分类号: O175　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　密级: 无
单位代码: 10028　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　学号: 2190501018

首都师范大学博士学位论文

两相流方程组的适定性与渐近行为

Well-Posedness and Asymptotic Behaviors of Two-Phase Flow

研 究 生　寿 凌 云

指导教师　李 海 梁 研 究 员

学科专业　应 用 数 学

学科方向　偏 微 分 方 程

2022 年 3 月

首都师范大学学位论文原创性声明

本人郑重声明: 所呈交的学位论文, 是本人在导师的指导下, 独立进行研究工作所取得的成果. 除文中已经注明引用的内容外, 本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明. 本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担.

学位论文作者签名:

日期: 2022 年 6 月 1 日

首都师范大学学位论文授权使用声明

本人完全了解首都师范大学有关保留, 使用学位论文的规定, 学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版. 有权将学位论文用于非赢利目的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅. 有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索. 有权将学位论文的标题和摘要汇编出版. 保密的学位论文在解密后适用本规定.

学位论文作者签名:

导师签名:

日期: 2022 年 6 月 1 日

摘 要

本博士论文主要考虑两相流方程组, 包括可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组、drift-flux 方程组、可压缩 Navier-Stokes-Euler 方程组等, 重点研究其柯西问题或周期域上初值问题解的整体适定性和渐近行为. 此外, 本博士论文也研究具有趋化性的双曲-抛物方程组柯西问题解的整体适定性和最优时间衰减速率. 主要内容如下:

在第一章, 我们首先从描述流体-粒子混合运动的可压缩 Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck 方程组出发, 导出几类两相流方程组, 包括可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组、drift-flux 方程组、可压缩 Navier-Stokes-Euler 方程组等. 其次, 我们介绍上述两相流方程组和具有趋化性的双曲-抛物方程组的应用科学背景和相关研究进展. 最后, 我们给出本博士论文的主要研究结果.

在第二章, 我们考虑可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组在一维空间周期域上的初值问题, 研究其弱解 (ρ,u,F) 的整体适定性和渐近行为, 其中 $\rho=\rho(x,t)$ 和 $u=u(x,t)$ 分别表示流体的密度和速度, $F=F(x,v,t)$ 为粒子的分布函数. 对一般初值 $(\rho_0,u_0,F_0)\in W^{1,\infty}(\mathbb{T})\times H^1(\mathbb{T})\times L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$, 我们通过引入一个新的有效速度

$$u(x,t)+\int_0^x n(y,t)dy,$$

其中 $n(x,t):=\int_{\mathbb{R}}F(x,v,t)dv$, 建立了密度 ρ 的一致上下界, 最终证明该问题存在唯一的整体弱解 (ρ,u,F). 此外, 我们还证明密度和速度 (ρ,u) 在空间 $L^\infty(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})$ 中以时间指数速率收敛到由初值决定的平衡态 (ρ_c,u_c), 且分布函数 F 在 1-Wasserstein 度量下以时间指数速率收敛到 $n\delta(v-u_c)$, 其中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 测度 (参见定理 1.3.1). 类似的方法也可以用于研究一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck 方程组在周期域上初值问题解的整体适定性和长时行为 (参见定理 1.3.4).

在第三章, 我们考虑带二元非单调压力函数的 drift-flux 方程组在高维周期域上的初值问题, 研究其弱解 $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 的整体存在性, 其中 $\rho=\rho(x,t)$ 和 $n=n(x,t)$ 表示两种流体的密度, $u=u(x,t)$ 表示两种流体共同的速度, 二元非单调压力函数 $P(\rho,n)$ 满足 $P(\rho,n)\sim\rho^\gamma+n^\alpha$ $(\rho,n\to\infty)$. 当 $\gamma,\alpha\geq\frac{3d}{d+2}$ $(d=2,3)$ 或者 $\gamma,\alpha>\frac{d}{2}$ $(d\geq4)$ 时, 对一般能量有限的初值 (ρ_0,n_0,m_0), 我们证明该问题存在一个能量有限的整体弱解 $(\rho,n,(\rho+n)u)$ (参见定理 1.3.8 和 1.3.10). 该证明的关键是基于压力函数 $P(\rho_\delta,n_\delta)$ 的先验估计, 建立当 $\delta\to0$ 时密度 (ρ_δ,n_δ) 强收敛到 (ρ,n) 的紧性估计. 然而, 二元非单调压力函数 $P(\rho_\delta,n_\delta)$ 不满足已有文

献 [29, 87, 164, 190, 209, 214] 等中建立压力函数的相关先验估计所需的条件, 这导致了建立密度紧性估计的本质困难. 为克服该困难, 我们引入如下一般性分解:

$$
\begin{aligned}
&P(\rho_\delta^x, n_\delta^x) - P(\rho_\delta^y, n_\delta^y) \\
&\quad = \left.\begin{aligned} &P(\rho_\delta^x, n_\delta^x) - P(A^x\vartheta_\delta^x, B^x\vartheta_\delta^x) \\ &\quad + P(A^y\vartheta_\delta^y, B^y\vartheta_\delta^y) - P(\rho_\delta^y, n_\delta^y) \\ &\quad + P(A^x\vartheta_\delta^y, B^x\vartheta_\delta^y) - P(A^y\vartheta_\delta^y, B^y\vartheta_\delta^y) \end{aligned}\right\} \sim o(1)\ (\delta \to 0,\ x \to y) \\
&\qquad + P(A^x\vartheta_\delta^x, B^x\vartheta_\delta^x) - P(A^x\vartheta_\delta^y, B^x\vartheta_\delta^y),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 $(f^x, g^y) := (f(x,t), g(y,t))$, $\vartheta_\delta := \rho_\delta + n_\delta$,

$$
(A, B) := \begin{cases} (\frac{\rho}{\rho+n}, \frac{n}{\rho+n}), & 若\ \rho + n > 0, \\ (0, 0), & 若\ \rho + n = 0. \end{cases}
$$

从而, 我们可以将关于二元非单调压力函数 $P(\rho_\delta, n_\delta)$ 的先验估计转化为关于单变量 ϑ_δ 的非单调压力函数 $P(A^x\vartheta_\delta, B^x\vartheta_\delta)$ 以及相关的扰动来处理, 进而建立了当 $\delta \to 0$ 时密度 (ρ_δ, n_δ) 强收敛到 (ρ, n) 的紧性估计 (参见小节 3.4.2). 分解 (1) 给出了建立二元非单调压力函数先验估计的一般框架; 特别地, 当 $\rho_\delta = n_\delta$ 时, 分解 (1) 等同于已有文献 [29] 中关于一元非单调压力函数先验估计所对应的分解.

在第四章, 我们考虑高维可压缩 Navier-Stokes-Euler 方程组的柯西问题, 研究其强解 (ρ, u, n, w) 在临界 Besov 空间中的整体适定性和最优时间衰减速率, 其中 $\rho = \rho(x,t)$ 和 $u = u(x,t)$ 分别表示等熵可压缩 Navier-Stokes 方程组的密度和速度, $n = n(x,t)$ 和 $w = w(x,t)$ 分别表示等温可压缩 Euler 方程组的密度和速度. 当初值 (ρ_0, u_0, n_0, w_0) 是关于平衡态 $(\bar\rho, 0, \bar n, 0)$ 在临界 Besov 空间 $\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2} \times \dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2-1} \times \dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2+1} \times \dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2+1}$ $(d \geq 2)$ 中的小扰动时, 我们证明该问题存在唯一的整体强解 (ρ, u, n, w) (参见定理 1.3.14). 此外, 如果初始扰动 $(\rho_0 - \bar\rho, u_0, n_0 - \bar n, w_0)$ 的低频部分还在 Besov 空间 $\dot B_{2,\infty}^{-\frac d2}$ 中充分小, 我们证明该整体解 (ρ, u, n, w) 以最优时间代数速率收敛到平衡态 $(\bar\rho, 0, \bar n, 0)$:

$$
\|(\rho - \bar\rho, u, n - \bar n, w)(t)\|_{\dot B_{2,1}^\sigma} \lesssim (1+t)^{-\frac d4 - \frac\sigma2}, \quad \sigma \in (-\frac d2, \frac d2], \quad d \geq 2,
$$

并且相对速度 $u - w$ 有更快的时间衰减速率 (参见定理 1.3.18):

$$
\|(u - w)(t)\|_{\dot B_{2,1}^\sigma} \lesssim (1+t)^{-\frac d4 - \frac12 - \frac\sigma2}, \qquad \sigma \in (-\frac d2, \frac d2], \quad d \geq 2.
$$

这些结果揭示了 drag force 项的阻尼作用和粘性项的耗散作用对可压缩 Navier-Stokes-Euler 方程组整体解的正则性和渐近行为的影响. 类似的方法也可以用于研究高维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck 方程组柯西问题解的整体适定性和最优时间衰减速率 (参见定理 1.3.22).

