^2\int_0^T z_t(l,t)\delta u_x(l,t)dt$$
$$+\int_0^T\int_0^l\left(-z_{tt}+a^2 z_{xx}\right)\delta u_t dxdt$$

bulunur. Buradan $\delta L_1=0$ stasyonerlik şartından dolayı (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol problemi için $z\in H_0^1(\Omega)$ olmak üzere

$$z_{tt}-a^2 z_{xx}=0,\ (x,t)\in\Omega \tag{3.2.2.5}$$

$$z_x(x,T)=0,\ z_t(x,T)=-2\left[u_t(x,T;\varphi)-y_1(x)\right],\ x\in(0,l) \tag{3.2.2.6}$$

$$z(0,t)=0,\ z(l,t)=0,\ t\in(0,T] \tag{3.2.2.7}$$

eşlenik problemi elde edilir.

Şimdi $J_\alpha^1(\varphi)$ amaç fonksiyonelinin türevini elde edelim. Bunun için ilk olarak (3.2.1.5) fark denklemi z_t ile çarpılarak, Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^T\int_0^l \left(\Delta u_{tt} - a^2 \Delta u_{xx}\right) z_t dxdt = 0$$

olur. Yukarıdaki her iki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^l \left\{ z_t \Delta u_t \Big|_0^T - \int_0^T z_{tt} \Delta u_t dt \right\} dx - a^2 \int_0^T \left\{ z_t \Delta u_x \Big|_0^l - \int_0^l z_{tx} \Delta u_x dx \right\} dt = 0$$

olup,

$$\int_0^l z_t(x,T)\Delta u_t(x,T)\,dx - \int_0^l z_t(x,0)\Delta u_t(x,0)\,dx - \int_0^T\int_0^l z_{tt}\Delta u_t dxdt$$
$$- a^2 \int_0^T z_t(l,t)\Delta u_x(l,t)\,dt + a^2 \int_0^T z_t(0,t)\Delta u_x(0,t)\,dt + a^2 \int_0^T\int_0^l z_{xt}\Delta u_x dxdt = 0$$

yazılır. $z_t(0,t) = z_t(l,t) = 0$ ve $\Delta u_t(x,0) = 0$ şartları kullanılarak, son integralde tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^l z_t(x,T)\Delta u_t(x,T)\,dx - \int_0^T\int_0^l z_{tt}\Delta u_t dxdt + a^2 \int_0^l \left\{ z_x \Delta u_x \Big|_0^T - \int_0^T z_x \Delta u_{xt} dt \right\} dx = 0$$

olup,

$$\int_0^l z_t(x,T)\Delta u_t(x,T)\,dx - \int_0^T\int_0^l z_{tt}\Delta u_t dxdt + a^2\int_0^l z_x(x,T)\Delta u_x(x,T)\,dx$$
$$-a^2\int_0^l z_x(x,0)\Delta u_x(x,0)\,dx - a^2\int_0^T\int_0^l z_x\Delta u_{xt}dxdt = 0$$

elde edilir. Ayrıca $z_x(x,T)=0$ ve $\Delta u_x(x,0)=\Delta\varphi_x(x)$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned}&\int_0^l z_t(x,T)\Delta u_t(x,T)\,dx - \int_0^T\int_0^l z_{tt}\Delta u_t dxdt\\ &-a^2\int_0^l z_x(x,0)\Delta\varphi_x dx - a^2\int_0^T\int_0^l z_x\Delta u_{xt}dxdt = 0\end{aligned} \tag{3.2.2.8}$$

yazılır.

(3.2.2.5) denklemi Δu_t çarpıldıktan sonra Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^T\int_0^l \left(z_{tt}-a^2 z_{xx}\right)\Delta u_t dxdt = 0$$

yazılır. İkinci integralde kısmi integrasyon uygulandıktan sonra

$$\int_0^T\int_0^l z_{tt}\Delta u_t dxdt - a^2\int_0^T\left\{ z_x\Delta u_t\Big|_0^l - \int_0^l z_x\Delta u_{tx}dx\right\}dt = 0$$

olup,

$$\int_0^T\int_0^l z_{tt}\Delta u_t dxdt - a^2\int_0^T z_x(l,t)\Delta u_t(l,t)\,dt + a^2\int_0^T z_x(0,t)\Delta u_t(0,t)\,dt + a^2\int_0^T\int_0^l z_x\Delta u_{tx}dxdt = 0$$

bulunur. Fark probleminin (3.2.1.7) sınır şartları kullanılarak

$$\int_0^T\int_0^l z_{tt}\Delta u_t dxdt + a^2\int_0^T\int_0^l z_x \Delta u_{tx} dxdt = 0 \qquad (3.2.2.9)$$

yazılır.

(3.2.2.8) ve (3.2.2.9) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\int_0^l z_t(x,T)\Delta u_t(x,T)dx - a^2\int_0^l z_x(x,0)\Delta\varphi_x dx = 0$$

olduğu görülür. Bu denklemde eşlenik problemimizin (3.2.2.6) şartı kullanılarak,

$$\int_0^l 2\left[u_t(x,T;\varphi) - y_1(x)\right]\Delta u_t(x,T)dx = -a^2\int_0^l z_x(x,0)\Delta\varphi_x dx \qquad (3.2.2.10)$$

elde edilir.

φ elemanına $\Delta\varphi$ artımı verilirse $J_\alpha^1(\varphi)$ fonksiyonelindeki değişim

$$\Delta J_\alpha^1(\varphi) = J_\alpha^1(\varphi+\Delta\varphi) - J_\alpha^1(\varphi)$$

şeklinde olur.

O halde

$$\Delta J_\alpha^1(\varphi)=\int_0^l\left[u_t(x,T;\varphi+\Delta\varphi)-y_1(x)\right]^2dx+\alpha\int_0^l(\varphi+\Delta\varphi)_x^2\,dx$$
$$-\int_0^l\left[u_t(x,T;\varphi)-y_1(x)\right]^2dx-\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx$$

yazılır. Bu ifadede iki kare farkı uygulanarak, $\Delta u_t(x,T)=u_t(x,T;\varphi+\Delta\varphi)-u_t(x,T;\varphi)$ olduğundan

$$\Delta J_\alpha^1(\varphi)=\int_0^l\left[2u_t(x,T;\varphi)-2y_1(x)+\Delta u_t(x,T)\right]\Delta u_t(x,T)\,dx$$
$$+\alpha\int_0^l(2\varphi_x+\Delta\varphi_x)\Delta\varphi_x dx$$

veya

$$\Delta J_\alpha^1(\varphi)=\int_0^l\left[2u_t(x,T;\varphi)-2y_1(x)\right]\Delta u_t(x,T)\,dx+\int_0^l\left[\Delta u_t(x,T)\right]^2dx$$
$$+\alpha\int_0^l 2\varphi_x\Delta\varphi_x dx+\alpha\int_0^l\Delta\varphi_x^2dx$$

bulunur. Bu denklemde (3.2.2.10) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha^1(\varphi)&=\int_0^l\left[-a^2z_x(x,0)+2\alpha\varphi_x\right]\Delta\varphi_x dx\\&+\int_0^l\left[\Delta u_t(x,T)\right]^2dx+\alpha\int_0^l\Delta\varphi_x^2dx\end{aligned}\qquad(3.2.2.11)$$

elde edilir. O halde (3.2.1.9) ve (3.2.2.11) birlikte değerlendirilerek,

$$\Delta J_{\alpha}^{1}(\varphi)=\left\langle -a^{2}z(x,0)+2\alpha\varphi,\Delta\varphi\right\rangle_{H_0^1(0,l)}+o\left(\left\|\Delta\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}^{2}\right) \qquad (3.2.2.12)$$

yazılır.

O halde Frechet türevinin tanımı göz önüne alınarak, (3.2.2.12) ifadesine göre $J_{\alpha}^{1}(\varphi)$ amaç fonksiyonelinin Frechet türevi

$$\left(J_{\alpha}^{1}(\varphi)\right)'=-a^{2}z(x,0)+2\alpha\varphi \qquad (3.2.2.13)$$

şeklinde belirlenir.

(3.2.2.13) türevi Teorem 2.1 de yerine yazılırsa φ_1^* optimal çözüm ve z^* bu çözüme karşılık gelen eşlenik problemin çözümü olmak üzere, (3.1.1)-(3.1.4) problemi için geçerli olacak optimallik şartı, her $\varphi\in H_0^1(0,l)$ için

$$\left\langle -a^{2}z^{*}(x,0)+2\alpha\varphi_1^{*},\varphi-\varphi_1^{*}\right\rangle_{H_0^1(0,l)}\geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanması şeklinde elde edilir (Vasilyev 1981).

Benzer adımları kullanarak, (3.1.1)-(3.1.3) hiperbolik probleminde $J_{\alpha}^{2}(\varphi)$ amaç fonksiyonelini minimum yapacak olan başlangıç kontrolü için optimallik şartını belirleyelim. Bunun için (3.1.5) amaç fonksiyonelinin Frechet türevini elde edelim. Öncelikle Frechet türevini elde etmek için bu optimal kontrol problemine karşılık gelen eşlenik problemi oluşturalım.

Lagrange fonksiyoneli,

$$L_2(u,\varphi,p)=\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi)-y_2(x)\right]^2dx+\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx$$
$$+\int_0^T\int_0^l\left[u_{tt}-a^2u_{xx}-F(x,t)\right]p_t dxdt$$

şeklinde tanımlanır. u çözümüne

$$\delta u(x,0)=0,\ \delta u_t(x,0)=0,\ \delta u(0,t)=0\ \text{ve}\ \delta u(l,t)=0$$

olacak şekilde δu artımını verelim. O halde

$$L_2(u+\varepsilon\delta u,\varphi,p)-L_2(u,\varphi,p)=\int_0^l\left[(u+\varepsilon\delta u)_x(x,T;\varphi)-y_2(x)\right]^2dx\ +\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx$$
$$+\int_0^T\int_0^l\left[(u+\varepsilon\delta u)_{tt}-a^2(u+\varepsilon\delta u)_{xx}-F(x,t)\right]p_t dxdt$$
$$-\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi)-y_2(x)\right]^2dx-\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx$$
$$-\int_0^T\int_0^l\left[u_{tt}-a^2u_{xx}-F(x,t)\right]p_t dxdt$$

olur. Burada iki kare farkı uygulanırsa

$$L_2(u+\varepsilon\delta u,\varphi,p)-L_2(u,\varphi,p)=\int_0^l\left[2u_x(x,T;\varphi)-2y_2(x)+\varepsilon\delta u_x(x,T)\right]\varepsilon\delta u_x(x,T)dx$$
$$+\int_0^T\int_0^l\left[\delta u_{tt}-a^2\delta u_{xx}\right]\varepsilon p_t dxdt$$

bulunur.

O halde bu fonksiyonelin birinci varyasyonu,

$$\begin{aligned}\delta L_2 &= \int_0^l \left[2u_x\left(x,T;\varphi\right)-2y_2\left(x\right)\right]\delta u_x\left(x,T\right)dx \\ &+\int_0^T\int_0^l \left[\delta u_{tt}-a^2\delta u_{xx}\right]p_t dxdt\end{aligned} \tag{3.2.2.14}$$

şeklinde yazılır.

(3.2.2.14) ifadesinde, sağ taraftaki ikinci integralde bazı düzenlemeler yapalım.

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^l \delta u_{tt}\, p_t dxdt &= \int_0^l \left\{ p_t\delta u_t\Big|_0^T - \int_0^T p_{tt}\delta u_t dt\right\}dx \\ &= \int_0^l \left\{p_t\left(x,T\right)\delta u_t\left(x,T\right)-p_t\left(x,0\right)\delta u_t\left(x,0\right)\right\}dx - \int_0^T\int_0^l p_{tt}\delta u_t dxdt\end{aligned}$$

olup, burada $\delta u_t\left(x,0\right)=0$ olduğu kullanılırsa

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{tt}\, p_t dxdt = \int_0^l p_t\left(x,T\right)\delta u_t\left(x,T\right)dx - \int_0^T\int_0^l p_{tt}\delta u_t dxdt \tag{3.2.2.15}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{xx} p_t dxdt = \int_0^T \left\{ p_t \delta u_x \Big|_0^l - \int_0^l p_{tx} \delta u_x dx \right\} dt$$
$$= \int_0^T \left\{ p_t(l,t)\delta u_x(l,t) - p_t(0,t)\delta u_x(0,t) \right\} dt - \int_0^T\int_0^l p_{tx}\delta u_x dxdt$$
$$= \int_0^T \left\{ p_t(l,t)\delta u_x(l,t) - p_t(0,t)\delta u_x(0,t) \right\} dt - \int_0^l p_x(x,T)\delta u_x(x,T)dx$$
$$+ \int_0^l p_x(x,0)\delta u_x(x,0)dx + \int_0^T\int_0^l p_x \delta u_{xt} dxdt$$

yazılır. Burada yeniden kısmi integrasyon uygulanıp, $\delta u(x,0)=0$ ise $\delta u_x(x,0)=0$ olduğu kullanılarak,

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{xx} p_t dxdt = \int_0^T \left\{ p_t(l,t)\delta u_x(l,t) - p_t(0,t)\delta u_x(0,t) \right\} dt - \int_0^l p_x(x,T)\delta u_x(x,T)dx$$
$$+ \int_0^T p_x(l,t)\delta u_t(l,t)dt - \int_0^T p_x(0,t)\delta u_t(0,t)dt - \int_0^T\int_0^l p_{xx}\delta u_t dxdt$$

bulunur. Ayrıca $\delta u_t(0,t) = \delta u_t(l,t) = 0$ olduğundan

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{xx} p_t dxdt = \int_0^T p_t(l,t)\delta u_x(l,t)dt - \int_0^T p_t(0,t)\delta u_x(0,t)dt$$
$$- \int_0^l p_x(x,T)\delta u_x(x,T)dx - \int_0^T\int_0^l p_{xx}\delta u_t dxdt \qquad (3.2.2.16)$$

elde edilir.

Şimdi (3.2.2.14) ifadesinde, (3.2.2.15) ve (3.2.2.16) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\delta L_2=\int_0^l\left[2u_x\left(x,T;\varphi\right)-2y_2\left(x\right)+a^2p_x\left(x,T\right)\right]\delta u_x\left(x,T\right)dx$$
$$+\int_0^l p_t\left(x,T\right)\delta u_t\left(x,T\right)dx-a^2\int_0^T p_t\left(l,t\right)\delta u_x\left(l,t\right)dt+a^2\int_0^T p_t\left(0,t\right)\delta u_x\left(0,t\right)dt$$
$$+\int_0^T\int_0^l\left(-p_{tt}+a^2p_{xx}\right)\delta u_t dxdt$$

bulunur. $\delta L_2=0$ stasyonerlik şartından, $p\in H_0^1\left(\Omega\right)$ olmak üzere

$$p_{tt}-a^2p_{xx}=0,\ \left(x,t\right)\in\Omega \tag{3.2.2.17}$$

$$p_x\left(x,T\right)=-\frac{2}{a^2}\left[u_x\left(x,T;\varphi\right)-y_2\left(x\right)\right],\ p_t\left(x,T\right)=0,\ x\in\left(0,l\right) \tag{3.2.2.18}$$

$$p\left(0,t\right)=0,\ p\left(l,t\right)=0,\ t\in\left(0,T\right] \tag{3.2.2.19}$$

eşlenik problemi elde edilir.