在第五章, 我们考虑具有趋化性的高维双曲-抛物方程组的柯西问题, 研究其经典解 (ρ, u, ϕ) 在临界 Besov 空间中的整体适定性和最优时间衰减速率, 并证明该方程组收敛到 Keller-Segel 方程组的松弛极限, 其中 $\rho=\rho(x,t)$ 和 $u=u(x,t)$ 分别表示细胞的密度和运动速度, $\phi=\phi(x,t)$ 表示化学物质的浓度. 首先, 当初值 (ρ_0,u_0,ϕ_0) 是关于平衡态 $(\bar{\rho},0,\bar{\phi})$ 在临界 Besov 空间 $\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1}\times\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1}\times\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+2}_{2,1}$ $(d\geq 1)$ 中的小扰动时, 我们证明该问题存在唯一的整体经典解 (ρ,u,ϕ), 并且建立了其与松弛参数 $\varepsilon\in(0,1)$ 无关的先验估计 (参见定理 1.3.27). 其次, 如果初始扰动 $(\rho_0-\bar{\rho},u_0,\phi_0-\bar{\phi})$ 的低频部分还在 Besov 空间 $\dot{B}^{-\frac{d}{2}}_{2,\infty}$ 中有界, 我们证明该整体解 (ρ,u,ϕ) 以最优时间代数速率收敛到平衡态 $(\bar{\rho},0,\bar{\phi})$ (参见定理 1.3.30):

$$\begin{cases}\|(\rho-\bar{\rho},u,\phi-\bar{\phi})(t)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\lesssim(1+t)^{-\frac{d}{4}-\frac{\sigma}{2}}, & \sigma\in(-\dfrac{d}{2},\dfrac{d}{2}], \quad d\geq 1,\\ \|(u,a\rho-b\phi)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\lesssim(1+t)^{-\frac{d}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}}, & \sigma\in(-\dfrac{d}{2},\dfrac{d}{2}-1], \quad d\geq 2,\end{cases}$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$ 分别表示化学物质的产生率和消耗率. 最后, 我们严格证明了该方程组收敛到 Keller-Segel 方程组的松弛极限, 即对该整体解 $(\rho,u,\phi)(x,t)$, 定义 $(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})(x,t):=(\rho,\frac{1}{\varepsilon}u,\phi)(x,\frac{1}{\varepsilon}t)$, 则当松弛参数 $\varepsilon\to 0$ 时, $(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})$ 强收敛到 (ρ^*,u^*,ϕ^*):

$$\|\rho^{\varepsilon}-\rho^*\|_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|u^{\varepsilon}-u^*\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\phi^{\varepsilon}-\phi^*\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\lesssim\varepsilon,$$

其中 (ρ^*,ϕ^*) 为 Keller-Segel 方程组柯西问题的整体强解, $u^*:=-\frac{1}{\rho^*}\nabla P(\rho^*)+\chi\nabla\phi^*$ (参见定理 1.3.33 和 1.3.34).

关键词: 两相流方程组, Navier-Stokes-Vlasov 方程组, drift-flux 方程组, Navier-Stokes-Euler 方程组, 趋化性, 整体适定性, 大时间行为, 松弛极限.

Abstract

In this thesis, we study the well-posedness and asymptotic behaviors of global solutions to either the Cauchy problem or the initial value problem in periodic domains for some two-phase flow models, including the compressible Navier-Stokes-Vlasov equations, the drift-flux equations, the compressible Navier-Stokes-Euler equations, etc. In addition, we investigate the well-posedness and optimal time-decay rates of global solutions to the Cauchy problem for a hyperbolic-parabolic model of chemotaxis. It contains the following chapters:

In Chapter 1, we first introduce the compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations for the fluid-particle motions to derive some two-phase flow models, for instance, the compressible Navier-Stokes-Vlasov equations, the drift-flux equations, and the compressible Navier-Stokes-Euler equations. Then, we list some related progress on these two-phase flow models and the hyperbolic-parabolic equations of chemotaxis. Finally, we state our main results of this thesis.

In Chapter 2, we investigate the global well-posedness and large time behaviors of the weak solution (ρ,u,F) to the initial value problem of the one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system in the spatial periodic domain, where $\rho=\rho(x,t)$ and $u=u(x,t)$ denote the density and velocity of the fluid, respectively, and $F=F(x,v,t)$ stands for the distribution function of the particles. For general initial data $(\rho_0,u_0,F_0)\in W^{1,\infty}(\mathbb{T})\times H^1(\mathbb{T})\times L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$, we introduce a new effective velocity

$$u(x,t)+\int_0^x n(y,t)dy$$

with $n(x,t):=\int_{\mathbb{R}}F(x,v,t)dv$ so as to establish the uniform upper and lower bounds of the density ρ, and then show that the initial value problem admits a unique global weak solution (ρ,u,F). In addition, it is proved that as the time grows up, the density and velocity (ρ,u) converge asymptotically to the constant equilibrium state (ρ_c,u_c) in $L^\infty(\mathbb{T})\times L^2(\mathbb{T})$, and the distribution function F converges asymptotically to $n\delta(v-u_c)$ in 1-Wasserstein distance, both at the exponential rate (cf. Theorem

1.3.1). Our method can also be applied to study the global well-posedness and long time behaviors of the one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations (refer to Theorem 1.3.4).

In Chapter 3, we deal with the global existence of weak solutions $(\rho, u, (\rho + n)u)$ to the initial value problem of the multi-dimensional drift-flux model with non-monotone pressure laws in the periodic domain, where $\rho = \rho(x,t)$ and $n = n(x,t)$ are the densities of two fluids, respectively, $u = u(x,t)$ stands for the common velocity of two fluids, and $P(\rho, n)$ denotes the non-monotone pressure function satisfying $P(\rho,n) \sim \rho^\gamma + n^\alpha$ as $\rho, n \to \infty$. For either $\gamma, \alpha \geq \frac{3d}{d+2}$ $(d = 2,3)$ or $\gamma, \alpha > \frac{d}{2}$ $(d \geq 4)$, we prove that the initial value problem has a global weak solution $(\rho, n, (\rho + n)u)$ with finite energy for general initial data (cf. Theorems 1.3.8 and 1.3.10). The key point of the proof is to show the strong convergence of the densities (ρ_δ, n_δ) to (ρ, n) as $\delta \to 0$ based on the uniform estimates of $P(\rho_\delta, n_\delta)$. However, since the non-monotone pressure function $P(\rho_\delta, n_\delta)$ does not satisfy the assumptions in previous important works [29, 87, 164, 190, 209, 214] on the uniform estimates of pressure functions, it is difficult to show the strong convergence of (ρ_δ, n_δ) to (ρ, n) as $\delta \to 0$. To overcome this difficulty, we make use of the decomposition

$$\begin{aligned}
&P(\rho_\delta^x, n_\delta^x) - P(\rho_\delta^y, n_\delta^y) \\
&\quad \left.\begin{aligned}
&= P(\rho_\delta^x, n_\delta^x) - P(A^x \vartheta_\delta^x, B^x \vartheta_\delta^x), \\
&\quad + P(A^y \vartheta_\delta^y, B^y \vartheta_\delta^y) - P(\rho_\delta^y, n_\delta^y), \\
&\quad + P(A^x \vartheta_\delta^y, B^x \vartheta_\delta^y) - P(A^y \vartheta_\delta^y, B^y \vartheta_\delta^y)
\end{aligned}\right\} \sim o(1)\ (\delta \to 0,\ x \to y) \qquad (1) \\
&\quad + P(A^x \vartheta_\delta^x, B^x \vartheta_\delta^x) - P(A^x \vartheta_\delta^y, B^x \vartheta_\delta^y)
\end{aligned}$$

with $(f^x, g^y) := (f(x,t), g(y,t))$, $\vartheta_\delta := \rho_\delta + n_\delta$ and

$$(A,B) := \begin{cases} (\frac{\rho}{\rho+n}\frac{n}{\rho+n}), & \text{if } \rho + n > 0, \\ (0,0), & \text{if } \rho + n = 0. \end{cases}$$

Therefore, we can estimate (1) by the non-monotone pressure function $P(A^x \vartheta_\delta, B^x \vartheta_\delta)$

of one variable ϑ_δ as well as some small perturbations, and finally establish the strong compactness of the densities (ρ_δ, n_δ) for $\delta \in (0,1)$ (cf. Section 3.4.2). The decomposition (1) is applicable for general pressure-density functions.

In Chapter 4, we study the well-posedness and optimal time-decay rates of the global strong solution (ρ, u, n, w) to the Cauchy problem of the multi-dimensional compressible Navier-Stokes-Euler equations in critical Besov spaces, where $\rho = \rho(x,t)$ and $u = u(x,t)$ denote the density and velocity of the isentropic compressible Navier-Stokes equations, and $n = n(x,t)$ and $w = w(x,t)$ stand for the density and velocity of the isothermal compressible Euler equations, respectively. First, if the initial data (ρ_0, u_0, n_0, w_0) is a small perturbation of the constant equilibrium state $(\bar{\rho}, 0, \bar{n}, 0)$ in the critical Besov space $\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}} \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1} \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}+1} \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}+1}$ for $d \geq 2$, we establish the global existence and uniqueness of the strong solution (ρ, u, n, w) to the Cauchy problem (cf. Theorem 1.3.14). In addition, if the initial data (ρ_0, u_0, n_0, w_0) further satisfies $\|(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0, n_0 - \bar{n}, w_0)^\ell\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{-\frac{d}{2}}} << 1$, it is shown that the global solution (ρ, u, n, w) converges to the equilibrium state $(\bar{\rho}, 0, \bar{n}, 0)$ at the optimal time rates:

$$\|(\rho - \bar{\rho}, u, n - \bar{n}, w)(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\sigma}} \lesssim (1+t)^{-\frac{d}{4}-\frac{\sigma}{2}}, \quad \sigma \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}], \quad d \geq 2,$$

and the relative velocity $u - w$ decays at the faster time rates (see Theorem 1.3.18):

$$\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\sigma}} \lesssim (1+t)^{-\frac{d}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}}, \qquad \sigma \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}], \quad d \geq 2.$$

These results imply that the relaxation drag force and the viscosity dissipation affect the regularity properties and long time behaviors of the global solution for the compressible Navier-Stokes-Euler equations. Our method can also be applied to study the global well-posedness and optimal time-decay rates of the multi-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations (cf. Theorem 1.3.22).

In Chapter 5, we investigate the well-posedness and optimal time-decay rates of the global classical solution (ρ, u, ϕ) to the Cauchy problem for the multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations of chemotaxis in critical Besov spaces, and justify the relaxation limit from the hyperbolic-parabolic equations of chemotaxis to the Keller-Segel equations, where ρ, u and ϕ denote the density of cells, the velocity of cells, and the concentration of the chemoattractant, respectively. First, for the initial data (ρ_0, u_0, n_0, w_0) near the constant equilibrium state $(\bar{\rho}, 0, \bar{\phi})$ in the critical Besov space $\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1} \times \dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1} \times \dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+2}_{2,1}$ for $d \geq 1$, we prove that the Cauchy problem admits a unique global classical solution (ρ, u, ϕ), which satisfies the estimates uniformly with respect to the relaxation parameter $\varepsilon \in (0,1)$ (cf. Theorem 1.3.27). Then, if the low-frequency part of the initial perturbation $(\rho_0 - \bar{\rho}, u_0, \phi_0 - \bar{\phi})$ is further bounded in $\dot{B}^{-\frac{d}{2}}_{2,\infty}$, we show that the global solution (ρ, u, ϕ) satisfies

$$\begin{cases} \|(\rho - \bar{\rho}, \phi - \bar{\phi})\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}} \lesssim (1+t)^{-\frac{d}{4}-\frac{\sigma}{2}}, & \sigma \in (-\dfrac{d}{2}, \dfrac{d}{2}], \qquad d \geq 1, \\ \|(u, a\rho - b\phi)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}} \lesssim (1+t)^{-\frac{d}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}}, & \sigma \in (-\dfrac{d}{2}, \dfrac{d}{2}-1], \quad d \geq 2. \end{cases}$$

where $a > 0$ and $b > 0$ denote the growth rate and death rate of the chemoattractant, respectively (cf. Theorem 1.3.30). Furthermore, we justify rigorously the relaxation limit from the hyperbolic-parabolic equations of chemotaxis to the Keller-Segel equations. To be more precise, for the global solution $(\rho, u, \phi)(x,t)$, we denote $(\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}, \phi^{\varepsilon})(x,t) := (\rho, \frac{1}{\varepsilon}u, \phi)(x, \frac{1}{\varepsilon}t)$ and prove that as the relaxation parameter $\varepsilon \to 0$, $(\rho^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}, \phi^{\varepsilon})$ converges strongly to (ρ^*, u^*, ϕ^*) in the sense

$$\|\rho^{\varepsilon} - \rho^*\|_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}) \cap L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|u^{\varepsilon} - u^*\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\phi^{\varepsilon} - \phi^*\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1} \cap \dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} \lesssim \varepsilon,$$

where (ρ^*, ϕ^*) is the unique global strong solution to the Cauchy problem for the Keller-Segel equations, and u^* is given by the law $u^* = -\frac{1}{\rho^*}\nabla P(\rho^*) + \chi \nabla \phi^*$ (cf. Theorems 1.3.33 and 1.3.34).

Keywords: Two-phase flow models, Navier-Stokes-Vlasov equations, drift-flux equations, Navier-Stokes-Euler equations, chemotaxis, global well-posedness, large time behavior, relaxation limit.

目录

摘要

Abstract

第一章 引言

1.1 模型背景 1
1.2 研究现状 4
1.3 主要结果 9
1.3.1 一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组 9
1.3.2 一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck 方程组 . . 11
1.3.3 高维 drift-flux 方程组 13
1.3.4 高维可压缩 Navier-Stokes-Euler 方程组 16
1.3.5 高维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck 方程组 . . 21
1.3.6 具有趋化性的双曲-抛物方程组 22

第二章 一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组的整体弱解

2.1 引言 29
2.2 先验估计 31
2.3 定理 1.3.1 的证明 44
2.3.1 整体存在性 44
2.3.2 唯一性 45
2.3.3 渐近行为 49

2.4 附录 52

第三章 高维 drift-flux 方程组的整体弱解

3.1 引言 53

3.2 逼近解的构造 56

3.3 人工粘性消失极限 60

3.4 人工压力消失极限 66

3.4.1 密度的可积性 66

3.4.2 密度的强收敛 69

3.4.3 定理 1.3.8 和 1.3.10 的证明 82

3.5 附录 84

第四章 高维 Navier-Stokes-Euler 方程组在临界 Besov 空间中的整体强解

4.1 引言 88

4.2 定理 1.3.14 的证明 92

4.2.1 低频估计 92

4.2.2 高频估计 97

4.2.3 整体存在性 103

4.2.4 唯一性 105

4.3 定理 1.3.16 的证明 108

4.3.1 低频 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 估计 108

4.3.2 时间加权能量估计 110

4.4 定理 1.3.18 的证明 117

4.5 附录 125

第五章 具有趋化性的双曲-抛物方程组在临界 Besov 空间中的整体经典解

5.1 引言 130

5.2 定理 1.3.27 的证明 135

5.2.1 低频估计 135

5.2.2 高频估计 140

5.2.3 整体存在性 147

5.2.4 唯一性 149
5.3 定理 1.3.30 的证明 150
5.3.1 低频 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 估计 150
5.3.2 时间加权能量估计 152
5.4 松弛极限 159
5.4.1 定理 1.3.33 的证明 159
5.4.2 定理 1.3.34 的证明 160
5.5 附录 164