Şimdi $J_\alpha^2\left(\varphi\right)$ amaç fonksiyonelinin türevini elde edelim. Bunun için ilk olarak (3.2.1.5) fark denklemi p_t ile çarpılarak, Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^T\int_0^l\left(\Delta u_{tt}-a^2\Delta u_{xx}\right)p_t dxdt=0$$

olur. Yukarıdaki her iki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^l\left\{p_t\Delta u_t\Big|_0^T-\int_0^T p_{tt}\Delta u_t dt\right\}dx-a^2\int_0^T\left\{p_t\Delta u_x\Big|_0^l-\int_0^l p_{tx}\Delta u_x dx\right\}dt=0$$

olup,

$$\int_0^l p_t(x,T)\Delta u_t(x,T)\,dx-\int_0^l p_t(x,0)\Delta u_t(x,0)\,dx-\int_0^T\int_0^l p_{tt}\Delta u_t dxdt$$
$$-a^2\int_0^T p_t(l,t)\Delta u_x(l,t)\,dt+a^2\int_0^T p_t(0,t)\Delta u_x(0,t)\,dt+a^2\int_0^T\int_0^l p_{xt}\Delta u_x dxdt=0$$

yazılır. $p_t(x,T)=0$, $p_t(0,t)=0$, $p_t(l,t)=0$ ve $\Delta u_t(x,0)=0$ şartları kullanılarak, son integrale tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa $\Delta u_x(x,0)=\Delta\varphi_x(x)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\int_0^l p_{tt}\Delta u_t dxdt+a^2\int_0^l p_x(x,T)\Delta u_x(x,T)\,dx\\&-a^2\int_0^l p_x(x,0)\Delta\varphi_x dx-a^2\int_0^T\int_0^l p_x\Delta u_{xt}dxdt=0\end{aligned} \tag{3.2.2.20}$$

bulunur.

(3.2.2.17) denklemi Δu_t çarpıldıktan sonra Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^T\int_0^l\left(p_{tt}-a^2p_{xx}\right)\Delta u_t dxdt=0$$

yazılır. Buradan kısmi integrasyon ile

$$\int_0^T\int_0^l p_{tt}\Delta u_t dxdt-a^2\int_0^T\left\{p_x\Delta u_t\big|_0^l-\int_0^l p_x\Delta u_{tx}dx\right\}dt=0$$

yazılır. O halde

$$\int_0^T\int_0^l p_{tt}\Delta u_t dxdt - a^2\int_0^T p_x\left(l,t\right)\Delta u_t\left(l,t\right)dt + a^2\int_0^T p_x\left(0,t\right)\Delta u_t\left(0,t\right)dt + a^2\int_0^T\int_0^l p_x\Delta u_{tx}dxdt = 0$$

elde edilir. Fark probleminin (3.2.1.7) sınır şartları kullanılarak,

$$\int_0^T\int_0^l p_{tt}\Delta u_t dxdt + a^2\int_0^T\int_0^l p_x\Delta u_{tx}dxdt = 0 \qquad (3.2.2.21)$$

bulunur.

(3.2.2.20) ve (3.2.2.21) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$a^2\int_0^l p_x\left(x,T\right)\Delta u_x\left(x,T\right)dx - a^2\int_0^l p_x\left(x,0\right)\Delta\varphi_x dx = 0$$

olduğu görülür. Bu denklemde (3.2.2.18) şartı kullanılarak,

$$\int_0^l 2\left[u_x\left(x,T;\varphi\right) - y_2\left(x\right)\right]\Delta u_x\left(x,T\right)dx = -a^2\int_0^l p_x\left(x,0\right)\Delta\varphi_x dx \qquad (3.2.2.22)$$

elde edilir.

φ elemanına $\Delta\varphi$ artımı verilirse $J_\alpha^2\left(\varphi\right)$ fonksiyonelindeki değişim

$$\Delta J_\alpha^2\left(\varphi\right) = J_\alpha^2\left(\varphi+\Delta\varphi\right) - J_\alpha^2\left(\varphi\right)$$

şeklinde olur. Buna göre

$$\Delta J_\alpha^2(\varphi)=\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi+\Delta\varphi)-y_2(x)\right]^2dx+\alpha\int_0^l(\varphi+\Delta\varphi)_x^2\,dx$$
$$-\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi)-y_2(x)\right]^2dx-\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx$$

yazılır. O halde iki kare farkı uygulanırsa $\Delta u_x(x,T)=u_x(x,T;\varphi+\Delta\varphi)-u_x(x,T;\varphi)$ olmak üzere

$$\Delta J_\alpha^2(\varphi)=\int_0^l\left[2u_x(x,T;\varphi)-2y_2(x)\right]\Delta u_x(x,T)\,dx+\int_0^l\left[\Delta u_x(x,T)\right]^2dx$$
$$+\alpha\int_0^l(2\varphi_x+\Delta\varphi_x)\Delta\varphi_x dx$$

bulunur. Bu denklemde (3.2.2.22) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha^2(\varphi)&=\int_0^l\left[-a^2p_x(x,0)+2\alpha\varphi_x\right]\Delta\varphi_x dx\\&+\int_0^l\left[\Delta u_x(x,T)\right]^2dx+\alpha\int_0^l\Delta\varphi_x^2dx\end{aligned}\qquad(3.2.2.23)$$

elde edilir. O halde (3.2.1.28) ve (3.2.2.23) birlikte değerlendirilerek

$$\Delta J_\alpha^2(\varphi)=\left\langle -a^2p(x,0)+2\alpha\varphi,\Delta\varphi\right\rangle_{H_0^1(0,l)}+o\left(\|\Delta\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)}\right)\qquad(3.2.2.24)$$

yazılır.

Frechet türevinin tanımı ve (3.2.2.24) değerlendirmesine göre $J_\alpha^2(\varphi)$ amaç fonksiyonelinin Frechet türevi

$$\left(J_\alpha^2(\varphi)\right)' = -a^2 p(x,0) + 2\alpha\varphi \tag{3.2.2.25}$$

şeklinde olur.

(3.2.2.25) türevi Teorem 2.1 de yerine yazılırsa φ_2^* optimal çözüm ve p^* bu çözüme karşılık gelen eşlenik problemin çözümü olmak üzere, (3.1.1)-(3.1.1) hiperbolik probleminde (3.1.5) amaç fonksiyonelini minimum yapacak başlangıç fonksiyonu için geçerli olacak optimallik şartı, her $\varphi \in H_0^1(0,l)$ için

$$\left\langle -a^2 p^*(x,0) + 2\alpha\varphi_2^*, \varphi - \varphi_2^* \right\rangle_{H_0^1(0,l)} \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanması şeklinde elde edilir (Vasilyev 1981).

Şimdi (3.1.1)-(3.1.3) hiperbolik probleminde $J_\alpha^3(\varphi)$ amaç fonksiyonelini minimum yapma problemi için gerekli optimallik şartını oluşturalım. Öncelikle eşlenik problemi belirleyerek, bu problem yardımıyla amaç fonksiyonelinin Frechet türevini elde edelim.

Lagrange fonksiyoneli,

$$\begin{aligned} L_3(u,\varphi,s) &= \int_0^l \left[u_t(x,T;\varphi) - y_1(x)\right]^2 dx + \int_0^l \left[u_x(x,T;\varphi) - y_2(x)\right]^2 dx \\ &\quad + \alpha\int_0^l \varphi_x^2 dx + \int_0^T\int_0^l \left[u_{tt} - a^2 u_{xx} - F(x,t)\right] s_t\, dx dt \end{aligned} \tag{3.2.2.26}$$

şeklinde tanımlanır. u çözümüne

$$\delta u(x,0) = 0,\ \delta u_t(x,0) = 0,\ \delta u(0,t) = 0 \text{ ve } \delta u(l,t) = 0$$

olacak şekilde δu artımını verelim. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
L_3\left(u+\varepsilon\delta u,\varphi,s\right)-L_3\left(u,\varphi,s\right)=&\int_0^l\left[\left(u+\varepsilon\delta u\right)_t\left(x,T;\varphi\right)-y_1\left(x\right)\right]^2dx\\
&+\int_0^l\left[\left(u+\varepsilon\delta u\right)_x\left(x,T;\varphi\right)-y_2\left(x\right)\right]^2dx+\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx\\
&+\int_0^T\int_0^l\left[\left(u+\varepsilon\delta u\right)_{tt}-a^2\left(u+\varepsilon\delta u\right)_{xx}-F\left(x,t\right)\right]s_t\,dxdt\\
&-\int_0^l\left[u_t\left(x,T;\varphi\right)-y_1\left(x\right)\right]^2dx-\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi\right)-y_2\left(x\right)\right]^2dx\\
&-\alpha\int_0^l\varphi_x^2dx-\int_0^T\int_0^l\left[u_{tt}-a^2u_{xx}-F\left(x,t\right)\right]s_t\,dxdt
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
L_3\left(u+\varepsilon\delta u,\varphi,s\right)-L_3\left(u,\varphi,s\right)=&\int_0^l\left[2u_t\left(x,T;\varphi\right)-2y_1\left(x\right)+\varepsilon\delta u_t\left(x,T\right)\right]\varepsilon\delta u_t\left(x,T\right)dx\\
&+\int_0^l\left[2u_x\left(x,T;\varphi\right)-2y_2\left(x\right)+\varepsilon\delta u_x\left(x,T\right)\right]\varepsilon\delta u_x\left(x,T\right)dx\\
&+\int_0^T\int_0^l\left[\delta u_{tt}-a^2\delta u_{xx}\right]\varepsilon s_t\,dxdt
\end{aligned}
$$

yazılır. Bu fonksiyonelin birinci varyasyonu,

$$
\begin{aligned}
\delta L_3=&\int_0^l\left[2u_t\left(x,T;\varphi\right)-2y_1\left(x\right)\right]\delta u_t\left(x,T\right)dx\\
&+\int_0^l\left[2u_x\left(x,T;\varphi\right)-2y_2\left(x\right)\right]\delta u_x\left(x,T\right)dx\\
&+\int_0^T\int_0^l\left[\delta u_{tt}-a^2\delta u_{xx}\right]s_t\,dxdt
\end{aligned}
\tag{3.2.2.27}
$$

şeklinde yazılır.

(3.2.2.27) ifadesinde son integralde bazı düzenlemeler yapalım.

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{tt} s_t dxdt = \int_0^l \left\{ s_t \delta u_t \Big|_0^T - \int_0^T s_{tt}\delta u_t dt \right\} dx$$
$$= \int_0^l \left\{ s_t\left(x,T\right)\delta u_t\left(x,T\right) - s_t\left(x,0\right)\delta u_t\left(x,0\right)\right\} dx - \int_0^T\int_0^l s_{tt}\delta u_t dxdt$$

olup, burada $\delta u_t\left(x,0\right)=0$ olduğu kullanılırsa

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{tt} s_t dxdt = \int_0^l s_t\left(x,T\right)\delta u_t\left(x,T\right)dx - \int_0^T\int_0^l s_{tt}\delta u_t dxdt \qquad (3.2.2.28)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{xx} s_t dxdt = \int_0^T \left\{ s_t \delta u_x \Big|_0^l - \int_0^l s_{tx}\delta u_x dx \right\} dt$$
$$= \int_0^T \left\{ s_t\left(l,t\right)\delta u_x\left(l,t\right) - s_t\left(0,t\right)\delta u_x\left(0,t\right)\right\} dt - \int_0^T\int_0^l s_{tx}\delta u_x dxdt$$
$$= \int_0^T \left\{ s_t\left(l,t\right)\delta u_x\left(l,t\right) - s_t\left(0,t\right)\delta u_x\left(0,t\right)\right\} dt - \int_0^l s_x\left(x,T\right)\delta u_x\left(x,T\right)dx$$
$$+ \int_0^l s_x\left(x,0\right)\delta u_x\left(x,0\right)dx + \int_0^T\int_0^l s_x \delta u_{xt} dxdt$$

yazılır. Burada yeniden kısmi integrasyon uygulanır ve $\delta u_x\left(x,0\right)=0$, $\delta u_t\left(0,t\right)=\delta u_t\left(l,t\right)=0$ şartları kullanılırsa

$$\int_0^T\int_0^l \delta u_{xx} s_t\,dxdt = \int_0^T s_t(l,t)\,\delta u_x(l,t)\,dt - \int_0^T s_t(0,t)\,\delta u_x(0,t)\,dt$$
$$-\int_0^l s_x(x,T)\,\delta u_x(x,T)\,dx - \int_0^T\int_0^l s_{xx}\delta u_t\,dxdt \tag{3.2.2.29}$$

elde edilir.

Eğer (3.2.2.27) ifadesinde, (3.2.2.28) ve (3.2.2.29) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\delta L_3 = \int_0^l \left[2u_t(x,T;\varphi) - 2y_1(x) + s_t(x,T)\right]\delta u_t(x,T)\,dx$$
$$+\int_0^l \left[2u_x(x,T;\varphi) - 2y_2(x) + a^2 s_x(x,T)\right]\delta u_x(x,T)\,dx$$
$$+a^2\int_0^T s_t(0,t)\,\delta u_x(0,t)\,dt - a^2\int_0^T s_t(l,t)\,\delta u_x(l,t)\,dt + \int_0^T\int_0^l \left(-s_{tt} + a^2 s_{xx}\right)\delta u_t\,dxdt$$

yazılır.

$\delta L_3 = 0$ stasyonerlik şartından, $s \in H_0^1(\Omega)$ olmak üzere

$$s_{tt} - a^2 s_{xx} = 0,\ (x,t)\in\Omega \tag{3.2.2.30}$$

$$s_t(x,T) = -2\left[u_t(x,T;\varphi) - y_1(x)\right],\ x\in(0,l) \tag{3.2.2.31}$$

$$s_x(x,T) = -\frac{2}{a^2}\left[u_x(x,T;\varphi) - y_2(x)\right],\ x\in(0,l) \tag{3.2.2.32}$$

$$s(0,t) = 0,\ s(l,t) = 0,\ t\in(0,T] \tag{3.2.2.33}$$

eşlenik problemi elde edilir.

$J_\alpha^3(\varphi)$ amaç fonksiyonelinin türevini elde edelim. Bunun için ilk olarak (3.2.1.5) fark denklemi s_t ile çarpılarak, Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^T\int_0^l \left(\Delta u_{tt} - a^2\Delta u_{xx}\right)s_t dxdt = 0$$

olur. Yukarıdaki her iki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^l \left\{ s_t\Delta u_t\Big|_0^T - \int_0^T s_{tt}\Delta u_t dt \right\} dx - a^2\int_0^T \left\{ s_t\Delta u_x\Big|_0^l - \int_0^l s_{tx}\Delta u_x dx \right\} dt = 0$$

olup,

$$\int_0^l s_t(x,T)\Delta u_t(x,T)dx - \int_0^l s_t(x,0)\Delta u_t(x,0)dx - \int_0^T\int_0^l s_{tt}\Delta u_t dxdt$$
$$-a^2\int_0^T s_t(l,t)\Delta u_x(l,t)dt + a^2\int_0^T s_t(0,t)\Delta u_x(0,t)dt + a^2\int_0^T\int_0^l s_{tx}\Delta u_x dxdt = 0$$

yazılır. $s_t(0,t) = s_t(l,t) = 0$ ve $\Delta u_t(x,0) = 0$ şartları kullanılarak, son integrale tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^l s_t(x,T)\Delta u_t(x,T)dx - \int_0^T\int_0^l s_{tt}\Delta u_t dxdt + a^2\int_0^l \left\{ s_x\Delta u_x\Big|_0^T - \int_0^T s_x\Delta u_{xt} dt \right\} dx = 0$$

elde edilir. Ayrıca $\Delta u_x(x,0) = \Delta\varphi_x(x)$ olduğu bilindiğinden

$$\int_0^l s_t(x,T)\Delta u_t(x,T)dx-\int_0^T\int_0^l s_{tt}\Delta u_t dxdt+a^2\int_0^l s_x(x,T)\Delta u_x(x,T)dx$$
$$-a^2\int_0^l s_x(x,0)\Delta\varphi_x dx-a^2\int_0^T\int_0^l s_x\Delta u_{xt}dxdt=0 \qquad (3.2.2.34)$$

yazılır.