参考文献

致谢

完成发表文章目录

第一章　引言

1.1　模型背景

两相流模型被广泛用于诸多现代应用科学领域, 如化学工程、生物技术、能源开发、地质勘探、航空航天和环境治理等 (参见 [4, 9, 15, 16, 19–21, 28, 32, 71, 133, 192, 220, 221]). 描述流体和粒子混合运动的两相流模型首先由 Williams [220, 221] 提出用以模拟燃烧现象. 这类流体-粒子两相流模型也可以用来模拟小液滴 (droplets) 或灰尘 (dust) 等微小颗粒分散在宏观流体中的运动规律, 如气溶胶 (aerosols) 和喷雾 (sprays) 等现象 (参见 [4, 9, 71, 192]), 或者模拟悬浮粒子在宏观流体中的分离和沉降 (参见 [15, 16]). 一些物种 (如鱼、鸟、细菌和昆虫等) 的群体行为 (collective behaviors) 也可通过流体-粒子两相流模型来刻画 (参见 [6, 7, 34, 36]).

可压缩 Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck (NS-VFP) 方程组是一个典型的流体-粒子两相流模型 (参见 [19, 32, 133, 192, 220, 221]), 它具有如下形式:

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \operatorname{div}_x \mathbb{T} = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \kappa(u-v) F \, dv, \\ F_t + v \cdot \nabla_x F + \operatorname{div}_v(\kappa(u-v)F - \kappa_* \nabla_v F) = 0, \quad (x,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $\rho = \rho(x,t) \geq 0$ 和 $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^d$ 分别表示流体的密度和速度, $F = F(x,v,t) \geq 0$ 表示粒子的分布函数, κ 和 κ_* 分别为拉力 (drag force) 系数和 Fokker-Planck 系数, 流体的应力张量 $\mathbb{T}$ 为

$$\mathbb{T} := P(\rho) - 2\mu \mathbb{D}(u) - \lambda \operatorname{div}_x u \mathrm{I_d},$$

此处 $P(\rho)$ 为仅依赖于 ρ 的压力函数, μ 和 λ 分别为剪切粘性系数和体积粘性系数, $\mathbb{D}(u) := \frac{1}{2}(\nabla_x u + (\nabla_x u)^T)$ 为形变张量, $\mathrm{I_d}$ 为 $d \times d$ 单位矩阵.

可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 由一个宏观流体方程组: 等熵可压缩 Navier-Stokes (NS) 方程组

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \operatorname{div} \mathbb{T} = 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

和一个介观动理学方程: Fokker-Planck 方程

$$F_t + v\cdot\nabla_x F - \kappa_* \Delta_v F = 0, \tag{1.1.3}$$

通过拉力 (drag force) 项 $\kappa(u-v)$ 相互耦合而成. 若 (1.1.1) 中不考虑流体和粒子的耦合作用, 即当 $\kappa = 0$ 时, (1.1.1) 可导出等熵可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 和 Fokker-Planck 方程 (1.1.3).

当 (1.1.1) 中的系数或粒子分布函数满足不同的条件时, 可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 可以导出很多相关的两相流方程组. 首先, 如果 $(1.1.1)_3$ 中粒子间的扩散作用 (布朗运动) 可以忽略, 即当 $\kappa_* = 0$ 时, (1.1.1) 变为可压缩 Navier-Stokes-Vlasov (NS-V) 方程组

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}_x(\rho u\otimes u) + \operatorname{div}_x \mathbb{T} = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \kappa(u-v) F\,dv, \\ F_t + v\cdot\nabla_x F + \operatorname{div}_v(\kappa(u-v)F) = 0. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

其次, 如果在 (1.1.1) 中设 $\kappa = \kappa_*$, 并且分布函数 F 取为局部 Maxwellian

$$M_{[n(x,t),u(x,t)]}(v) := \frac{n(x,t)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|v-u(x,t)|^2}{2}}, \tag{1.1.5}$$

其中 $n(x,t) := \int_{\mathbb{R}^d} F(x,v,t)dv$ 表示粒子分布函数 F 的宏观密度, $u(x,t)$ 为流体的速度, 那么我们对 $(1.1.1)_3$ 关于变量 v 在 $\mathbb{R}^d$ 上积分后有

$$n_t + \operatorname{div}(nu) = 0. \tag{1.1.6}$$

此外, 对 $(1.1.1)_3$ 乘以 v 后关于变量 v 在 $\mathbb{R}^d$ 上积分, 我们得到

$$(nu)_t + \operatorname{div}(nu\otimes u) + \nabla n = 0. \tag{1.1.7}$$

将 $(1.1.1)_2$ 和 (1.1.7) 相加后与 $(1.1.1)_1$ 及 (1.1.6) 联立, 我们有 drift-flux 方程组

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ n_t + \operatorname{div}(nu) = 0, \\ ((\rho+n)u)_t + \operatorname{div}((\rho+n)u\otimes u) + \nabla(P(\rho)+n) = \operatorname{div}(2\mu\mathbb{D}(u) + \lambda \operatorname{div}_x u \mathrm{I_d}). \end{cases} \tag{1.1.8}$$

Mellet 和 Vasseur [181] 严格证明了可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 收敛到 drift-flux 方程组 (1.1.8) 的流动力学极限. 当 $(1.1.8)_3$ 中的压力函数 $P(\rho)+n$ 换作一些其他二元压力函数 $P(\rho,n)$ 时, drift-flux 方程组 (1.1.8) 可以用于描述气体和液体两相混合流体的运动规律, 如石油管道、天然气管道、深水井、冷凝器等 (参见 [94, 131, 132, 213, 243]).

然后, 如果在 (1.1.1) 中设 $\kappa = \kappa_*$, 并且分布函数 F 取为局部 Maxwellian

$$M_{[n(x,t),w(x,t)]}(v) := \frac{n(x,t)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|v-w(x,t)|^2}{2}},$$

其中 n 和 nw 分别表示粒子分布函数 F 的宏观密度和宏观动量

$$n(x,t) := \int_{\mathbb{R}^d} F(x,v,t)dv, \qquad nw(x,t) := \int_{\mathbb{R}^d} vF(x,v,t)dv,$$

则类似于 (1.1.6)-(1.1.7), 我们可以从方程 $(1.1.1)_3$ 推导出

$$n_t + \operatorname{div}(nw) = 0, \tag{1.1.9}$$

以及

$$(nw)_t + \operatorname{div}(nw \otimes w) + \nabla n = \kappa n(u-w). \tag{1.1.10}$$

联立 $(1.1.1)_1$-$(1.1.1)_2$ 和 (1.1.9)-(1.1.10), 我们有可压缩 Navier-Stokes-Euler (NS-Euler) 方程组

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \operatorname{div} \mathbb{T} = -\kappa n(u-w), \\ n_t + \operatorname{div}(nw) = 0, \\ (nw)_t + \operatorname{div}(nw \otimes w) + \nabla n = \kappa n(u-w). \end{cases} \tag{1.1.11}$$

Choi 和 Jung [55] 严格证明了可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 收敛到可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11) 的流体动力学极限. 值得注意的是, 李海梁教授、王腾教授和王益教授 [161] 利用可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 的 Chapman-Enskog 展开导出可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11). 当(1.1.11) 中 $\kappa \to \infty$ 时, $u = w$ 成立, 从而可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11) 可以转化为 drift-flux 方程组 (1.1.8).

此外, 我们考虑具有趋化性的双曲-抛物方程组. 趋化性描述细胞对环境中化学物质刺激产生的定向运动, 在很多生物现象中广泛存在, 诸如细菌或变形虫的聚集、胚胎发育、肿瘤增长、血管生成 (参见 [2,2,3,14,40,42,58,92,111,185]) 等, 其中新生血管的生成可由一个带阻尼可压缩 Euler 方程组和一个非齐次热方程互相耦合而成的双曲-抛物方程组来描述 (参见 [2,92]):

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P(\rho) + \dfrac{1}{\varepsilon}\rho u - \chi \rho \nabla \phi = 0, \\ \phi_t - \Delta \phi - a\rho + b\phi = 0, \end{cases} \tag{1.1.12}$$

其中 $\rho=\rho(x,t)\geq 0$ 和 $u=u(x,t)\in\mathbb{R}^d$ 分别表示细胞的密度和运动速度, $\phi=\phi(x,t)\geq 0$ 刻画细胞分泌的化学物质浓度, $P(\rho)$ 为仅依赖于细胞密度 ρ 的压力函数, 常数 $\chi>0$ 描述细胞对化学物质的反应强度, $a>0$ 和 $b>0$ 分别表示化学物质的产生率和消耗率, $\varepsilon>0$ 为松弛参数. 双曲-抛物方程组 (1.1.12) 也可由一个非线性平均场 Fokker-Planck 方程导出 (参见 [41]). 当松弛参数 $\varepsilon\to 0$ 时, (1.1.12) 的细胞密度和化学物质浓度 (ρ,ϕ) 在尺度变换后收敛到 Keller-Segel 方程组 (参见 [41, 72]).

1.2 研究现状

等熵可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 可以从描述流体-粒子两相混合运动的可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 导出, 并且是本文研究的两相流方程组 (可压缩 NS-V 方程组 (1.1.4)、drift-flux 方程组 (1.1.8)、可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11) 等) 的重要组成部分. 因而, 在介绍本文研究的两相流模型相关进展之前, 我们首先回顾等熵可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 的部分研究成果.

关于一维等熵可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 的适定性和渐近行为的研究已有很多重要的成果 (参见 [76, 83, 108, 113, 122–126, 137–139, 142, 145, 160, 172, 175, 176, 182, 198, 199, 203] 等). 首先, 我们介绍一般初值情形的重要结果. 当粘性系数为常数时, 对一般不含真空的初值, Kanel [142] 和 Kazhikhov [145] 建立了初边值问题及柯西问题正则解的整体存在性和唯一性; Serre [198, 199] 和 Hoff [116] 证明了初边值问题及柯西问题有界弱解的整体存在性; 罗涛教授、辛周平教授和杨彤教授 [172] 证明了边界处包含真空的自由边界问题有唯一的整体弱解, 并得到了该弱解在自由边界附近的正则性和时间衰减速率; 当粘性系数为 $\mu(\rho)=\rho^\beta$ 时, 对初始密度有紧支集的情形, 刘太平教授、辛周平教授和杨彤教授 [166] 建立了自由边界问题强解的局部存在性和唯一性; 对 $0\leq\beta\leq 1$, 文献 [83, 107, 137, 182, 231, 232] 在不同边界条件下证明了对一般不含真空的初值正则解的整体存在性和唯一性; 对 $\beta>\frac{1}{2}$, 李海梁教授、李竞教授和辛周平教授 [160] 以及酒全森教授和辛周平教授 [138] 对一般包含真空的初值研究了 (1.1.2) 弱解的整体存在性和长时行为, 并探讨了该弱解的真空状态在有限时间消失的现象. 当粘性系数为 $\mu(\rho)=1+\rho^\beta$ $(\beta\geq 0)$ 时, (1.1.2) 的正则解被证明是整体存在且唯一的 (参见 [76, 139, 203]), 并在有界域上以时间指数速率收敛到平衡态 (参见 [203]). 然后, 当初值是关于平衡态的正则小扰动时, Matsumura 和 Nishihara [175, 176] 研究了激波和稀疏波的稳定性 (也参见接触间断波和复合波稳定性的相关重要工作 [122–126]); 曾燕妮教授 [239] 证明了柯西问题整体正则解在空间 L^1 中以最优时间速率渐近收敛到非线性扩散波.

关于高维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 局部适定性的研究已有很多重要的结果 (参见 [50, 173, 186, 197, 200, 207, 208] 等). 文献 [127, 128, 204, 218] 将高维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 正则解的高阶先验估计归结为密度的上界 (或速度散度的 $L^1(0,T;L^\infty)$ 范数等) 的可控性, 对局部正则解建立了相应的爆破准则.

当初值为关于平衡态在 Sobolev 空间 H^3 中的小扰动时, Matsumura 和 Nishida [173, 175]

首先证明了三维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 柯西问题或初边值问题存在唯一的整体正则解, 并且对于初值为空间 $H^3 \cap L^1$ 中的小扰动, Matsumura 和 Nishida [174] 还证明了三维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 柯西问题整体解在空间 L^2 中以最优时间代数速率 $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$ 收敛到平衡态; Ponce [195] 得到了 (1.1.2) 柯西问题整体解高阶导数的最优时间代数速率; Hoff 和 Zumbrun [117, 118] 证明了 (1.1.2) 柯西问题整体解在空间 L^∞ 中以最优时间速率渐近收敛到非线性扩散波; 刘太平教授和王维克教授 [167] 分析了其线性化方程组的 Green 函数的性质, 并得到了奇数维的可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 柯西问题整体正则解在扩散波附近的时-空逐点估计; 若初值是关于平衡态在空间 $H^3 \cap L^p$ $(p \in [1, \frac{6}{5}))$ 中的小扰动, 段仁军教授 [77] 证明了带外力的三维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 柯西问题整体解在空间 L^2 中以最优时间代数速率 $(1+t)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$ 渐近收敛到平衡态; 在初始扰动还在负指标 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\sigma_0}$ $(\sigma_0 \in (-\frac{3}{2}, 0))$ 中有界时, 郭岩教授和王焰金教授 [96] , 证明了三维情形的柯西问题整体解在空间 L^2 中以最优时间代数速率 $(1+t)^{-\frac{\sigma_0}{2}}$ 收敛到平衡态.

在低正则的临界 Besov 空间框架下, 关于高维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 适定性的研究有很多重要的成果 (参见 [43, 47, 48, 64, 66–69, 85, 107, 110] 等). 其中, 在初值是关于平衡态在 L^2 型临界 Besov 空间 $\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1, \frac{d}{2}} \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}$ $(d \geq 2)$ 中的小扰动时, Danchin [64] 首先证明了 (1.1.2) 柯西问题存在唯一的整体解; 当初值为在 L^p $(p \in (1, 2d) \cap [2, \min\{4, \frac{2d}{d-2}\}])$ 型临界 Besov 空间中的小扰动时, 其中当 $p > 2$ 时初始速度可以是一些高振荡函数, 文献 [43, 47, 85, 107] 证明了 (1.1.2) 柯西问题解的整体存在性和唯一性. 陈琼蕾教授、苗长兴教授和章志飞教授 [48] 探讨了(1.1.2) 柯西问题在临界 L^p 型 $(p > 2d)$ Besov 空间中的不适定性. 在低正则的临界 Besov 空间框架下, 关于 (1.1.2) 柯西问题解的最优时间收敛速率也有很多重要进展 (参见 [68, 70, 110, 191, 224, 229] 等). 其中, Danchin 和徐江教授 [70, 229] 证明了当初始扰动还在 Besov 空间 $\dot{B}_{2,\infty}^{-\frac{d}{2}}$ 中小时, 高维柯西问题的整体解在 Besov 空间 $\dot{B}_{2,1}^{\sigma}$ 中以最优时间代数速率 $(1+t)^{-\frac{d}{4}-\frac{\sigma}{2}}$ 收敛到平衡态; 辛周平教授和徐江教授 [224] 将该初始扰动的 $\dot{B}_{2,\infty}^{-\frac{d}{2}}$ 范数小性假设减弱到了有界性假设.

当初始能量充分小时, Hoff [115, 116] 对不含真空的初值建立了三维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 有界弱解的整体存在性和长时行为, 并在等温情形下证明了该弱解的唯一性; 张挺教授和方道元教授 [240] 在密度依赖体积粘性系数情形下对不含真空的初值研究了二维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 有界弱解的整体存在性和渐近行为; 黄祥娣教授、李竞教授和辛周平教授 [129, 150] 对包含真空的初值证明了二维和三维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 柯西问题有唯一的整体正则解, 并且得到了该整体解的最优时间代数衰减速率.