(3.2.2.30) denklemi Δu_t çarpıldıktan sonra Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_0^T\int_0^l\left(s_{tt}-a^2s_{xx}\right)\Delta u_t dxdt=0$$

yazılır. İkinci integralde kısmi integrasyon uygulandıktan sonra

$$\int_0^T\int_0^l s_{tt}\Delta u_t dxdt-a^2\int_0^T s_x(l,t)\Delta u_t(l,t)dt+a^2\int_0^T s_x(0,t)\Delta u_t(0,t)dt+a^2\int_0^T\int_0^l s_x\Delta u_{tx}dxdt=0$$

bulunur. Fark probleminin (3.2.1.7) şartlarından dolayı $\Delta u_t(0,t)=\Delta u_t(l,t)=0$ olup,

$$\int_0^T\int_0^l s_{tt}\Delta u_t dxdt+a^2\int_0^T\int_0^l s_x\Delta u_{tx}dxdt=0 \qquad (3.2.2.35)$$

yazılır.

(3.2.2.34) ve (3.2.2.35) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\int_0^l s_t(x,T)\Delta u_t(x,T)dx+a^2\int_0^l s_x(x,T)\Delta u_x(x,T)dx-a^2\int_0^l s_x(x,0)\Delta\varphi_x dx=0$$

olur.

Yukarıdaki denklemde (3.2.2.31) ve (3.2.2.32) şartları kullanılarak,

$$\int_0^l 2\left[u_t(x,T;\varphi)-y_1(x)\right]\Delta u_t(x,T)\,dx + \int_0^l 2\left[u_x(x,T;\varphi)-y_2(x)\right]\Delta u_x(x,T)\,dx = -a^2\int_0^l s_x(x,0)\,\Delta\varphi_x\,dx \tag{3.2.2.36}$$

elde edilir.

φ elemanına verilen $\Delta\varphi$ artımı için $J_\alpha^3(\varphi)$ amaç fonksiyonelindeki değişim

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha^3(\varphi) &= J_\alpha^3(\varphi+\Delta\varphi)-J_\alpha^3(\varphi)\\ &= \int_0^l\left[u_t(x,T;\varphi+\Delta\varphi)-y_1(x)\right]^2dx+\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi+\Delta\varphi)-y_2(x)\right]^2dx\\ &+\alpha\int_0^l(\varphi+\Delta\varphi)_x^2\,dx-\int_0^l\left[u_t(x,T;\varphi)-y_1(x)\right]^2dx\\ &-\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi)-y_2(x)\right]^2dx-\alpha\int_0^l\varphi_x^2\,dx\end{aligned}$$

şeklindedir. İki kare farkı uygulanarak, $\Delta u(x,t)=u(x,t;\varphi+\Delta\varphi)-u(x,t;\varphi)$ için

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha^3(\varphi) &= \int_0^l\left[2u_t(x,T;\varphi)-2y_1(x)+\Delta u_t(x,T)\right]\Delta u_t(x,T)\,dx\\ &+\int_0^l\left[2u_x(x,T;\varphi)-2y_2(x)+\Delta u_x(x,T)\right]\Delta u_x(x,T)\,dx\\ &+\alpha\int_0^l(2\varphi_x+\Delta\varphi_x)\Delta\varphi_x\,dx\end{aligned}$$

bulunur.

Yukarıdaki denklemde (3.2.2.36) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha^3(\varphi) &= \int_0^l \left[-a^2 s_x(x,0) + 2\alpha\varphi_x\right]\Delta\varphi_x dx + \int_0^l \left[\Delta u_t(x,T)\right]^2 dx \\ &+ \int_0^l \left[\Delta u_x(x,T)\right]^2 dx + \alpha\int_0^l \Delta\varphi_x^2 dx\end{aligned} \tag{3.2.2.37}$$

elde edilir. O halde (3.2.1.9), (3.2.1.28) ve (3.2.2.37) birlikte değerlendirilerek,

$$\Delta J_\alpha^3(\varphi) = \left\langle -a^2 s(x,0) + 2\alpha\varphi, \Delta\varphi \right\rangle_{H_0^1(0,l)} + o\left(\left\|\Delta\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}^2\right) \tag{3.2.2.38}$$

yazılır.

O halde (3.2.2.38) değerlendirmesine göre $J_\alpha^3(\varphi)$ amaç fonksiyonelinin Frechet türevi

$$\left(J_\alpha^3(\varphi)\right)' = -a^2 s(x,0) + 2\alpha\varphi \tag{3.2.2.39}$$

şeklinde olur.

(3.2.2.39) türevi Teorem 2.1 de yerine yazılırsa φ_3^* optimal çözüm ve s^* bu çözüme karşılık gelen eşlenik problemin çözümü olmak üzere optimallik şartı, her $\varphi \in H_0^1(0,l)$ için

$$\left\langle -a^2 s^*(x,0) + 2\alpha\varphi_3^*, \varphi - \varphi_3^* \right\rangle_{H_0^1(0,l)} \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlanması şeklinde elde edilir (Vasilyev 1981).

3.2.3. Minimalleştirici dizi ve yakınsaklık hızı

Bu bölümde ele alınan optimal kontrol problemleri için minimalleştirici dizi kurulması aşamaları incelenmiştir.

Öncelikle φ_0 başlangıç elemanı seçilir ve aşağıdaki adımlar yardımıyla $k > 0$ için φ_k biliniyorken φ_{k+1} hesaplanır.

1. (3.1.1)-(3.1.3) hiperbolik probleminin (3.1.10) anlamındaki u_k çözümü bulunur.

2. Bulunan u_k çözümü kullanılarak, eşlenik problem çözülür.

3. Eşlenik problemin çözümü kullanılarak, $\left(J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)\right)'$, $i=1,2,3$ gradyeni elde edilir.

4. $$\varphi_{k+1}=\varphi_k-\beta_k\left(J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)\right)', \; i=1,2,3 \tag{3.2.3.1}$$

minimalleştirici dizisi kurulur ve

$$J_\alpha^i\left(\varphi_{k+1}\right)-J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)=\beta_k\left[-\left\|\left(J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)\right)'\right\|^2+\frac{o\left(\beta_k\right)}{\beta_k}\right]<0, \; i=1,2,3$$

şartını sağlayacak şekilde yeterince küçük $\beta_k > 0$ sayısı seçilir.

β_k sayısının seçiminde kullanabileceğimiz başka bir kural daha mevcuttur. Bir değişkenli

$$g_k(\beta) = J_\alpha^i\left(\varphi_k - \beta\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right),\ \ \beta \geq 0,\ i = 1,2,3$$

fonksiyonu tanımlanırsa, β_k sayısı bu fonksiyonun minimumu olarak alınır:

$$g_k(\beta_k) = \operatorname*{Inf}_{\beta \geq 0} g_k(\beta) \equiv g_{k^*},\ \ \beta_k > 0\,. \tag{3.2.3.2}$$

Bu iterasyonu durdurmak için aşağıdaki kriterlerden birisi seçilebilir;

$$\left\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\right\| < \varepsilon_1,\ \ \left|J_\alpha^i(\varphi_{k+1}) - J_\alpha^i(\varphi_k)\right| < \varepsilon_2,\ \ \left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\| < \varepsilon_3\,.$$

Şimdi bu minimalleştirici dizinin yakınsaklık hızına ait teoremlerde kullanacağımız amaç fonksiyonellerinin güçlü konvekslik sabitlerini ve bu fonksiyonellerin gradyenleri için Lipschitz sabitlerini veren aşağıdaki teoremleri yazabiliriz.

Teorem 3.2.3.1: (3.2.2.13) ile verilen $\left(J_\alpha^1(\varphi)\right)'$ gradyeni Lipschitz süreklidir, yani

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^1(\varphi)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)} \leq c_{17}\left\|\Delta\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)} \tag{3.2.3.3}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c_{17} = 2\left(2a^4 + 2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$ sabiti mevcuttur.

İspat: Öncelikle (3.2.2.5)-(3.2.2.7) problemi için fark problemini oluşturalım. Bunun için φ elemanına $\Delta\varphi$ artımını verelim ve $\varphi + \Delta\varphi$ elemanına karşılık gelen eşlenik problemin çözümünü $z_\Delta(x,t) = z(x,t;\varphi + \Delta\varphi)$ ile gösterelim. O halde

$$\left(z_\Delta\right)_{tt}-a^2\left(z_\Delta\right)_{xx}=0,\ \left(x,t\right)\in\Omega$$
$$\left(z_\Delta\right)_x\left(x,T\right)=0,\ \left(z_\Delta\right)_t\left(x,T\right)=-2\left[u_t\left(x,T;\varphi+\Delta\varphi\right)-y_1\left(x\right)\right],\ x\in\left(0,l\right)$$
$$z_\Delta\left(0,t\right)=0,\ z_\Delta\left(l,t\right)=0,\ t\in\left(0,T\right]$$

problemi yazılır. $\Delta z\left(x,t\right)=z\left(x,t;\varphi+\Delta\varphi\right)-z\left(x,t;\varphi\right)$ olmak üzere yukarıdaki problemden (3.2.2.5)-(3.2.2.7) problemini çıkardığımızda eşlenik problemimiz için

$$\Delta z_{tt}-a^2\Delta z_{xx}=0,\ \left(x,t\right)\in\Omega \tag{3.2.3.4}$$
$$\Delta z_x\left(x,T\right)=0,\ \Delta z_t\left(x,T\right)=-2\Delta u_t\left(x,T\right),\ x\in\left(0,l\right) \tag{3.2.3.5}$$
$$\Delta z\left(0,t\right)=0,\ \Delta z\left(l,t\right)=0,\ t\in\left(0,T\right] \tag{3.2.3.6}$$

şeklinde fark problemi elde edilir.

φ elemanına verilen $\Delta\varphi$ artımı için gradyenin değişimi

$$\begin{aligned}\left(\Delta J_\alpha^1\left(\varphi\right)\right)'&=\left(J_\alpha^1\left(\varphi+\Delta\varphi\right)\right)'-\left(J_\alpha^1\left(\varphi\right)\right)'\\&=-a^2z\left(x,0;\varphi+\Delta\varphi\right)+2\alpha\left(\varphi+\Delta\varphi\right)-\left[-a^2z\left(x,0;\varphi\right)+2\alpha\varphi\right]\\&=-a^2\Delta z\left(x,0\right)+2\alpha\Delta\varphi\end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu ifadenin normu

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^1\left(\varphi\right)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)}^2=\int_0^l\left(-a^2\Delta z_x\left(x,0\right)+2\alpha\Delta\varphi_x\right)^2dx$$

olup, burada $\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$ eşitsizliğinden yararlanılarak,

$$\left\| \left(\Delta J_\alpha^1 (\varphi) \right)' \right\|_{H_0^1(0,l)}^2 \leq 2a^4 \int_0^l \left[\Delta z_x (x,0) \right]^2 dx + 8\alpha^2 \int_0^l \Delta \varphi_x^2 dx \qquad (3.2.3.7)$$

elde edilir.

(3.2.3.4) denklemi Δz_t ile çarpıldıktan sonra $[0,l]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^l \left(\Delta z_{tt} - a^2 \Delta z_{xx} \right) \Delta z_t dx = 0$$

yazılır. Burada

$$-a^2 \Delta z_{xx} \Delta z_t = -a^2 \left(\Delta z_x \Delta z_t \right)_x + a^2 \Delta z_x \Delta z_{tx}$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\Delta z_t \Delta z_{tt} + a^2 \Delta z_x \Delta z_{tx} \right) dx &= a^2 \int_0^l \left(\Delta z_x \Delta z_t \right)_x dx \\ &= a^2 \Delta z_x \Delta z_t \Big|_0^l \\ &= a^2 \Delta z_x (l,t) \Delta z_t (l,t) - a^2 \Delta z_x (0,t) \Delta z_t (0,t) \end{aligned}$$

bulunur. (3.2.3.6) sınır şatları yardımıyla

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \left(\Delta z_t^2 + a^2 \Delta z_x^2 \right) dx = 0 \qquad (3.2.3.8)$$

elde edilir.

(3.2.3.8) denkleminin $\left[0,t\right]$ için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta z_t\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[\Delta z_x\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta z_t\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[\Delta z_x\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx\end{aligned}\tag{3.2.3.9}$$

olur.

(3.2.3.8) denkleminin $\left[t,T\right]$ için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta z_t\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[\Delta z_x\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta z_t\left(x,T\right)\right]^2+a^2\left[\Delta z_x\left(x,T\right)\right]^2\right\}dx\end{aligned}\tag{3.2.3.10}$$

bulunur.

(3.2.3.9) ve (3.2.3.10) denklemleri birlikte ele alınırsa

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta z_t\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[\Delta z_x\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta z_t\left(x,T\right)\right]^2+a^2\left[\Delta z_x\left(x,T\right)\right]^2\right\}dx$$

yazılır. Bu denklemde (3.2.3.5) şartları yerine yazılırsa

$$\int_0^l\left\{\left[\Delta z_t\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[\Delta z_x\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx=4\int_0^l\left[\Delta u_t\left(x,T\right)\right]^2dx$$

elde edilir. Bu denklemden (3.2.1.9) değerlendirmesi ile

$$\int_0^l \left[\Delta z_x(x,0)\right]^2 dx \le 4\|\Delta\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)} \qquad (3.2.3.11)$$

bulunur.

(3.2.3.7) ifadesinde (3.2.3.11) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^1(\varphi)\right)'\right\|^2_{H_0^1(0,l)} \le 8a^4\|\Delta\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)} + 8\alpha^2\|\Delta\varphi\|^2_{H_0^1(0,l)}$$

olup,

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^1(\varphi)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)} \le 2\left(2a^4 + 2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}\|\Delta\varphi\|_{H_0^1(0,l)}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.3.1 için ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3.2: (3.2.2.25) ile verilen $\left(J_\alpha^2(\varphi)\right)'$ gradyeni Lipschitz süreklidir, yani

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^2(\varphi)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)} \le c_{18}\|\Delta\varphi\|_{H_0^1(0,l)} \qquad (3.2.3.12)$$

olacak şekilde $c_{18} = 2\left(2 + 2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$ sabiti mevcuttur.

İspat: (3.2.2.17)-(3.2.2.19) eşlenik problemi için fark problemini oluşturalım. $p_\Delta(x,t) = p(x,t;\varphi + \Delta\varphi)$ olmak üzere

$$\left(p_\Delta\right)_{tt}-a^2\left(p_\Delta\right)_{xx}=0,\ \left(x,t\right)\in\Omega$$

$$\left(p_\Delta\right)_x\left(x,T\right)=-\frac{2}{a^2}\left[u_x\left(x,T;\varphi+\Delta\varphi\right)-y_2\left(x\right)\right],\ \left(p_\Delta\right)_t\left(x,T\right)=0,\ x\in\left(0,l\right)$$

$$p_\Delta\left(0,t\right)=0,\ p_\Delta\left(l,t\right)=0,\ t\in\left(0,T\right]$$

problemi yazılır. Bu problemden (3.2.2.17)-(3.2.2.19) eşlenik problemini çıkardığımızda $\Delta p\left(x,t\right)=p\left(x,t;\varphi+\Delta\varphi\right)-p\left(x,t;\varphi\right)$ için

$$\Delta p_{tt}-a^2\Delta p_{xx}=0,\ \left(x,t\right)\in\Omega \tag{3.2.3.13}$$

$$\Delta p_x\left(x,T\right)=-\frac{2}{a^2}\Delta u_x\left(x,T\right),\ \Delta p_t\left(x,T\right)=0,\ x\in\left(0,l\right) \tag{3.2.3.14}$$

$$\Delta p\left(0,t\right)=0,\ \Delta p\left(l,t\right)=0,\ t\in\left(0,T\right] \tag{3.2.3.15}$$

şeklinde fark problemi elde edilir.

φ elemanına verilen $\Delta\varphi$ artımı için fonksiyonelin gradyeninin değişimi

$$\begin{aligned}\left(\Delta J_\alpha^2\left(\varphi\right)\right)' &= \left(J_\alpha^2\left(\varphi+\Delta\varphi\right)\right)'-\left(J_\alpha^2\left(\varphi\right)\right)' \\ &= -a^2p\left(x,0;\varphi+\Delta\varphi\right)+2\alpha\left(\varphi+\Delta\varphi\right)-\left[-a^2p\left(x,0;\varphi\right)+2\alpha\varphi\right] \\ &= -a^2\Delta p\left(x,0\right)+2\alpha\Delta\varphi\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin normu

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^2\left(\varphi\right)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)}^2=\int_0^l\left(-a^2\Delta p_x\left(x,0\right)+2\alpha\Delta\varphi_x\right)^2dx$$

olup, buradan $\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$ eşitsizliği ile

$$\left\| \left(\Delta J_\alpha^2 (\varphi) \right)' \right\|_{H_0^1(0,l)}^2 \leq 2a^4 \int_0^l \left[\Delta p_x (x,0) \right]^2 dx + 8\alpha^2 \int_0^l \Delta \varphi_x^2 dx \qquad (3.2.3.16)$$

yazılır.

(3.2.3.13) denklemi Δp_t ile çarpıldıktan sonra $[0,l]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^l \left(\Delta p_{tt} - a^2 \Delta p_{xx} \right) \Delta p_t dx = 0$$

yazılır. Buradan

$$-a^2 \Delta p_{xx} \Delta p_t = -a^2 \left(\Delta p_x \Delta p_t \right)_x + a^2 \Delta p_x \Delta p_{tx}$$

özdeşliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\Delta p_t \Delta p_{tt} + a^2 \Delta p_x \Delta p_{tx} \right) dx &= a^2 \int_0^l \left(\Delta p_x \Delta p_t \right)_x dx \\ &= a^2 \Delta p_x \Delta p_t \Big|_0^l \\ &= a^2 \Delta p_x (l,t) \Delta p_t (l,t) - a^2 \Delta p_x (0,t) \Delta p_t (0,t) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (3.2.3.15) sınır şartları göz önüne alınarak,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \left(\Delta p_t^2 + a^2 \Delta p_x^2 \right) dx = 0 \qquad (3.2.3.17)$$

bulunur.

(3.2.3.17) denkleminin $\left[0,t\right]$ için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta p_t\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[\Delta p_x\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta p_t\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[\Delta p_x\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx\end{aligned}\tag{3.2.3.18}$$

olur.

(3.2.3.17) denkleminin $\left[t,T\right]$ için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta p_t\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[\Delta p_x\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta p_t\left(x,T\right)\right]^2+a^2\left[\Delta p_x\left(x,T\right)\right]^2\right\}dx\end{aligned}\tag{3.2.3.19}$$

bulunur.

(3.2.3.18) ve (3.2.3.19) denklemleri birlikte ele alınırsa

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta p_t\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[\Delta p_x\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta p_t\left(x,T\right)\right]^2+a^2\left[\Delta p_x\left(x,T\right)\right]^2\right\}dx$$

yazılır. Bu denklemde (3.2.3.14) şartları yerine yazılır ve (3.2.1.28) değerlendirmesi kullanılırsa

$$\int_0^l\left[\Delta p_x\left(x,0\right)\right]^2dx\leq\frac{4}{a^4}\left\|\Delta\varphi\right\|^2_{H_0^1(0,l)}\tag{3.2.3.20}$$

olarak bulunur.

(3.2.3.16) ifadesinde (3.2.3.20) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^2(\varphi)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)}^2 \leq 8\|\Delta\varphi\|_{H_0^1(0,l)}^2 + 8\alpha^2\|\Delta\varphi\|_{H_0^1(0,l)}^2$$

olup,

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^2(\varphi)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)} \leq 2\left(2+2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}\|\Delta\varphi\|_{H_0^1(0,l)}$$

elde edilir. O halde Teorem 3.2.3.2 ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.3.3: (3.2.2.39) ile verilen $\left(J_\alpha^3(\varphi)\right)'$ gradyeni Lipschitz süreklidir, yani

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^3(\varphi)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)} \leq c_{19}\|\Delta\varphi\|_{H_0^1(0,l)} \qquad (3.2.3.21)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c_{19} = 2\sqrt{2}\left(a^4+1+\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$ sabiti mevcuttur.

İspat: Öncelikle (3.2.2.30)-(3.2.2.33) eşlenik problemi için fark problemini oluşturalım. φ elemanına verilen $\Delta\varphi$ artımı için $\varphi+\Delta\varphi$ elemanına karşılık gelen eşlenik problemin çözümü $s_\Delta(x,t) = s(x,t;\varphi+\Delta\varphi)$ olmak üzere

$$\left(s_\Delta\right)_{tt} - a^2\left(s_\Delta\right)_{xx} = 0,\ (x,t)\in\Omega$$

$$\left(s_\Delta\right)_t(x,T) = -2\left[u_t(x,T;\varphi+\Delta\varphi) - y_1(x)\right],\ x\in(0,l)$$

$$\left(s_\Delta\right)_x(x,T) = -\frac{2}{a^2}\left[u_x(x,T;\varphi+\Delta\varphi) - y_2(x)\right],\ x\in(0,l)$$

$$s_{\Delta}\left(0,t\right)=0,\ \ \mathrm{s}_{\Delta}\left(l,t\right)=0,\ t\in\left(0,T\right]$$

problemi yazılır. Bu problemden (3.2.2.30)-(3.2.2.33) problemi çıkarılırsa $\Delta s\left(x,t\right)=s\left(x,t;\varphi+\Delta\varphi\right)-s\left(x,t;\varphi\right)$ olmak üzere

$$\Delta s_{tt}-a^{2}\Delta s_{xx}=0,\ \ \left(x,t\right)\in\Omega \tag{3.2.3.22}$$

$$\Delta s_{t}\left(x,T\right)=-2\Delta u_{t}\left(x,T\right),\ x\in\left(0,l\right) \tag{3.2.3.23}$$

$$\Delta s_{x}\left(x,T\right)=-\frac{2}{a^{2}}\Delta u_{x}\left(x,T\right),\ x\in\left(0,l\right) \tag{3.2.3.24}$$

$$\Delta s\left(0,t\right)=0,\ \Delta s\left(l,t\right)=0,\ t\in\left(0,T\right] \tag{3.2.3.25}$$

şeklinde fark problemi bulunur.

Şimdi φ elemanına verilen $\Delta\varphi$ artımı için gradyendeki değişim $\Delta s\left(x,0\right)=s\left(x,0;\varphi+\Delta\varphi\right)-s\left(x,0;\varphi\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left(\Delta J_{\alpha}^{3}\left(\varphi\right)\right)' &=\left(J_{\alpha}^{3}\left(\varphi+\Delta\varphi\right)\right)'-\left(J_{\alpha}^{3}\left(\varphi\right)\right)'\\ &=-a^{2}s\left(x,0;\varphi+\Delta\varphi\right)+2\alpha\left(\varphi+\Delta\varphi\right)-\left[-a^{2}s\left(x,0;\varphi\right)+2\alpha\varphi\right]\\ &=-a^{2}\Delta s\left(x,0\right)+2\alpha\Delta\varphi\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. O halde $\left(\Delta J_{\alpha}^{3}\left(\varphi\right)\right)'$ için norm

$$\left\|\left(\Delta J_{\alpha}^{3}\left(\varphi\right)\right)'\right\|_{H_0^1\left(0,l\right)}^{2}=\int_{0}^{l}\left(-a^{2}\Delta s_{x}\left(x,0\right)+2\alpha\Delta\varphi_{x}\right)^{2}dx$$

olup, burada $\left(a+b\right)^{2}\leq 2\left(a^{2}+b^{2}\right)$ eşitsizliğinden yararlanılarak,

$$\left\| \left(\Delta J_\alpha^3 (\varphi) \right)' \right\|^2_{H_0^1(0,l)} \le 2a^4 \int_0^l \left[\Delta s_x (x,0) \right]^2 dx + 8\alpha^2 \int_0^l \Delta\varphi_x^2 dx \qquad (3.2.3.26)$$

yazılır.

(3.2.3.22) denklemi Δs_t ile çarpıldıktan sonra $[0,l]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^l \left(\Delta s_{tt} - a^2 \Delta s_{xx} \right) \Delta s_t dx = 0$$

olur ve

$$-a^2 \Delta s_{xx} \Delta s_t = -a^2 \left(\Delta s_x \Delta s_t \right)_x + a^2 \Delta s_x \Delta s_{tx}$$

özdeşliği göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\Delta s_t \Delta s_{tt} + a^2 \Delta s_x \Delta s_{tx} \right) dx &= a^2 \int_0^l \left(\Delta s_x \Delta s_t \right)_x dx \\ &= a^2 \Delta s_x \Delta s_t \Big|_0^l \\ &= a^2 \Delta s_x (l,t) \Delta s_t (l,t) - a^2 \Delta s_x (0,t) \Delta s_t (0,t) \end{aligned}$$

bulunur. (3.2.3.25) sınır şatları yardımıyla

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \left(\Delta s_t^2 + a^2 \Delta s_x^2 \right) dx = 0 \qquad (3.2.3.27)$$

elde edilir.

(3.2.3.27) denkleminin $\left[0,t\right]$ için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta s_t\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[\Delta s_x\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta s_t\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[\Delta s_x\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx\end{aligned}\tag{3.2.3.28}$$

olur.

(3.2.3.27) denkleminin $\left[t,T\right]$ için integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta s_t\left(x,t\right)\right]^2+a^2\left[\Delta s_x\left(x,t\right)\right]^2\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta s_t\left(x,T\right)\right]^2+a^2\left[\Delta s_x\left(x,T\right)\right]^2\right\}dx\end{aligned}\tag{3.2.3.29}$$

bulunur.

(3.2.3.28) ve (3.2.3.29) denklemleri birlikte ele alınırsa

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta s_t\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[\Delta s_x\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{\left[\Delta s_t\left(x,T\right)\right]^2+a^2\left[\Delta s_x\left(x,T\right)\right]^2\right\}dx$$

yazılır. Bu denklemde (3.2.3.23) ve (3.2.3.24) şartları yerine yazılırsa

$$\int_0^l\left\{\left[\Delta s_t\left(x,0\right)\right]^2+a^2\left[\Delta s_x\left(x,0\right)\right]^2\right\}dx=4\int_0^l\left[\Delta u_t\left(x,T\right)\right]^2dx+\frac{4}{a^2}\int_0^l\left[\Delta u_x\left(x,T\right)\right]^2dx$$

olur. Burada (3.2.1.9) ve (3.2.1.28) kullanılarak,

$$\int_0^l \left[\Delta s_x\left(x,0\right)\right]^2 dx \le 4\left(1+\frac{1}{a^4}\right)\left\|\Delta\varphi\right\|_{H_0^1}^2 \tag{3.2.3.30}$$

elde edilir.

(3.2.3.26) ifadesinde (3.2.3.30) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^3\left(\varphi\right)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)}^2 \le 8\left(a^4+1+\alpha^2\right)\left\|\Delta\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}^2$$

olup,

$$\left\|\left(\Delta J_\alpha^3\left(\varphi\right)\right)'\right\|_{H_0^1(0,l)} \le 2\sqrt{2}\left(a^4+1+\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta\varphi\right\|_{H_0^1(0,l)}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.3.3 için ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3.4: (3.2.1.4) amaç fonksiyoneli Φ_{ad} kümesinde $\chi=\alpha$ güçlü konvekslik sabiti ile güçlü konvekstir.

İspat: İlk olarak $\alpha\left\|\varphi\right\|_{H_0^1}^2$ teriminin güçlü konveks olduğunu ispat edelim. Her $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi_{ad}$ ve $\beta\in\left[0,1\right]$ için

$$\begin{aligned}\alpha\left\|\beta\varphi_1+\left(1-\beta\right)\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2 &= \alpha\int_0^l\left(\beta\varphi_{1_x}+\left(1-\beta\right)\varphi_{2_x}\right)^2 dx\\ &= \alpha\int_0^l\left[\beta\left(\varphi_{1_x}\right)^2+\left(1-\beta\right)\left(\varphi_{2_x}\right)^2-\beta\left(1-\beta\right)\left(\varphi_{1_x}-\varphi_{2_x}\right)^2\right]dx\end{aligned}$$

olup,

$$\alpha\left\|\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2=\beta\alpha\left\|\varphi_1\right\|_{H_0^1}^2+(1-\beta)\alpha\left\|\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2-\alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2 \quad (3.2.3.31)$$

elde edilir. Yani $\alpha\|\varphi\|_{H_0^1}^2$ fonksiyonu $\chi=\alpha$ sabiti ile güçlü konvekstir.

(3.2.1.20) ifadesinde (3.2.3.31) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&=\int_0^l\left[\beta\left(u_t(x,T;\varphi_1)-u_t(x,T;0)\right)+(1-\beta)\left(u_t(x,T;\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right)\right]^2dx\\
&+\beta\alpha\left\|\varphi_1\right\|_{H_0^1}^2+(1-\beta)\alpha\left\|\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2-\alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2
\end{aligned}$$

bulunur. $\pi_1(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveksliğinde uygulanan basit işlemlerle

$$\begin{aligned}
&\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&\le\beta\int_0^l\left[u_t(x,T;\varphi_1)-u_t(x,T;0)\right]^2dx+(1-\beta)\int_0^l\left[u_t(x,T;\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right]^2dx\\
&+\beta\alpha\left\|\varphi_1\right\|_{H_0^1}^2+(1-\beta)\alpha\left\|\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2-\alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2
\end{aligned}$$

elde edilir . Buradan

$$\begin{aligned}
\pi_1\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\le\beta\pi_1(\varphi_1,\varphi_1)+(1-\beta)\pi_1(\varphi_2,\varphi_2)\\
-\alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2
\end{aligned} \quad (3.2.3.32)$$

yazılır. Böylece $\pi_1(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin $\chi=\alpha$ sabiti ile güçlü konveks olduğu görülür.

Şimdi $J_{\alpha}^{1}(\varphi)$ fonksiyoneline dönelim. Amaç fonksiyonelimizde (3.2.3.32) ve (3.2.1.22) değerlendirmeleri göz önüne alınarak, her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{ad}$ ve $\beta \in [0,1]$ için

$$J_{\alpha}^{1}\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) \leq \beta\pi_1(\varphi_1,\varphi_1) + (1-\beta)\pi_1(\varphi_2,\varphi_2) - \alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H_0^1(0,l)}^2$$
$$-2\left(\beta L_1\varphi_1 + (1-\beta)L_1\varphi_2\right) + b_1$$

yazılır ve buradan

$$J_{\alpha}^{1}\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) \leq \beta J_{\alpha}^{1}(\varphi_1) + (1-\beta)J_{\alpha}^{1}(\varphi_2) - \alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H_0^1(0,l)}^2$$

bulunur. O halde $J_{\alpha}^{1}(\varphi)$ fonksiyoneli $\chi = \alpha$ sabiti ile güçlü konvekstir.

Teorem 3.2.3.5: (3.2.1.26) amaç fonksiyoneli Φ_{ad} kümesinde $\chi = \alpha$ güçlü konvekslik sabiti ile güçlü konvekstir.

İspat: Öncelikle $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin güçlü konveks olduğunu gösterelim. (3.2.1.35) ifadesinde (3.2.3.31) kullanılırsa

$$\pi_2\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2, \beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right)$$
$$= \int_0^l \left[\beta\left(u_x(x,T;\varphi_1) - u_x(x,T;0)\right) + (1-\beta)\left(u_x(x,T;\varphi_2) - u_x(x,T;0)\right)\right]^2 dx$$
$$+\beta\alpha\left\|\varphi_1\right\|_{H_0^1}^2 + (1-\beta)\alpha\left\|\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2 - \alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H_0^1}^2$$

yazılır. $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğu ispatlanırken yapılan basit işlemlerle

$$\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)$$
$$\leq \beta\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_1\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx+(1-\beta)\int_0^l\left[u_x\left(x,T;\varphi_2\right)-u_x\left(x,T;0\right)\right]^2dx$$
$$+\beta\alpha\left\|\varphi_1\right\|_{H_0^1}^2+(1-\beta)\alpha\left\|\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2-\alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\pi_2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\leq \beta\pi_2\left(\varphi_1,\varphi_1\right)+(1-\beta)\pi_2\left(\varphi_2,\varphi_2\right)\\ -\alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{H_0^1}^2\end{aligned} \tag{3.2.3.33}$$

olup, $\pi_2(\varphi,\varphi)$ fonksiyoneli $\chi=\alpha$ sabiti ile güçlü konvekstir.