下面, 我们介绍对一般初值高维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 整体解存在性的部分重要工作. 对常粘性系数情形已有诸多重要进展 (参见 [29, 86–90, 115, 116, 120, 135, 136, 165, 189, 194] 等). 其中, 当压力函数为 $P(\rho) = \rho^\gamma$ 时, 对绝热常数 $\gamma \geq \frac{3d}{d+2}$ $(d = 2, 3)$ 或 $\gamma > \frac{d}{2}$ $(d \geq 4)$, Lions [165] 首先建立了等熵可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 能量有限弱解的整体存在性; Feireisl、Novotný 和 Petzeltová [87] 对 $\gamma > \frac{d}{2}$ $(d = 2, 3)$ 证明了等熵可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 初边值问

题存在一个能量有限的整体弱解; Feireisl [86] 也证明了当时间趋于无穷时 (1.1.2) 初边值问题的整体弱解渐近收敛到其平衡态; 江松院士和张平院士 [135] 对 $\gamma > 1$ 建立了柯西问题球对称弱解的整体存在性; 文献 [136, 194] 考虑了等温情形 ($\gamma = 1$) 下二维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 柯西问题弱解的整体存在性; 对绝热常数 $\gamma \in [1, \frac{d}{2}]$, 胡先鹏教授 [120] 分析了 (1.1.2) 柯西问题整体弱解的集中现象. 对 ρ^γ 附近扰动的一类一般的压力函数, Feireisl [88] 证明了初边值问题能量有限弱解的整体存在性. 对一般的非单调的压力函数和各向异性的粘性系数, Bresch 和 Jabin [29] 精确地刻画了密度的紧性估计, 证明了在周期域上的初值问题能量有限弱解的整体存在性.

当粘性系数依赖密度时, 有关高维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 对一般初值整体解存在性的研究也有很多重要的进展 (参见 [23–27, 31, 151, 165, 179, 206, 210] 等). 其中, 对常剪切粘性系数和变体积粘性系数 $\lambda(\rho) = 1 + \rho^\beta$ ($\beta > \frac{4}{3}$) 情形, 文献 [130, 210] 建立了 (1.1.2) 二维情形下初值问题存在一个有界的整体弱解, 并且文献 [130, 140, 210] 还证明当初值正则时该整体解是唯一的整体强解; 对满足 $\lambda(\rho) = 2\rho\mu'(\rho) - 2\mu(\rho)$ 的退化粘性系数, Bresch、Desjardins 和林琦焜教授 [25] 通过了一个新的熵不等式得到了密度的导数估计; 在带有阻尼项的情形下, 文献 [23, 24, 26, 27] 研究了 (1.1.2) 弱解的整体存在性; Mellet 和 Vasseur [179] 得到了关于速度的 $L^\infty(0, T; L\log L)$ 正则性, 并证明了 (1.1.2) 弱解的 L^1 稳定性; 郭真华教授、酒全森教授和辛周平教授 [97] 证明了 (1.1.2) 柯西问题球对称弱解的整体存在性; 郭真华教授、李海梁教授和辛周平教授 [98] 研究了 (1.1.2) 自由边值问题球对称弱解的整体存在性, 并分析了该弱解远离对称中心的正则性、Lagrange 结构和长时行为; Vasssur 和俞成教授 [206] 以及李竞教授和辛周平教授 [151] 分别通过两种不同的构造逼近解的方法证明了高维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 弱解的整体存在性. 对一般密度依赖的粘性系数, Bresch、Vasseur 和俞成教授 [31] 证明了三维 (1.1.2) 弱解的整体存在性.

高维可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 带一般初值整体弱解的唯一性和正则性目前仍是一个未解决的问题. 值得注意的是, 当密度出现真空时, 形如动量方程 $(1.1.2)_2$ 将在真空处退化, 此时方程组 (1.1.2) 的解会出现一些奇异行为, 例如没有关于初值的连续依赖性 (参见 [114]), 有限时间爆破 (参见 [49, 196, 223, 225]), 甚至是不适定性 (参见 [159]) 等.

下面, 我们分别介绍两相流方程组的重要研究进展, 其中包括 NS-VFP 方程组、NS-V 方程组、drift-flux 方程组、NS-Euler 方程组等相关的结果.

关于 NS-VFP 方程组的研究目前已有很多重要成果 (参见 [34, 38, 39, 54, 100, 102, 109, 121, 154, 163, 180, 181] 等). 其中, 对不可压缩 NS-VFP 方程组, Chae、Kang 和 Lee [38] 建立了柯西问题弱解的整体存在性, 并在二维情形下证明了该弱解的唯一性和正则性; Carrilo、Choi 和 Karper [34] 证明了带非局部项的不可压缩 NS-VFP 方程组在三维周期域上初值问题弱解的整体存在性, 并严格证明了其收敛到由等温可压缩 Euler 方程组和不可压缩 NS 方程组耦合的两相流方程组的流体动力学极限; 文献 [100, 152] 证明了周期域或有界域上解的整体正则性, 并得到了解的时间指数衰减速率. 对带线性拉力 (drag force) 项 $u - v$ 的可压缩 NS-VFP

方程组 (1.1.1), 对绝热常数 $\gamma > \frac{3}{2}$ 和一般有限能量初值, Mellet 和 Vasseur [180] 证明了三维初边值问题能量有限弱解的整体存在性; 对体积粘性系数 $\lambda(\rho) = 1 + \rho^{\beta}$ $(\beta > \frac{4}{3})$ 和一般包含真空的正则初值, 文献 [101, 121] 探讨了二维柯西问题正则解的存在性和唯一性; 若初值是关于平衡态在 Sobolev 空间中的小扰动, 文献 [39, 134, 152] 在不同边界情形下研究了三维可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 整体解的存在性、唯一性和长时行为; 李海梁教授、王腾教授和王益教授 [162] 探讨了三维可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 关于平面稀疏波的稳定性和粘性消失极限. 当拉力 (drag force) 项为 $\rho(u-v)$ 时, 栗付才教授、慕艳敏教授和王德华教授 [163] 证明了在三维周期域或全空间上可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 在平衡态附近正则解的存在性、唯一性和长时行为.

关于 NS-V 方程组的研究也有诸多重要结果 (参见 [7, 10, 18, 51, 55, 95, 102, 104, 105, 212, 238]). 例如, 对高维不可压缩 NS-V 方程组, 文献 [18, 212, 238] 在不同边界情形下建立了对一般初值能量有限的弱解整体存在性; Glass、Han-Kwan 和 Mossa [95] 研究了在带有吸收边界的管道上稳态解附近的稳定性; 三维不可压缩 NS-V 方程组在小初始扰动情形下的弱解被证明是整体适定的, 并且整体解将以时间指数速率 [104] 或时间代数速率 [105] 渐近收敛到其平衡态. 对带线性拉力 (drag force) 项 $u-v$ 的可压缩 NS-V 方程组 (1.1.4), Gamba 和俞成教授 [93] 对一般初值证明了三维初边值问题整体弱解的存在性; Bae 等 [7] 以及 Choi [51] 证明了高维周期域上初值问题的整体正则解以时间指数速率渐近收敛到其平衡态. 对一般的非线性拉力 (drag force) 项, Choi [55] 研究了任意维数的柯西问题包含真空正则解的有限时间爆破现象.

我们也介绍关于 Euler-Vlasov-Fokker-Planck 方程组和 Euler-Vlasov 方程组的相关重要进展. 关于 Euler-Vlasov-Fokker-Planck 方程组, Carrillo 和 Goudon [33] 探讨了其耗散性质和非线性稳定性, 并形式推导了其流体动力学极限; 文献 [78, 78] 分别研究了三维不可压缩和可压缩情形柯西问题在平衡态附近整体正则解的存在性, 唯一性与衰减估计. 李海梁教授、王腾教授和王益教授 [162] 对三维初值问题证明了整体正则解时间渐进收敛到平面稀疏波. 关于可压缩 Euler-Vlasov 方程组, Baranger 和 Desvillettes [10] 证明了高维情形下柯西问题正则解的局部存在性和唯一性; 曹文涛教授和蒋鹏教授 [37] 研究了一维情形下柯西问题熵弱解的整体存在性.