$J_\alpha^2(\varphi)$ amaç fonksiyonelimizde (3.2.3.33) ve (3.2.1.37) değerlendirmeleri göz önüne alınarak, her $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi_{ad}$ ve $\beta\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}J_\alpha^2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\leq \beta\pi_2\left(\varphi_1,\varphi_1\right)+(1-\beta)\pi_2\left(\varphi_2,\varphi_2\right)-\alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{H_0^1(0,l)}^2\\ -2\left(\beta L_2\varphi_1+(1-\beta)L_2\varphi_2\right)+b_2\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$J_\alpha^2\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\leq \beta J_\alpha^2\left(\varphi_1\right)+(1-\beta)J_\alpha^2\left(\varphi_2\right)-\alpha\beta(1-\beta)\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\|_{H_0^1(0,l)}^2$$

yazılarak, $J_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyonelinin $\chi=\alpha$ sabiti ile güçlü konveks olduğu görülür.

Teorem 3.2.3.6: (3.2.1.41) amaç fonksiyoneli Φ_{ad} kümesinde $\chi=\alpha$ güçlü konvekslik sabiti ile güçlü konvekstir.

İspat: Öncelikle $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin güçlü konveks olduğunu ispat edelim. (3.2.1.48) ifadesinde (3.2.3.31) ile elde edilen özdeşlik yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&=\int_0^l\left[\beta\left(u_t(x,T;\varphi_1)-u_t(x,T;0)\right)+(1-\beta)\left(u_t(x,T;\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right)\right]^2dx\\
&+\int_0^l\left[\beta\left(u_x(x,T;\varphi_1)-u_x(x,T;0)\right)+(1-\beta)\left(u_x(x,T;\varphi_2)-u_x(x,T;0)\right)\right]^2dx\\
&+\beta\alpha\|\varphi_1\|_{H_0^1}^2+(1-\beta)\alpha\|\varphi_2\|_{H_0^1}^2-\alpha\beta(1-\beta)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H_0^1}^2
\end{aligned}$$

olur. $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğu ispatlanırken uygulanan basit işlemlerle

$$\begin{aligned}
&\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)\\
&\leq\beta\left\{\int_0^l\left[u_t(x,T;\varphi_1)-u_t(x,T;0)\right]^2dx+\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi_1)-u_x(x,T;0)\right]^2dx\right\}\\
&+(1-\beta)\left\{\int_0^l\left[u_t(x,T;\varphi_2)-u_t(x,T;0)\right]^2dx+\int_0^l\left[u_x(x,T;\varphi_2)-u_x(x,T;0)\right]^2dx\right\}\\
&+\beta\alpha\|\varphi_1\|_{H_0^1}^2+(1-\beta)\alpha\|\varphi_2\|_{H_0^1}^2-\alpha\beta(1-\beta)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H_0^1}^2
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\pi_3\left(\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2,\beta\varphi_1+(1-\beta)\varphi_2\right)&\leq\beta\pi_3(\varphi_1,\varphi_1)+(1-\beta)\pi_3(\varphi_2,\varphi_2)\\
&\quad-\alpha\beta(1-\beta)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H_0^1}^2
\end{aligned}\tag{3.2.3.34}$$

olup, $\pi_3(\varphi,\varphi)$ fonksiyoneli $\chi=\alpha$ sabiti ile güçlü konvekstir.

Şimdi $J_{\alpha}^{3}(\varphi)$ amaç fonksiyonelinin güçlü konveks olduğunu gösterelim. (3.2.3.34) ve (3.2.1.50) değerlendirmeleri göz önüne alınarak, her $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{ad}$ ve $\beta \in [0,1]$ için

$$J_{\alpha}^{3}\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) \leq \beta\pi_3(\varphi_1,\varphi_1) + (1-\beta)\pi_3(\varphi_2,\varphi_2) - \alpha\beta(1-\beta)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H_0^1(0,l)}^2$$
$$-2\left(\beta L_3\varphi_1 + (1-\beta)L_3\varphi_2\right) + b_3$$

yazılır. Buradan

$$J_{\alpha}^{3}\left(\beta\varphi_1 + (1-\beta)\varphi_2\right) \leq \beta J_{\alpha}^{3}(\varphi_1) + (1-\beta) J_{\alpha}^{3}(\varphi_2) - \alpha\beta(1-\beta)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H_0^1(0,l)}^2$$

bulunur. $J_{\alpha}^{3}(\varphi)$ fonksiyonelinin $\chi = \alpha$ sabiti ile güçlü konveks olduğu görülür ve Teorem 3.2.3.6 için ispat tamamlanır.

Şimdi (3.2.3.1) ve (3.2.3.2) ile kurulan minimalleştirici dizinin yakınsama hızına ait bazı teoremleri inceleyelim.

İskenderov *et al.* (2002) kitabından faydalanılarak, aşağıdaki teoremler ifade ve ispat edilir.

Bu teoremler, $J_{\alpha}^{i}(\varphi),\ i = 1,2,3$ fonksiyonellerinin her biri için geçerli olmaktadır. Bu nedenle kolaylık olması için bu fonksiyonellerin gradyenlerinin c_{17}, c_{18} ve c_{19} olan Lipschitz sabitlerini sırasıyla l_1, l_2 ve l_3 ile gösterelim.

Aşağıdaki teoreme göre amaç fonksiyonelinin konveks olması şart koşulmadığında gradyen metodu ile kurulan dizi için yalnızca fonksiyonelin stasyoner noktalar kümesine yığıldığı söylenebilir.

Teorem 3.2.3.7: $J_\alpha^i(\varphi),\ i=1,2,3$ fonksiyoneli sürekli diferansiyellenebilir olup, gradyeni $l_i>0,\ i=1,2,3$ sabiti ile Lipschitz şartını sağlasın ve $J_\alpha^{i\,*}>-\infty,\ i=1,2,3$ olsun. Bu durumda bir φ_0 başlangıç noktası için (3.2.3.1) ve (3.2.3.2) ile kurulan $\{\varphi_k\}$ dizisi

$$\lim_{k\to\infty}\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'=0,\ i=1,2,3 \tag{3.2.3.35}$$

şartını sağlar ve bu dizinin herhangi bir $\varphi_i^*,\ i=1,2,3$ limit noktası $J_\alpha^i(\varphi),\ i=1,2,3$ fonksiyonelinin stasyoner noktasıdır, yani $\left(J_\alpha^i(\varphi_i^*)\right)'=0,\ i=1,2,3$ olur.

İspat: $\left(J_\alpha^i(\varphi)\right)',\ i=1,2,3$ gradyeni Lipschitz sürekli olduğundan

$$J_\alpha^i(\varphi_k)-J_\alpha^i(\varphi_{k+1})\geq\left\langle\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)',\varphi_k-\varphi_{k+1}\right\rangle_{H_0^1}-\frac{l_i}{2}\left\|\varphi_k-\varphi_{k+1}\right\|_{H_0^1}^2,\ i=1,2,3$$

yazılabilir. Bu ifade ve (3.2.3.2) şartı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}J_\alpha^i(\varphi_k)-J_\alpha^i(\varphi_{k+1})&=J_\alpha^i(\varphi_k)-J_\alpha^i\left(\varphi_k-\beta_k\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right)\\&\geq J_\alpha^i(\varphi_k)-J_\alpha^i\left(\varphi_k-\beta\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right)\\&\geq\left\langle\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)',\beta\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\rangle_{H_0^1}-\frac{l_i}{2}\beta^2\left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\|_{H_0^1}^2\\&\geq\beta\left(1-\frac{l_i\beta}{2}\right)\left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\|_{H_0^1}^2,\qquad i=1,2,3\end{aligned}$$

olur.

Yukarıdaki ifadeden

$$\begin{aligned} J_\alpha^i(\varphi_k) - J_\alpha^i(\varphi_{k+1}) &\geq \max_{\beta\geq 0} \beta\left(1-\frac{l_i\beta}{2}\right)\left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\|_{H_0^1}^2 \\ &= \frac{1}{2l_i}\left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\|_{H_0^1}^2 \geq 0,\ \ i=1,2,3,\ k=0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{3.2.3.36}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $\left\{J_\alpha^i(\varphi_k)\right\},\ i=1,2,3$ dizisinin artmadığı görülür ve eğer $k=0,1,\ldots$ için $\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)' \neq 0,\ i=1,2,3$ olursa bu dizi azalandır denir. Diğer taraftan $k=0,1,\ldots$ için $J_\alpha^i(\varphi_k) \geq J_\alpha^{i\,*} > -\infty,\ i=1,2,3$ olduğu açıktır, yani $\left\{J_\alpha^i(\varphi_k)\right\},\ i=1,2,3$ dizisi aşağıdan sınırlıdır. Bu durumda $\left\{J_\alpha^i(\varphi_k)\right\},\ i=1,2,3$ dizisinin sonlu limiti vardır. O halde

$$\lim_{k\to\infty}\left(J_\alpha^i(\varphi_k) - J_\alpha^i(\varphi_{k+1})\right) = 0$$

olur. Buradan ve (3.2.3.36) ifadesinden (3.2.3.35) ifadesinin doğruluğu anlaşılır.

$\varphi_i^*,\ i=1,2,3$ noktası, $\{\varphi_k\}$ dizisinin herhangi sonu limit noktası olsun, yani $\lim_{m\to\infty}\varphi_{k_m} = \varphi_i^*,\ i=1,2,3$ olacak şekilde $\left\{\varphi_{k_m}\right\}$ alt dizisi mevcuttur. O halde $\left(J_\alpha^i(\varphi)\right)',\ i=1,2,3$ gradyeninin sürekliliğinden ve (3.2.3.35) şartından

$$\left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_i^*)\right)'\right\|_{H_0^1} = \lim_{m\to\infty}\left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_{k_m})\right)'\right\|_{H_0^1} = 0,\ i=1,2,3$$

bulunur.

Bu durumda $\left(J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\right)' = 0,\ i=1,2,3$, yani $\varphi_i^*,\ i=1,2,3$ stasyoner noktadır. Böylece Teorem 3.2.3.7 ispatlanmış olur (İskenderov *et al.* 2002).

Aşağıdaki teorem fonksiyonel konveks olduğunda gradyen metodu ile kurulan dizinin minimalleştirici dizi olduğunu ifade ve ispat etmektedir.

Teorem 3.2.3.8: Teorem 3.2.3.7 ile verilen bütün şartların sağlandığını kabul edelim. Ayrıca $J_\alpha^i(\varphi),\ i=1,2,3$ fonksiyoneli konveks ve

$$M_i(\varphi_0) = \left\{\varphi \in \Phi_{ad} : J_\alpha^i(\varphi) \le J_\alpha^i(\varphi_0)\right\}, i=1,2,3$$

kümesi sınırlı olsun. Bu durumda $\Phi_{ad}^{i*},\ i=1,2,3$ minimum elemanların kümesi olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} J_\alpha^i(\varphi_k) = J_\alpha^{i\,*},\quad \lim_{k\to\infty} d\left(\varphi_k, \Phi_{ad}^{i*}\right) = 0,\ i=1,2,3 \qquad (3.2.3.37)$$

şartları ve $c_{20} > 0$ sabiti için

$$0 \le J_\alpha^i(\varphi_k) - J_\alpha^{i\,*} \le \frac{c_{20}}{k},\ i=1,2,3 \qquad (3.2.3.38)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $d\left(\varphi_k, \Phi_{ad}^{i*}\right) = \inf\limits_{\varphi\in\Phi_{ad}^{i*}} d(\varphi_k, \varphi)$ şeklindedir.

İspat: $M_i(\varphi_0)$ kümesi sınırlı ve $J_\alpha^i(\varphi)$ fonksiyoneli sürekli olduğundan $J_\alpha^{i\,*} > -\infty$, $\Phi_{ad}^{i*} \ne \varnothing$ ve $\Phi_{ad}^{i*} \subset M_i(\varphi_0)$ olduğu biliniyor.

Eğer konveks X kümesinde konveks f fonksiyonu $y \in X$ noktasında diferansiyellenebiliyor ise o zaman keyfi $x \in X$ için

$$f(x) \geq f(y) + \left\langle f'(y), x - y \right\rangle$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\varphi_i^* \in \Phi_{ad}^{i*}$, $i = 1,2,3$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq J_\alpha^i(\varphi_k) - J_\alpha^{i\,*} &= J_\alpha^i(\varphi_k) - J_\alpha^i(\varphi_i^*) \\ &\leq \left\langle \left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)', \varphi_k - \varphi_i^* \right\rangle_{H_0^1} \\ &\leq \left\| \left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)' \right\|_{H_0^1} \left\| \varphi_k - \varphi_i^* \right\|_{H_0^1} \\ &\leq d_i \left\| \left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)' \right\|_{H_0^1}, \quad i = 1,2,3, \; k = 0,1,\ldots \end{aligned} \tag{3.2.3.39}$$

yazılabilir. Burada d_i, $M_i(\varphi_0)$ kümesinin çapıdır. Bu eşitsizlikte (3.2.3.35) ifadesi dikkate alınırsa

$$\lim_{k \to \infty} J_\alpha^i(\varphi_k) = J_\alpha^{i\,*}, \; i = 1,2,3$$

olur. Böylece (3.2.3.37) ifadesinde yer alan birinci yakınsama ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.3.7 nin ispatında $\left\{J_\alpha^i(\varphi_k)\right\}$, $i = 1,2,3$ dizisinin artmadığı gösterilmiştir. Buna göre $J_\alpha^i(\varphi)$ fonksiyoneli için kurulan $\{\varphi_k\}$ dizisi $M_i(\varphi_0)$ kümesine aittir: $k = 0,1,\ldots$ için $\varphi_k \in M_i(\varphi_0)$ olur. O halde (3.2.3.37) ifadesinin ikinci kısmı da doğrudur.

Şimdi (3.2.3.38) ifadesini ispat edelim. $\beta_k^i \equiv J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)-J_\alpha^{i\,*},\ i=1,2,3$ olsun. (3.2.3.36) ve (3.2.3.39) eşitsizliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}\beta_k^i-\beta_{k+1}^i = J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)-J_\alpha^i\left(\varphi_{k+1}\right) &\geq \frac{1}{2l_i}\left\|\left(J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)\right)'\right\|_{H_0^1}^2 \\ &\geq \frac{1}{2l_i d_i^2}\left(\beta_k^i\right)^2, \quad i=1,2,3\end{aligned} \tag{3.2.3.40}$$

olduğu görülür.

$\beta_k^i=0$ olduğunda φ_k minimum nokta olur ve (3.2.3.38) şartı sağlanır. O halde $\beta_k^i>0$ için inceleme yapalım. $m\geq 0$ herhangi bir tam sayı olsun. O halde (3.2.3.40) eşitsizliğinden faydalanarak

$$\frac{1}{\beta_{m+1}^i}-\frac{1}{\beta_m^i}=\frac{\beta_m^i-\beta_{m+1}^i}{\beta_m^i\beta_{m+1}^i}\geq\frac{\left(\beta_m^i\right)^2}{2l_i d_i^2\beta_m^i\beta_{m+1}^i}\geq\frac{1}{2l_i d_i^2},\ i=1,2,3$$

yazılır. Bu eşitsizlik m'e göre sıfırdan $\left(k-1\right)$'e kadar toplanırsa

$$\frac{1}{\beta_k^i}-\frac{1}{\beta_0^i}\geq\frac{k}{2l_i d_i^2},\ i=1,2,3$$

olup,

$$\frac{1}{\beta_k^i}\geq\frac{k}{2l_i d_i^2},\ i=1,2,3$$

elde edilir. Buradan

$$\beta_k^i \le \frac{2l_i d_i^2}{k}, \ i = 1,2,3$$

bulunur ve $c_{20} = 2l_i d_i^2, \ i = 1,2,3$ için

$$\beta_k^i \equiv J_\alpha^i(\varphi_k) - J_\alpha^{i\,*} \le \frac{c_{20}}{k}, \ i = 1,2,3$$

yazılır. Böylece (3.2.3.38) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür ve Teorem 3.2.3.8 için ispat tamamlanır (İskenderov *et al.* 2002).

Şimdi optimal kontrol problemleri için Teorem 3.2.3.8 ile verilen (3.2.3.38) eşitsizliğini açık olarak yazalım. Bu eşitsizliğin amaç fonksiyonellerinin Lipschitz sabitleri ile değiştiği göz önüne alınırsa (3.2.3.38) ifadesi her bir amaç fonksiyoneli için

$$J_\alpha^1(\varphi_k) - J_\alpha^{1\,*} \le \frac{4\left(2a^4 + 2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} d_1^2}{k}, \ k = 1,2,\ldots$$

$$J_\alpha^2(\varphi_k) - J_\alpha^{2*} \le \frac{4\left(2 + 2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} d_2^2}{k}, \ k = 1,2,\ldots$$

ve

$$J_\alpha^3(\varphi_k) - J_\alpha^{3*} \le \frac{4\left(2a^4 + 2 + 2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} d_3^2}{k}, \ k = 1,2,\ldots$$

şeklinde yazılır.

Aşağıdaki teoremler güçlü konveks fonksiyonlar için minimalleştirici dizinin optimal çözüme yakınsamasını ve yakınsamanın hızını ifade eder.

Teorem 3.2.3.9: $J_\alpha^i\left(\varphi\right),\ i=1,2,3$ fonksiyoneli $\chi>0$ sabiti ile güçlü konveks ve $\varphi_i^*,\ i=1,2,3$, optimal çözüm olsun. O halde (3.2.3.1) ile verilen minimalleştirici dizi

$$\left\|\varphi_k-\varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2\le\frac{2}{\chi}\left(J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)-J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\right),\ i=1,2,3,\ k=0,1,... \qquad (3.2.3.41)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat: Güçlü konvekslik tanımında $\beta=\dfrac{1}{2}$ alınırsa

$$J_\alpha^i\left(\frac{1}{2}\varphi_k+\frac{1}{2}\varphi_i^*\right)\le\frac{1}{2}J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)+\frac{1}{2}J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)-\chi\frac{1}{4}\left\|\varphi_k-\varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2,\ i=1,2,3$$

yazılır. Ayrıca

$$J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\le J_\alpha^i\left(\frac{1}{2}\varphi_k+\frac{1}{2}\varphi_i^*\right),\ i=1,2,3$$

olduğundan

$$J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\le\frac{1}{2}J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)+\frac{1}{2}J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)-\chi\frac{1}{4}\left\|\varphi_k-\varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2,\ i=1,2,3$$

yazılabilir. Buradan

$$\left\|\varphi_k - \varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2 \le \frac{2}{\chi}\left(J_\alpha^i\left(\varphi_k\right) - J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\right),\ i = 1,2,3$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.3.9 ispatlanmış olur (İskenderov *et al.* 2002).

Teorem 3.2.3.10: $J_\alpha^i\left(\varphi\right),\ i = 1,2,3$ fonksiyoneli sürekli diferansiyellenebilir ve $\chi > 0$ sabiti ile güçlü konveks olsun. Ayrıca gradyeni $l_i > 0,\ i = 1,2,3$ sabiti ile Lipschitz şartını sağlasın. Bu durumda φ_0 bir başlangıç noktası ve $\Phi_{ad}^{i*},\ i = 1,2,3$ minimum elemanların kümesi olmak üzere (3.2.3.1) ve (3.2.3.2) ile verilen $\left\{\varphi_k\right\}$ dizisi (3.2.3.37) şartlarını sağlar ve

$$0 \le J_\alpha^i\left(\varphi_k\right) - J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right) \le \left(J_\alpha^i\left(\varphi_0\right) - J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\right) q_i^k,\ i = 1,2,3,\ k = 0,1,... \quad (3.2.3.42)$$

$$\left\|\varphi_k - \varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2 \le \frac{2}{\chi}\left(J_\alpha^i\left(\varphi_0\right) - J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\right) q_i^k,\ i = 1,2,3,\ k = 0,1,... \quad (3.2.3.43)$$

değerlendirmeleri geçerlidir. Burada $q_i = 1 - 2\chi l_i^{-1},\ i = 1,2,3$ şeklindedir.

İspat: $J_\alpha^i\left(\varphi\right),\ i = 1,2,3$ fonksiyoneli, kapalı ve konveks Φ_{ad} kümesinde güçlü konveks olduğundan $\varphi_0 \in \Phi_{ad}$ için

$$M_i\left(\varphi_0\right) = \left\{\varphi \in \Phi_{ad} : J_\alpha^i\left(\varphi\right) \le J_\alpha^i\left(\varphi_0\right)\right\},\ i = 1,2,3$$

kümesinin sınırlı olduğunu söylemek mümkündür. Ayrıca $J_\alpha^{i\,*} > -\infty,\ i = 1,2,3$ olur ve $\Phi_{ad}^{i*},\ i = 1,2,3$ kümesi tek bir $\varphi_i^*,\ i = 1,2,3$ elemanından ibarettir. Buna göre Teorem 3.2.3.7 ve Teorem 3.2.3.8 dikkate alınırsa (3.2.3.37) ifadesinin doğru olduğu görülür.

Şimdi (3.2.3.42) ve (3.2.3.43) ifadelerinin ispatını yapalım. X konveks bir küme olmak üzere $f \in C^1(X)$ fonksiyonunun $\chi > 0$ sabiti ile güçlü konveks olması için gerek ve yeter şart

$$f(x) \geq f(y) + \left\langle f'(y), x-y \right\rangle + \chi \|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in X$$

şartını sağlamasıdır. O halde $y = \varphi_k$ ve $x = \varphi_i^*,\ i = 1,2,3$ alınarak, $J_\alpha^i(\varphi),\ i = 1,2,3$ fonksiyoneli için bu ifade yazılırsa

$$J_\alpha^i(\varphi_i^*) \geq J_\alpha^i(\varphi_k) + \left\langle \left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)', \varphi_i^* - \varphi_k \right\rangle_{H_0^1} + \chi \left\|\varphi_k - \varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2, \ i = 1,2,3$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\beta_k^i \equiv J_\alpha^i(\varphi_k) - J_\alpha^i(\varphi_i^*) &\leq \left\langle \left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)', \varphi_k - \varphi_i^* \right\rangle_{H_0^1} - \chi \left\|\varphi_k - \varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2 \\
&\leq \left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\|_{H_0^1} \left\|\varphi_k - \varphi_i^*\right\|_{H_0^1} - \chi \left\|\varphi_k - \varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2 \\
&\leq \sup_{n \geq 0} \left(\left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\|_{H_0^1} n - \chi n^2 \right) \left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\|_{H_0^1}^2 \frac{1}{4\chi}, \ i = 1,2,3
\end{aligned}$$

olup,

$$\beta_k^i = J_\alpha^i(\varphi_k) - J_\alpha^i(\varphi_i^*) \leq \frac{1}{4\chi} \left\|\left(J_\alpha^i(\varphi_k)\right)'\right\|_{H_0^1}^2, \ i = 1,2,3, \ k = 0,1,\ldots$$

alınır.

Şimdi $2\chi \le l_i,\ i=1,2,3$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $J_\alpha^i(\varphi),\ i=1,2,3$ fonksiyonelinin $\chi \ge 0$ sabiti ile güçlü konveks olabilmesi için

$$\left\langle \left(J_\alpha^i(\varphi_1)\right)' - \left(J_\alpha^i(\varphi_2)\right)', \varphi_1 - \varphi_2 \right\rangle_{H_0^1} \ge 2\chi \left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H_0^1}^2,\ i=1,2,3,\ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{ad}$$

şartını sağlamasının gerekli ve yeterli olduğunu hatırlayalım. O halde bu ifadeye Cauchy-Schawarz eşitsizliği uygulanır, gradyenin Lipschitz sürekliliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} 2\chi \left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H_0^1}^2 &\le \left\| \left(J_\alpha^i(\varphi_1)\right)' - \left(J_\alpha^i(\varphi_2)\right)' \right\|_{H_0^1} \left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H_0^1} \\ &\le l_i \left\|\varphi_1 - \varphi_2\right\|_{H_0^1}^2, \qquad i=1,2,3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $2\chi \le l_i,\ i=1,2,3$ olduğu görülür. Buna göre

$$0 \le q_i = 1 - 2\chi l_i^{-1} < 1,\ i=1,2,3$$

ve

$$0 \le \beta_{k+1}^i \le \beta_k^i \left(1 - 2\chi l_i^{-1}\right) = q_i \beta_k^i,\ i=1,2,3$$

olur. Buradan

$$\beta_k^i \le q_i \beta_{k-1}^i \le q_i^2 \beta_{k-2}^i \le \cdots \le q_i^k \beta_0^i,\ i=1,2,3$$

elde edilir. O halde (3.2.3.42) eşitsizliği doğrudur.

(3.2.3.41) ve (3.2.3.42) ifadelerinden

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_k-\varphi_i^*\right\|_{H_0^1}^2 &\leq \frac{2}{\chi}\left(J_\alpha^i\left(\varphi_k\right)-J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\right)\\ &\leq \frac{2}{\chi}\left(J_\alpha^i\left(\varphi_0\right)-J_\alpha^i\left(\varphi_i^*\right)\right)q_i^k,\ i=1,2,3\end{aligned}$$

yazılır. Böylece (3.2.3.43) ifadesinin de doğruluğu görülmüş olur. O halde Teorem 3.2.3.10 için ispat tamamlanır (İskenderov *et al.* 2002).

Şimdi Teorem 3.2.3.10 ile verilen (3.2.3.42) ve (3.2.3.43) eşitsizliklerini her bir amaç fonksiyoneli için açık olarak yazalım. $J_\alpha^1(\varphi)$ amaç fonksiyoneli için (3.2.3.42) ve (3.2.3.43) eşitsizlikleri sırasıyla

$$0\leq J_\alpha^1\left(\varphi_k\right)-J_\alpha^1\left(\varphi_1^*\right)\leq\left(J_\alpha^1\left(\varphi_0\right)-J_\alpha^1\left(\varphi_1^*\right)\right)\left(1-\frac{2\alpha}{2\left(2a^4+2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^k,\ k=0,1,...$$

ve

$$\left\|\varphi_k-\varphi_1^*\right\|_{H_0^1}^2\leq\frac{2}{\alpha}\left(J_\alpha^1\left(\varphi_0\right)-J_\alpha^1\left(\varphi_1^*\right)\right)\left(1-\frac{2\alpha}{2\left(2a^4+2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^k,\ k=0,1,...$$

şeklinde olur.

$J_\alpha^2(\varphi)$ amaç fonksiyoneli için (3.2.3.42) ve (3.2.3.43) eşitsizlikleri sırasıyla

$$0 \le J_\alpha^2(\varphi_k) - J_\alpha^2(\varphi_2^*) \le \left(J_\alpha^2(\varphi_0) - J_\alpha^2(\varphi_2^*)\right)\left(1 - \frac{2\alpha}{2\left(2+2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^k, \ k = 0,1,...$$

ve

$$\left\|\varphi_k - \varphi_2^*\right\|_{H_0^1}^2 \le \frac{2}{\alpha}\left(J_\alpha^2(\varphi_0) - J_\alpha^2(\varphi_2^*)\right)\left(1 - \frac{2\alpha}{2\left(2+2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^k, \ k = 0,1,...$$

şeklinde yazılır.

$J_\alpha^3(\varphi)$ amaç fonksiyoneli için (3.2.3.42) ve (3.2.3.43) eşitsizlikleri sırasıyla

$$0 \le J_\alpha^3(\varphi_k) - J_\alpha^3(\varphi_3^*) \le \left(J_\alpha^3(\varphi_0) - J_\alpha^3(\varphi_3^*)\right)\left(1 - \frac{2\alpha}{2\left(2a^4+2+2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^k, \ k = 0,1,...$$

ve

$$\left\|\varphi_k - \varphi_3^*\right\|_{H_0^1}^2 \le \frac{2}{\alpha}\left(J_\alpha^3(\varphi_0) - J_\alpha^3(\varphi_3^*)\right)\left(1 - \frac{2\alpha}{2\left(2a^4+2+2\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^k, \ k = 0,1,...$$

şeklinde olur.

3.3. Optimal Çözüm İçin MAPLE® Programı

Bu bölümde, $J_{\alpha}^{3}\left(\varphi\right)$ fonksiyonelini minimum yapma problemi için oluşturulan Maple® programı hakkında gerekli bilgiler verilmiştir.

Maple® programımızda kullandığımız bazı kısaltmalar şöyledir:

phi: $\varphi\left(x\right)$ fonksiyonu
N: Kullanılan trigonometrik fonksiyonların sayısı
psi: $\psi\left(x\right)$ fonksiyonu
F: $F\left(x,t\right)$ fonksiyonu
a: a sayısı
l: l sayısı
y1: $y_1\left(x\right)$ fonksiyonu
y2: $y_2\left(x\right)$ fonksiyonu
alpha: α sayısı

Nümerik örneklerimizde, uapproximate prosedürü problemin (3.1.10) anlamındaki Galerkin metodu ile elde edilmiş çözümünü verir, zapproximate prosedürü (3.2.2.30)-(3.2.2.33) eşlenik problemini çözer ve gradient prosedürü ise zapproximate prosedürünü kullanarak fonksiyonelin (3.2.2.39) gradyenini oluşturur. Örneklerimizde aşağıdaki trigonometrik taban fonksiyonları kullanılacaktır:

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right),\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right),\ldots,\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right)\right\}.$$

3.4. Nümerik Örnekler

Örnek 3.4.1: $u_{tt} - u_{xx} = \cos(t) \begin{cases} -\frac{1}{4}\left(x^2+2\right) & 0 \le x < \frac{1}{2},\ t \in (0,1] \\ \frac{1}{4}\left(4x^3 - 5x^2 + 25x - 10\right) & \frac{1}{2} < x < 1,\ t \in (0,1] \end{cases}$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in (0,1)$$

$$u(0,t) = 0,\ \ u(1,t) = 0,\ \ t \in (0,1]$$

probleminde

$$\begin{aligned} J_\alpha^3(\varphi) = &\int_0^1 \left[u_t(x,1;\varphi) - \left(-\sin(1) \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases} \right) \right]^2 dx \\ &+ \int_0^1 \left[u_x(x,1;\varphi) - \left(\cos(1) \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases} \right) \right]^2 dx \\ &+ \alpha \int_0^1 \varphi_x^2 dx \end{aligned}$$

amaç fonksiyonelini minimum yapma problemini düşünelim.