关于 drift-flux 方程组 (1.1.8) 的研究目前已有诸多重要结果 (参见 [30, 46, 79–82, 96, 106, 190, 209, 214, 215, 217, 219, 230, 233–236, 241] 等). 首先, 我们介绍关于一维 drift-flux 方程组 (1.1.8) 弱解的部分重要结果. 当粘性系数为常数时, 如果初值不含真空且满足 $\underline{c}\rho_0 \le n_0 \le \bar{c}\rho_0$ (下文中记为条件 (A_1)), Evje 和 Karlsen [79] 证明了不含真空情形下有界弱解的整体存在性; Evje、温焕尧教授和朱长江教授 [82, 215] 证明了在不需条件 (A_1) 时对一般包含真空初值有界弱解的整体存在性. 对于粘性系数 $\mu(\rho) = 1 + \rho^{\beta}$ $(\beta \ge 0)$, 文献 [46] 在不需条件 (A_1) 时, 对一般的压力函数建立了初边值问题强解的整体存在性和唯一性. 当粘性系数依赖于密度时, 文献 [80, 81, 170, 235, 236] 究了带一类奇异压力函数的初边值问题或自由边值问题弱解的整

体存在性、唯一性和渐近行为. 其次, 我们介绍高维 drift-flux 方程组 (1.1.8) 正则解的部分重要结果. 当条件 (A_1) 成立时, 温焕尧教授、姚磊教授、张挺教授和朱长江教授 [217,234] 建立了二维和三维时正则解的爆破准则; 姚磊教授、朱长江教授和訾瑞昭教授考虑了三维周期域上初值问题在 Sobolev 空间中的局部存在性和唯一性, 并证明了当马赫数趋于零时其收敛到不可压缩 NS 方程; 文献 [219,241] 在初始扰动在三维 Sobolev 空间 H^2 中充分小并且在空间 L^1 中有界时, 建立了柯西问题强解的整体存在性和唯一性, 并且得到了解的最优时间衰减速率; 在临界 Besov 空间框架下, 郝成春教授和李海梁教授 [106] 研究了对一般初值柯西问题强解的局部存在性和唯一性, 并且在小扰动意义下建立了强解的整体存在性; 在初始能量充分小时, 文献 [99,230] 证明了柯西问题整体正则解的存在性和唯一性. 最后, 我们介绍关于高维 drift-flux 方程组 (1.1.8) 弱解的部分重要结果. 姚磊教授、张挺教授和朱长江教授 [233] 在条件 (A_1) 下研究了二维柯西问题小能量有界弱解的整体存在性和动力学行为, 并证明随时间趋于无穷该弱解收敛到平衡态. 对二元单调压力函数 $P(\rho,n)=\rho^\gamma+n^\alpha$, 在 $(1.1.8)_2$ 为 Stokes 方程的情形下, 对绝热常数 $\gamma,\alpha>1$, Bresch、Mucha 和 Zatorska [30] 建立了二维或三维周期域上初值问题整体弱解的存在性; 在三维情形下, 如果 $\gamma>\frac{9}{5}$ 并且 α 和 γ 充分接近, 或者当条件 (A_1) 成立情形下 $\gamma>\frac{9}{5}$ 并且 $\alpha\geq 1$, Vasseur、温焕尧教授和俞成教授 [209] 证明了初边值问题存在一个整体弱解; 在不需要条件 (A_1) 的情形下, 温焕尧教授 [214] 对 $\gamma,\alpha\geq\frac{9}{5}$ 建立了初边值问题弱解的整体存在性; 在条件 (A_1) 成立时, 对在 $\rho^\gamma+n^\alpha$ 附近扰动的一大类压力函数, Novotný 和 Pokorný [190] 证明了初边值问题弱解的整体存在性. 文献 [215,216] 对 drift-flux 方程组 (1.1.8) 的研究有十分详尽的综述.

关于可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11), 当初值为关于平衡态在三维 Sobolev 空间 H^s ($s\geq 3$) 中的小扰动时, Choi [51] 和 Jung [141] 在不同边界条件下建立了 (1.1.11) 强解的整体存在性和唯一性, 并证明了周期域或有界域上的强解以时间指数速率收敛到平衡态; 文献 [205, 222] 得到了柯西问题整体强解 Sobolev 空间中的最优代数时间衰减速率. 若 (1.3.39) 中的 Euler 部分不带压力项 ∇n 时, Choi [51] 考虑了周期域上平衡态附近强解的整体存在性、唯一性和时间指数衰减速率; Choi [54] 也研究了退化粘性情形的包含真空经典解的有限时间爆破现象. 当 $(1.3.39)_4$ 带有粘性项 $\mathrm{div}(n\mathbb{D}w)$ 时, 其在一维半空间上内流或外流问题稳态解是存在并且非线性稳定的 (参见 [154,162]).

最后, 我们介绍具有趋化性的双曲-抛物方程组 (1.1.12) 的相关重要研究进展. 文献 [73, 91,187,188] 对双曲-抛物方程组 (1.1.12) 建立了重要的数值分析. 对一维情形, 文献 [17,112] 研究了初边值问题稳态解的存在性和非线性稳定性; 文献 [168] 得到了柯西问题整体解关于非线性扩散波的时间渐近行为. 对高维情形, 在条件 $P'(\bar\rho)>\frac{a\mu}{b}\bar\rho$ 下, 其中 $\bar\rho>0$ 为常背景密度, Kowalczyk 等 [148] 研究了双曲-抛物方程组 (1.1.12) 的线性稳定性; 当 $\bar\rho>0$ 充分小且初值为关于平衡态 $(\bar\rho,0,\frac{a}{b}\bar\rho)$ 在 Sobolev 空间 H^s ($s>\frac{d}{2}+1$) 中的小扰动时, Di Russo 和 Sepe [73, 74] 建立了柯西问题解的整体存在性和唯一性, 并得到了解的时间代数衰减速率; 刘青青教授、彭红云教授和王治安教授 [169] 证明了三维双曲-抛物方程组 (1.1.12) 在

Sobolev 空间中平衡态附近的整体正则解以最优时间代数速率渐近收敛到其线性扩散波. 对双曲-抛物方程组 (1.1.12) 在二维周期域上的初值问题, 如果其整体正则解存在性且满足一些一致估计, Di Francesco 和 Donatelli [72] 证明了当松弛参数 $\varepsilon \to 0$ 时, 该整体解在时间尺度变换后满足的方程组收敛到 Keller-Segel 方程组. 此外, Lattanzio 和 Tzavaras [149] 研究了与双曲-抛物方程组 (1.1.12) 结构十分类似的 Euler-Poisson 方程组收敛到 Keller-Segel 方程组的松弛极限.

1.3 主要结果

1.3.1 一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组

对于可压缩 NS-V 方程组 (1.1.4), 目前没有关于其整体适定性的结果. 文献 [7, 51] 证明了如果可压缩 NS-V 方程组 (1.1.4) 在周期域上初值问题的整体解存在且满足一些一致估计, 则该解将以时间指数速率收敛到平衡态. 一个自然的问题是, 满足这些一致估计的整体解是否存在?