Eğer

$$I_\alpha^1(\varphi)=\int_0^1\left[u_t(x,1;\varphi)-\left(-\sin(1)\begin{cases}\frac{1}{4}x^2 & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ -x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{4}x & \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}\right)\right]^2dx$$
$$+\int_0^1\left[u_x(x,1;\varphi)-\left(\cos(1)\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ -3x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}\right)\right]^2dx$$

ve

$$I_\alpha^2(\varphi)=\int_0^1\varphi_x^2dx$$

olarak alınırsa amaç fonksiyoneli

$$J_\alpha^3(\varphi)=I_\alpha^1(\varphi)+\alpha I_\alpha^2(\varphi)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

$\alpha=0.1,\ N=10$ ve başlangıç elemanı $\varphi_0=\sin\pi x$ alınarak, aşağıdaki MAPLE® programı çalıştırılıp, minimalleştirici dizi elde edilir. Bu örnekte $J_{0.1}^3(\varphi_{k+1})<J_{0.1}^3(\varphi_k)$ eşitsizliğini sağlamak için $\beta_k=0.01$ olarak seçilmiştir. Ayrıca durdurma kriteri $J_{0.1}^3(\varphi_{k+1})-J_{0.1}^3(\varphi_k)>-0.166\times10^{-9}$ olarak alınmıştır. Bu durumda 250 iterasyondan sonra minimum eleman elde edilmiştir.

```
>a:=1.:l:=1.:
>psi:=0.:
>F:= cos(t)*PIECEWISE([-1/4*x^2-1/2, -x <= 0 and x-1/2 <= 0],[x^3-
5/4*x^2+25/4*x-5/2, 1/2-x <= 0 and x-1 <= 0]):
> y1:=-sin(1)*PIECEWISE([(1/4)*x^2, -x <= 0 and x-1/2 <= 0],[-1.*x^3+(5/4)*x^2-
(1/4)*x, 1/2-x <= 0 and x-1 <= 0]);y2:=cos(1)*PIECEWISE([(1/2)*x, x <= (1/2)],[-
3.*x^2+(5/2)*x-(1/4), x < 1.]);
> eps:=.166e-9:M:=500:beta:=0.01:T:=1.:alpha:=0.1:N=10:
```

The following procedure solves the generalized solution by Galerkin method using trigonometric basis functions

```
> uapproximate:=proc(phi,N,psi,F,a,l):
> ph:=array(1..N):
> for n from 1 to N do
> ph[n]:=sqrt(2/l)*sin(n*Pi*x/l):
> tph[n]:=diff(ph[n],x):
> od:
> for r from 1 to N do
> A[r]:=evalf(dsolve({diff(y(t),t,t)+(a*r*Pi)^2*y(t)
=int(F*ph[r],x=0..l),y(0)=evalf(Int(phi*ph[r],x=0..l)),
D(y)(0)=evalf(Int(psi*ph[r],x=0..l))})*ph[r]):
> od:
> uyak:=evalf(rhs(sum('A[r]','r'=1..N))):
> end:
```

The following procedure solves the adjoint problem by Galerkin method using trigonometric basis functions

```
> zapproximate:=proc(phi,N,psi,F,a,l,y1,y2)
>T:=1.:
> ph:=array(1..N):
> for n from 1 to N do
> ph[n]:=sqrt(2/l)*sin(n*Pi*x/l):
> tph[n]:=diff(ph[n],x):
> od:
> utau:=subs(t=T-tau,uapproximate(phi,N,psi,F,a,l));
> p1:=simplify(evalf(-2*(subs(tau=0,diff(utau,tau))+y1))):
> p2:=simplify(evalf(-2/a^2*(subs(tau=0,diff(utau,x))-y2))):
> for r from 1 to N do
> B[r]:=evalf(dsolve({diff(y(tau),tau,tau)+(a*r*Pi)^2*y(tau)
=0,y(0)=evalf(Int(p2*tph[r]/sqrt(int((tph[r])^2,x=0..l)),x=0..l)),
D(y)(0)=evalf(Int(p1*ph[r],x=0..l))})*ph[r]):
> od;
> ztau:=evalf(rhs(sum('B[r]','r'=1..N)));
> zyak:=simplify(subs(tau=T-t,ztau));
> end:
```

The following procedure gives the gradient of the functional

```
> gradient:=proc(alpha,phi,N,psi,F,a,l,y1,y2):
> gradient:=(-a^2*subs(t=0,zapproximate(phi,N,psi,F,a,l,y1,y2))+2*alpha*phi):
> end:
```

```
The initial element
> phi[0]:=sin(Pi*x):
The value of the functional for the initial element
>func[0]:=evalf(Int((subs(t=T,diff(uapproximate(phi[0],N,psi,F,a,l),t))-
y1)^2,x=0..l)+Int((subs(t=1,diff(uapproximate(phi[0],N,psi,F,a,l),x))-
y2)^2,x=0..l)+alpha*Int(diff(phi[0],x)^2,x=0..l));
The minimizing sequence and functional values
> for k from 0 to M-1 do
> phi[k+1]:=simplify(phi[k]-beta*gradient(alpha,phi[k],N,psi,F,1,1,y1,y2)):
> func[k+1]:=evalf(Int((subs(t=T,diff(uapproximate(phi[k+1],N,psi,F,a,l),t))-
y1)^2,x=0..l)+Int((subs(t=1,diff(uapproximate(phi[k+1],N,psi,F,a,l),x))-
y2)^2,x=0..1)+alpha*Int(diff(phi[k+1],x)^2,x=0..l)):
The stopping criteria
> if(func[k+1]-func[k]>-eps) break fi:
> od;
> phi[k+1];
```

Bu program yardımıyla optimal kontrol fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$\begin{aligned}\varphi_{250} = {} & 0.00134242\sin(15.70796327\,x) + 0.00859668\sin(9.424777962\,x)\\ & - 0.00037644\sin(25.13274123\,x) - 0.00148524\sin(18.84955592\,x)\\ & + 0.06814824\sin(3.141592654\,x) - 0.03968284\sin(6.283185308\,x)\\ & - 0.00032149\sin(31.41592654\,x) + 0.00024578\sin(28.27433389\,x)\\ & - 0.00299971\sin(12.56637062\,x) + 0.00061268\sin(21.99114858\,x).\end{aligned}$$

Ayrıca bu optimal kontrol için $I_{0.1}^{1}\left(\varphi_{250}\right)$ ve $I_{0.1}^{2}\left(\varphi_{250}\right)$ değerleri

$$I_{0.1}^{1}\left(\varphi_{250}\right) = 0.00005173,\; I_{0.1}^{2}\left(\varphi_{250}\right) = 0.05881965$$

şeklindedir.

Aşağıdaki tabloda farklı α değerleri için $I_{\alpha}^{1}\left(\varphi\right)$, $I_{\alpha}^{2}\left(\varphi\right)$ fonksiyonellerinin değerleri ve φ_{3}^{*} optimal kontrolünün değerleri verilmiştir.

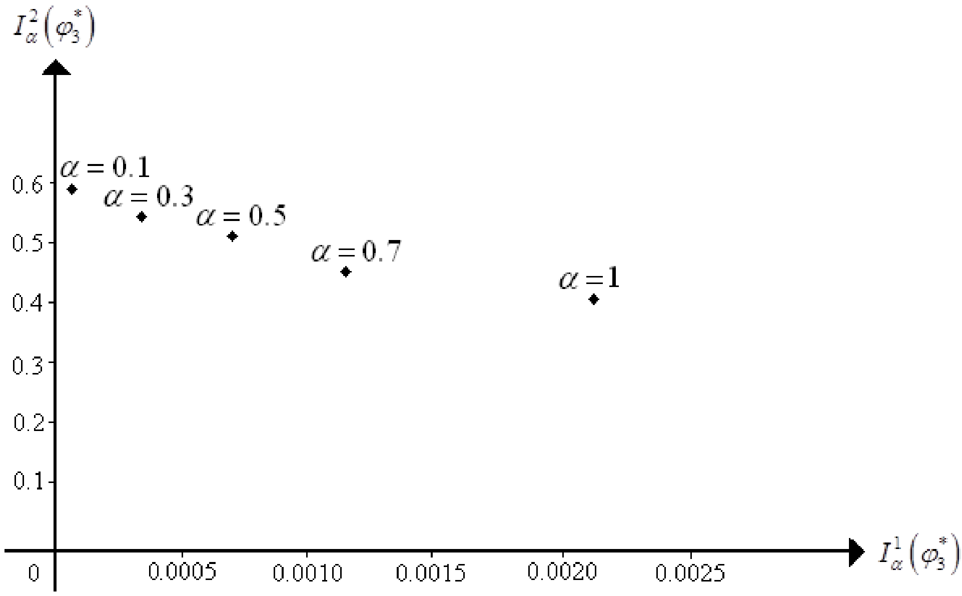
Çizelge 3.1. Örnek 3.4.1 için farklı α seçimlerinde optimal kontrolün, $I_{\alpha}^{1}\left(\varphi\right)$ ve $I_{\alpha}^{2}\left(\varphi\right)$ fonksiyonellerin değerleri

α	$I_{\alpha}^{1}\left(\varphi_{3}^{*}\right)$	$I_{\alpha}^{2}\left(\varphi_{3}^{*}\right)$	φ_{3}^{*}
0.5	0.0006646	0.0501680	$0.06066266\sin(3.14159265x)-0.03734277\sin(6.28318530x)$ $+0.00825020\sin(9.42477796x)-0.00290788\sin(12.5663706x)$ $+0.00130929\sin(15.7079632x)-0.00145454\sin(18.8495559x)$ $+0.00060179\sin(21.9911485x)-0.00037057\sin(25.1327412x)$ $+0.00024238\sin(28.2743338x)-0.00031746\sin(31.4159265x)$
0.3	0.0002760	0.0542008	$0.06418794\sin(3.14159265x)-0.03847726\sin(6.28318530x)$ $+0.00841988\sin(9.42477796x)-0.00295308\sin(12.5663706x)$ $+0.00132564\sin(15.7079632x)-0.00146973\sin(18.8495559x)$ $+0.00060719\sin(21.9911485x)-0.00037348\sin(25.1327412x)$ $+0.00024407\sin(28.2743338x)-0.00031946\sin(31.4159265x)$
0.1	0.0000517	0.0588196	$0.06814824\sin(3.14159265x)-0.03968284\sin(6.28318530x)$ $+0.00859668\sin(9.42477796x)-0.00299971\sin(12.5663706x)$ $+0.00134242\sin(15.7079632x)-0.00148524\sin(18.8495559x)$ $+0.00061268\sin(21.9911485x)-0.00037644\sin(25.1327412x)$ $+0.00024579\sin(28.2743338x)-0.00032149\sin(31.4159265x)$

Çizelge 3.1. (devam)

0.03	0.00002314	0.06059838	$0.06965236\sin(3.14159265x)-0.04012284\sin(6.28318530x)$ $+0.00866032\sin(9.42477796x)-0.00301638\sin(12.5663706x)$ $+0.00134839\sin(15.7079632x)-0.00149075\sin(18.8495559x)$ $+0.00061463\sin(21.9911485x)-0.00037749\sin(25.1327412x)$ $+0.00024640\sin(28.2743338x)-0.00032220\sin(31.4159265x)$
0.01	0.00002053	0.06112368	$0.06814824\sin(3.14159265x)-0.03968284\sin(6.28318530x)$ $+0.00859668\sin(9.42477796x)-0.00299971\sin(12.5663706x)$ $+0.00134242\sin(15.7079632x)-0.00148524\sin(18.8495559x)$ $+0.00061268\sin(21.9911485x)-0.00037644\sin(25.1327412x)$ $+0.00024579\sin(28.2743338x)-0.00032149\sin(31.4159265x)$
0.001	0.00002020	0.06133626	$0.07029513\sin(3.14159265x)-0.04030800\sin(6.28318530x)$ $+0.00868697\sin(9.42477796x)-0.00302334\sin(12.5663706x)$ $+0.00135088\sin(15.7079632x)-0.00149304\sin(18.8495559x)$ $+0.00061544\sin(21.9911485x)-0.00037793\sin(25.1327412x)$ $+0.00024665\sin(28.2743338x)-0.00032250\sin(31.4159265x)$

Bazı α değerleri için $I_\alpha^1(\varphi)$ ve $I_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyonellerin aldığı değerlerin şekil üzerinde gösterimi aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.1. Bazı α değerleri için $I_\alpha^1(\varphi)$ ve $I_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyonellerin değerleri

Örnek 3.4.2:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = -4(t+1)\begin{cases} 15x-13 & 0 \le x < 1,\ t \in (0,2] \\ 1 & 1 \le x < 2,\ t \in (0,2] \\ 0 & 2 \le x < 3,\ t \in (0,2] \end{cases}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(5x^3 - 13x^2 + 9x\right) & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 & 1 \le x \le 2 \\ 0 & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0,\ \ u(3,t) = 0,\ \ t \in (0,2]$$

probleminde

$$J_{\alpha}^{3}(\varphi)=\int_{0}^{3}\left[u_t(x,2;\varphi)-\left(\begin{cases}\frac{1}{2}\left(5x^3-13x^2+9x\right) & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2-2x+2 & 1\le x\le 2\\ 0 & 2\le x<3\end{cases}\right)\right]^2 dx$$

$$+\int_{0}^{3}\left[u_x(x,2;\varphi)-\left(3\begin{cases}\frac{1}{2}\left(15x^2-26x+9\right) & 0\le x\le 1\\ x-2 & 1\le x\le 2\\ 0 & 2\le x<3\end{cases}\right)\right]^2 dx$$

$$+\int_{0}^{3}\varphi_x^2 dx$$

fonksiyonelini minimum yapma problemini düşünelim.

Öncelikle amaç fonksiyonelini

$$I_{\alpha}^{1}(\varphi)=\int_{0}^{3}\left[u_t(x,2;\varphi)-\left(\begin{cases}\frac{1}{2}\left(5x^3-13x^2+9x\right) & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2-2x+2 & 1\le x\le 2\\ 0 & 2\le x<3\end{cases}\right)\right]^2 dx$$

$$+\int_{0}^{3}\left[u_x(x,2;\varphi)-\left(3\begin{cases}\frac{1}{2}\left(15x^2-26x+9\right) & 0\le x\le 1\\ x-2 & 1\le x\le 2\\ 0 & 2\le x<3\end{cases}\right)\right]^2 dx$$

ve

$$I_{\alpha}^{2}(\varphi)=\int_{0}^{3}\varphi_{x}^{2}dx$$

fonksiyonelleri için

$$J_{\alpha}^{3}(\varphi)=I_{\alpha}^{1}(\varphi)+\alpha I_{\alpha}^{2}(\varphi)$$

şeklinde yeniden yazalım.

Düzenleme parametresi $\alpha=0.2$ ve başlangıç elemanı $\varphi_0=0$ alınırsa aşağıdaki MAPLE® programı yardımıyla minimalleştirici dizi elde edilir. Bu örnekte $\beta_k=0.015,\ N=10$ ve durdurma kriteri 0.5×10^{-6} olarak seçilmiştir.

```
> a:=2.:l:=3.:
>psi:= PIECEWISE([5/2*x^3-13/2*x^2+9/2*x, -x <= 0 and x-1 <= 0],[1/2*x^2-
2*x+2, 1-x <= 0 and x-2 <= 0],[0, 2-x <= 0 and x-3 <= 0]);
> F:= PIECEWISE([-4*(t+1)*(15*x-13), x < 1],[-4*t-4, x < 2],[0, 2 < x]);
> y1:=PIECEWISE([5/2*x^3-13/2*x^2+9/2*x, -x <= 0 and x-1 <= 0],[1/2*x^2-
2*x+2, 1-x <= 0 and x-2 <= 0],[0, 2-x <= 0 and x-3 <= 0]);
>y2:= 3*PIECEWISE([15/2*x^2-13*x+9/2, x <= 1],[x-2, x <= 2],[0, 2 < x]);
> eps:=.5e-6:M:=800:beta:=0.015:T:=2.:alpha:=0.2:N:=10:
The following procedure solves the generalized solution by Galerkin method using
trigonometric basis functions
> uapproximate:=proc(phi,N,psi,F,a,l):
> ph:=array(1..N):
> for n from 1 to N do
> ph[n]:=sqrt(2/l)*sin(n*Pi*x/l):
> tph[n]:=diff(ph[n],x):
> od:
> for r from 1 to N do
> A[r]:=evalf(dsolve({diff(y(t),t,t)+(a*r*Pi)^2*y(t)
=int(F*ph[r],x=0..l),y(0)=evalf(Int(phi*ph[r],x=0..l)),
D(y)(0)=evalf(Int(psi*ph[r],x=0..l))})*ph[r]):
> od:
> uyak:=evalf(rhs(sum('A[r]','r'=1..N))):
> end:
The following procedure solves the adjoint problem by Galerkin method using
trigonometric basis functions
```

```
> zapproximate:=proc(phi,N,psi,F,a,l,y1,y2)
> T:=2:
> ph:=array(1..N):
> for n from 1 to N do
> ph[n]:=sqrt(2/l)*sin(n*Pi*x/l):
> tph[n]:=diff(ph[n],x):
> od:
> utau:=subs(t=T-tau,uapproximate(phi,N,psi,F,a,l));
> p1:=simplify(evalf(-2*(subs(tau=0,diff(utau,tau))+y1))):
> p2:=simplify(evalf(-2/a^2*(subs(tau=0,diff(utau,x))-y2))):
> for r from 1 to N do
> B[r]:=evalf(dsolve({diff(y(tau),tau,tau)+(a*r*Pi)^2*y(tau)
=0,y(0)=evalf(Int(p2*tph[r]/sqrt(int((tph[r])^2,x=0..l)),x=0..l)),
D(y)(0)=evalf(Int(p1*ph[r],x=0..l))})*ph[r]):
> od;
> ztau:=evalf(rhs(sum('B[r]','r'=1..N)));
> zyak:=simplify(subs(tau=T-t,ztau));
> end:
The following procedure gives the gradient of the functional
> gradient:=proc(alpha,phi,N,psi,F,a,l,y1,y2):
> gradient:=(-a^2*subs(t=0,zapproximate(phi,N,psi,F,a,l,y1,y2))+2*alpha*phi):
> end:
The initial element
> phi[0]:=0:
The value of the functional for the initial element
> func[0]:=evalf(Int((subs(t=T,diff(uapproximate(phi[0],N,psi,F,a,l),t))-
y1)^2,x=0..l)+Int((subs(t=T,diff(uapproximate(phi[0],N,psi,F,a,l),x))-
y2)^2,x=0..l)+alpha*Int(diff(phi[0],x)^2,x=0..l)):
The minimizing sequence and functional values
> for j from 0 to M-1 do
> phi[j+1]:=simplify(phi[j]-beta*gradient(alpha,phi[j],N,psi,F,a,l,y1,y2)):
> func[j+1]:=evalf(Int((subs(t=T,diff(uapproximate(phi[j+1],N,psi,F,a,l),t))-
y1)^2,x=0..l)+Int((subs(t=T,diff(uapproximate(phi[j+1],N,psi,F,a,l),x))-
y2)^2,x=0..l)+alpha*Int(diff(phi[j+1],x)^2,x=0..l)):
The stopping criteria
> if(func[j+1]-func[j]>-eps) then break fi:
> od;
>phi[j+1];
```

Bu program kullanılarak 37 iterasyondan sonra optimal kontrol fonksiyonu

$$\begin{aligned}\varphi_{37} &= 0.02815886\sin(9.42477796\,x) + 0.71530518\sin(3.14159265\,x)\\ &+ 0.60922355\sin(1.04719755\,x) + 0.99053011\sin(2.09439510\,x)\\ &+ 0.36120182\sin(4.18879020\,x) + 0.19210117\sin(5.23598775\,x)\\ &+ 0.02095115\sin(10.4719755\,x) + 0.10849356\sin(6.28318530\,x)\\ &+ 0.05138069\sin(7.33038285\,x) + 0.03214310\sin(8.37758041\,x)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $I_{0.2}^{1}\left(\varphi_{37}\right) = 0.7368431097$ ve $I_{0.2}^{2}\left(\varphi_{37}\right) = 20.78884275$ şeklindedir.

Aşağıdaki tabloda farklı α değerleri için $I_{\alpha}^{1}\left(\varphi\right)$, $I_{\alpha}^{2}\left(\varphi\right)$ fonksiyonellerinin değerleri ve φ_3^* optimal kontrolünün değerleri verilmiştir:

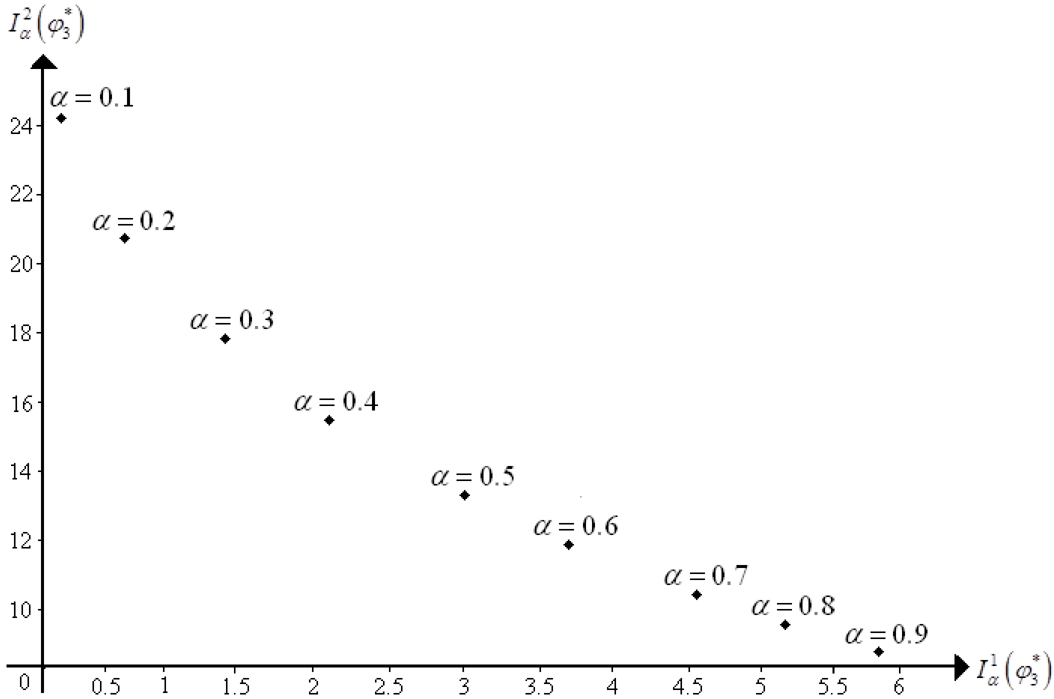
Çizelge 3.2. Örnek 3.4.2 için farklı α seçimlerinde optimal kontrolün, $I_\alpha^1(\varphi)$ ve $I_\alpha^2(\varphi)$ fonksiyonellerin değerleri

α	$I_\alpha^1(\varphi_3^*)$	$I_\alpha^2(\varphi_3^*)$	φ_3^*
0.9	5.78860382	8.69671794	$0.02889657\sin(8.37758041x)+0.04493685\sin(7.33038285x)$ $+0.24991184\sin(1.04719755x)+0.52713734\sin(2.09439510x)$ $+0.45790546\sin(3.14159265x)+0.26256973\sin(4.18879020x)$ $+0.15223865\sin(5.23598775x)+0.09116834\sin(6.28318530x)$ $+0.02580495\sin(9.42477796x)+0.01946190\sin(10.4719755x)$
0.6	3.70770920	11.9063673	$0.32482219\sin(1.04719755x)+0.03043404\sin(8.37758041x)$ $+0.04796407\sin(7.33038285x)+0.65182517\sin(2.09439510x)$ $+0.54263121\sin(3.14159265x)+0.30032478\sin(4.18879020x)$ $+0.16919357\sin(5.23598775x)+0.02014690\sin(10.4719755x)$ $+0.02690906\sin(9.42477796x)+0.09904027\sin(6.28318530x)$
0.2	0.73684310	20.7888427	$0.02815886\sin(9.42477796x)+0.71530518\sin(3.14159265x)$ $+0.60922355\sin(1.04719755x)+0.99053011\sin(2.09439510x)$ $+0.36120182\sin(4.18879020x)+0.19210117\sin(5.23598775x)$ $+0.02095115\sin(10.4719755x)+0.10849356\sin(6.28318530x)$ $+0.05138069\sin(7.33038285x)+0.03214310\sin(8.37758041x)$

Çizelge 3.2. (devam)

0.04	0.26519950	25.3541218	$0.03275462\sin(8.37758041x)+0.92069918\sin(1.04719755x)$ $+0.05250012\sin(7.33038285x)+1.14670525\sin(2.09439510x)$ $+0.02863498\sin(9.42477796x)+0.19820000\sin(5.23598775x)$ $+0.11127608\sin(6.28318530x)+0.02127006\sin(10.4719755x)$ $+0.76666431\sin(3.14159265x)+0.37689906\sin(4.18879020x)$
0.02	0.25964159	25.7401337	$0.05264297\sin(7.33038285x)+0.02869561\sin(9.42477796x)$ $+0.93896719\sin(1.04719755x)+1.15756155\sin(2.09439510x)$ $+0.77151420\sin(3.14159265x)+0.02131060\sin(10.4719755x)$ $+0.37869007\sin(4.18879020x)+0.03283263\sin(8.37758041x)$ $+0.19895419\sin(5.23598775x)+0.11162916\sin(6.28318530x)$
0.002	0.25769444	26.0957452	$0.95568491\sin(1.04719755x)+0.02875041\sin(9.42477796x)$ $+0.02134722\sin(10.4719755x)+0.19963788\sin(5.23598775x)$ $+0.11194885\sin(6.28318530x)+0.05277220\sin(7.33038285x)$ $+0.03290315\sin(8.37758041x)+0.77593184\sin(3.14159265x)$ $+1.16750459\sin(2.09439510x)+0.38031659\sin(4.18879020x)$

Aşağıda bazı α değerleri için $I_{\alpha}^{1}(\varphi)$ ve $I_{\alpha}^{2}(\varphi)$ fonksiyonellerinin alacağı değerlerin şekil üzerinde gösterimi verilmiştir:



Şekil 3.2. Bazı α değerleri için $I_{\alpha}^{1}(\varphi)$ ve $I_{\alpha}^{2}(\varphi)$ fonksiyonellerinin değerleri

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin üçüncü bölümüne hiperbolik bir denklem için değişik fonksiyonellerle oluşturulmuş optimal kontrol problemleri ifade edilerek başlanılmıştır. Hiperbolik denklemin genelleştirilmiş çözümü tanımlanarak, bu çözümün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

İkinci olarak ise tanımlanan optimal kontrol problemlerinin her birinin çözümünün varlığı ve tekliği ayrı ayrı ispat edilmiştir. Daha sonra optimal çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kurulmuştur ve kurulan dizinin optimal çözüme yakınsama hızını veren teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Son olarak elde edilen sonuçların doğruluğunu anlayabilmek için incelenen optimal kontrol problemlerinden bir tanesi ele alınıp bir Maple® programı oluşturulmuştur ve bu program nümerik örnekler üzerinde test edilerek çözüm sembolik olarak elde edilmiştir.

5. SONUÇ

Bu tezde ele alınan optimal kontrol problemleri, kontrol fonksiyonun denklemde bulunduğu yer ve amaç fonksiyonellerinin seçimi açısından önceki çalışmalardan oldukça farklıdır. Literatürdeki çalışmalarda kontrol fonksiyonlarının hemen hepsi sistemin başlangıç konumunun dışındaki fonksiyonlardır ve bunlar için uygun seçilmiş amaç fonksiyonelleriyle optimal çözüm araştırılmıştır.

Hiperbolik denklem için başlangıç konumunun kontrolünde dikkat edilmesi gereken önemli bir husus da kontrollerin aranması gereken uzayın belirlenmesidir. Başlangıç konum fonksiyonunun ait olduğu uzay denklemde yer alan diğer fonksiyonların uzayından daha güçlü olmalıdır. Verilen genelleştirilmiş çözüm tanımı da göz önüne alınarak aday kontrol fonksiyonlarının kümesi belirlenmiş ve çalışılacak normlar seçilmiştir. Ayrıca bu seçime uygun olarak amaç fonksiyonelleri, gradyenleri elde edilebilecek şekilde, literatürdeki amaç fonksiyonellerinden farklı olarak seçilmiştir.

Ayrıca bu konuda kullanılabilecek uygun paket programının da olmadığını söyleyebiliriz. Literatürde optimizasyon teorisi için yazılmış paket programlar fonksiyon uzaylarındaki kontroller için kullanışlı değildir. Bu çalışmada bu problemlerden bir tanesi için Maple® programı kullanılarak, optimal kontrolü veren bir paket program sunulmuştur.

Bu çalışma hiperbolik denklemlerde başlangıç konumunun kontrolüne ait teorik ve nümerik sonuçların verildiği bir çalışma niteliğindedir. Bu yüzden evrensel akademik bilgi birikimine büyük katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

Benamou, J.D., 1999. Domain decomposition, optimal control of systems governed by partial differential equations, and synthesis of feedback laws. Journal of Optimization Theory and Applications, 102 (1), 15-36.

Bloshanskaya, L.I. and Smirnov, I.N., 2009. Optimal boundary control by an elastic force at one end and a displacement at the other end for n arbitrary sufficiently large time interval in the string vibration problem. Differential Equations, 45 (6), 878-888.

Feng, X., Lenhart, S., Protopopescu, V., Rachele, L. and Sutton, B., 2003. Identification problem for the wave equation with Neumann data input and Drichlet data observations. Nonlinear Analysis, 52, 1777-1795.

Gugat, M., 2008. Optimal switching boundary control of a string to rest in finite time. Z.Angew Math.Mech, 88(4), 283-305.

Hasanov, A., 2009. Simultaneous determination of the source in a linear hyperbolic problem from the final overdetermination: weak solution approach. IMA Journal of Applied Mathematics, 74, 1-19.

Hasanoğlu (Hasanov), Alemdar., 2010. Kısmi Türevli Denklemler. Literatür Yayıncılık, 430 s, İstanbul.

Hunter, J. K. and Nachtergaele, B., 2001. Applied Analysis. World Scientific, 439 p, Singapore.

İskenderov, A. D., Tagıev, R. G. and Yagubov, G. Ya., 2002. Optimalleştirme Metodları. Çaşıoğlu, 400 s, Bakü.

Kowalewski, A., 2011. Optimal Control via Initial State of an Infinite Order Time Delay Hyperbolic System. Proceedings of the 18th International Conference on Process Control, 14-17 June, Tatranska Lomnica, Slovakia.

Ladyzhenskaya, O.A., 1985. Boundary Value Problems in Mathematical Physics. Springer-Verlag, 322 p, New York.

Lions, J.L., 1971. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 100 p, New York.

Mordukhovich, B.S. and Raymond, J.P, 2004. Dirichlet boundary control of hyperbolic equations in the presence of state constraints. Applied Mathematics Optimization, 49, 145-157.

Münch, A., Periago, F. and Pedregal, P., Preprint 2/2006. Optimal design of the damping set fort he stabilization of the wave equation. Universidad de Castilla-La Manchha.

Negreanu, M. and Zuazua, E., 2003. Uniform boundary controllability of a discrete 1-d wave equation. Systems&Control Letters, 48, 261-279.

Periago, F., 2009. Optimal shape and position of the support for the internal exact control of a string. Systems&Control Letters, 58, 136-140.

Smyshlyaev, A. and Krstic, M., 2009. Boundary control of an anti-stable wave equation with anti-damping on the uncontrolled boundary. Systems&Control Letters, 58, 617-623.

Subaşı, M., 2002. An optimal control problem governed by the potential of a linear Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation, 131-1, 95-106.

Subaşı, M., 2004. A Variational method of optimal control problems for nonlinear Schrödinger equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 20(1), 82-89.

Subaşı, M. and Saraç, Y., 2012. A minimizer for optimizing the initial velocity in a wave equation. Optimization, 61(3), 327-333.

Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A., 1963. Equations of Mathematical Physics. Dover Publications, 765 p, New York.

Vasilyev, F.P., 1981. Ekstremal problemlerin Çözüm Metotları. Nauka, 400 s, Moskova. (Rusça)

Yamamoto, M., 1995. Stability, reconstruction formula and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method. Inverse Problems, 11, 481-495.

Zeidler, E., 1995. Applied Functional Analysis. Springer Verlag, 404 p, New York.

Zhang, X., Zheng, C. and Zuazua, E., 2009. Time discete wave equations: boundary observability and control. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 23, 1&2,571-604.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Gümüşhane'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Gümüşhane'de tamamladı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Bölümü'nde yükseköğrenimine başlayarak, 2007 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında doktora öğrenimine başladı.

2009 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.