我们考虑可压缩 NS-V 方程组在一维周期域上的初值问题:

$$
\begin{cases}
\rho_t + (\rho u)_x = 0, \\
(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + (P(\rho))_x = (\mu(\rho) u_x)_x - \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \kappa(\rho)(u-v) F \, dv, \\
F_t + v F_x + (\kappa(\rho)(u-v)F)_v = 0, \quad (x,v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad t > 0, \\
(\rho(x,0), u(x,0), F(x,v,0)) = (\rho_0(x), u_0(x), F_0(x,v)), \quad (x,v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R},
\end{cases}
\tag{1.3.1}
$$

其中 $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是周期为 1 的空间周期域, $\rho = \rho(x,t) \geq 0$ 和 $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$ 分别表示流体的密度和速度, $f = f(x,v,t) \geq 0$ 为粒子的分布函数, 压力函数 $P(\rho)$ 为

$$
P(\rho) = A\rho^{\gamma}, \quad A > 0, \quad \gamma > 1, \tag{1.3.2}
$$

粘性系数 $\mu(\rho)$ 为

$$
\mu(\rho) = \mu_0 + \mu_1 \rho^{\beta}, \quad \mu_0 > 0, \quad \mu_1 > 0, \quad \beta \geq 0, \tag{1.3.3}
$$

拉力 (drag force) 系数 $\kappa(\rho)$ 为

$$
\kappa(\rho) = \kappa_0 \rho, \quad \kappa_0 > 0. \tag{1.3.4}
$$

我们证明 NS-V 方程组初值问题 (1.3.1) 整体弱解的存在性、唯一性及正则性, 并证明该整体解以时间指数速率收敛到其由初值确定的平衡态.

定理 1.3.1. 对给定的常数 $r_0>0$, 假设初值 (ρ_0,u_0,F_0) 满足

$$\begin{cases}\inf\limits_{x\in\mathbb{T}}\rho_0(x)>0, \quad \rho_0\in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u_0\in H^1(\mathbb{T}),\\ 0\le F_0\in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}), \quad \mathrm{Supp}_v F_0(x,\cdot)\subset\{v\in\mathbb{R}\mid |v|\le r_0\}, \quad x\in\mathbb{T},\end{cases} \tag{1.3.5}$$

则初值问题 (1.3.1) 有唯一的整体弱解 (ρ,u,F), 且对任意给定的时间 $T>0$, (ρ,u,F) 满足

$$\begin{cases}\rho_-\le\rho\le\rho_+, \quad \|\rho\|_{L^\infty(0,T;H^1)}\le C, \quad 0\le F\le e^{\rho_+T}\|F_0\|_{L^\infty_{x,v}},\\ \rho\in C([0,T];H^1(\mathbb{T}))\cap L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathbb{T})),\\ u\in C([0,T];H^1(\mathbb{T}))\cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{T})),\\ F\in C([0,T];L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R}))\cap L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})),\end{cases} \tag{1.3.6}$$

及长时行为

$$\begin{cases}\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^\infty}+\|(u-u_c)(t)\|_{L^2}\le Ce^{-ct}, & 0<t<T,\\ \mathrm{W}_1(F,n\delta(v-u_c))(t)+\|n(w-u_c)(t)\|_{L^1}\le Ce^{-ct}, & 0<t<T,\\ \mathrm{Supp}_v F(x,\cdot,t)\subset\{v\in\mathbb{R}\mid |v-u_c|\le Ce^{-ct}\}, & (x,t)\in\mathbb{T}\times(0,T),\end{cases} \tag{1.3.7}$$

其中 $\rho_->0$、$\rho_+>0$、$C>0$ 和 $c>0$ 为与时间 $T>0$ 无关的常数, ρ_c 和 u_c 为常数

$$\rho_c:=\int_{\mathbb{T}}\rho_0(x)dx, \quad u_c:=\frac{\int_{\mathbb{T}}\rho_0u_0(x)dx+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}vF_0(x,v)dvdx}{\int_{\mathbb{T}}\rho_0(x)dx+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)dvdx}, \tag{1.3.8}$$

$W_1(f,g)$ 为由定义 2.4.1 给出的 1-Wasserstein 度量, $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 测度, n 和 nw 分别表示粒子分布函数 F 的宏观密度和宏观动量

$$n(x,t):=\int_{\mathbb{R}}F(x,v,t)dv, \quad nw(x,t):=\int_{\mathbb{R}}vF(x,v,t)dv, \tag{1.3.9}$$

进一步, 若初值 (ρ_0,u_0,F_0) 还满足

$$\rho_0\in H^2(\mathbb{T}), \quad u_0\in H^2(\mathbb{T}), \quad F_0\in C^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R}), \tag{1.3.10}$$

则 (ρ,u,F) 即为初值问题 (1.3.1) 满足如下正则性的整体强解:

$$\begin{cases}\rho\in C([0,T];H^2(\mathbb{T})), & \rho_t\in C([0,T];H^1(\mathbb{T})),\\ u\in C([0,T];H^2(\mathbb{T})), & t^{\frac{1}{2}}u\in L^\infty(0,T;H^3(\mathbb{T})),\\ F\in C([0,T];C^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R})), & F_t\in C([0,T];C^0(\mathbb{T}\times\mathbb{R})).\end{cases} \tag{1.3.11}$$

注记 1.3.2. 定理 1.3.1 的证明见第二章, 也可以参见 [153, 154].

注记 1.3.3. 对一维全空间 $\mathbb{R}$ 的情形, 我们也可以证明可压缩 NS-V 方程组弱解的整体存在性和唯一性 (参见 [153]).

下面我们简要说明定理 1.3.1 证明的主要困难和想法. 对满足 (1.3.5) 和 (1.3.10) 的正则化初值, 我们通过对初值问题 (1.3.1) 的局部强解建立一致的先验估计, 将该解延拓为整体强解, 最终用证明逼近强解序列收敛到初值问题 (1.3.1) 的整体弱解. 其中, 建立解先验估计的关键一步是证明密度 ρ 有一致的上界. 然而, 方程 $(1.3.1)_2$ 右端非线性拉力 (drag force) 项 $\rho n(w-u)$ 在估计密度 ρ 上界时会造成本质的困难. 为此, 我们通过引入一个新的有效速度

$$u+I(n),$$

将动量方程 $(1.3.1)_2$ 改写为

$$\big(\rho(u+I(n))\big)_t+\big(\rho u(u+I(n))\big)_x+(\rho^\gamma)_x=(\mu(\rho)u_x)_x+\rho\int_0^1 nwdy. \tag{1.3.12}$$

利用基本能量估计、方程 (1.3.12) 以及 Zlotnik 不等式, 我们建立了密度 ρ 与时间无关的上界和与时间有关的下界 (参见定理 2.2.2). 然后, 通过建立流体部分的相对熵估计, 我们证明压力函数 $P(\rho)$ 的 $L^1(\mathbb{T})$-范数在一个充分大时间后是严格正的, 进而得到了密度 ρ 关于时间一致的下界 (参见引理 2.2.5-2.2.6). 此外, 我们也引入另一个新的有效速度

$$U:=u+I(n)+\rho^{-2}\mu(\rho)\rho_x.$$

根据 $(1.3.1)_1$ 和 (1.3.12), U 满足一个带阻尼的输运方程

$$\rho(U_t+uU_x)+\gamma\rho^{\gamma+1}\mu(\rho)^{-1}U=\gamma\rho^{\gamma+1}\mu(\rho)^{-1}(u+I(n))+\rho\int_0^1 nwdy. \tag{1.3.13}$$

利用 (1.3.13) 及密度 ρ 的一致上下界, 我们证得 ρ 与时间无关的 $H^1(\mathbb{T})$ 估计 (见引理 2.2.7).

1.3.2 一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck 方程组

定理 1.3.1 的证明方法也可以应用于可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 弱解的整体适定性和长时行为. 我们考虑一维可压缩 NS-VFP 方程组在空间周期域上的初值问题

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ (\rho u)_t+(\rho u^2)_x+(P(\rho))_x=(\mu(\rho)u_x)_x-\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\kappa(\rho)(u-v)fdv,\\ F_t+vF_x+(\kappa(\rho)(u-v)F-\kappa(\rho)F_v)_v=0, & (x,v)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R},\quad t>0,\\ (\rho(x,0),u(x,0),F(x,v,0))=(\rho_0(x),u_0(x),F_0(x,v)), & (x,v)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R},\end{cases} \tag{1.3.14}$$

其中 $P(\rho)$、$\mu(\rho)$ 及 $\kappa(\rho)$ 由 (1.3.16)-(1.3.4) 给出.

对的一般初值, 我们研究初值问题 (1.3.14) 弱解的整体存在性和唯一性, 并证明当时间趋于无穷时该解收敛到其由初值确定的平衡态.

定理 1.3.4. 对任意常数 $k_0 > \frac{7}{2}$, 假设初值 (ρ_0, u_0, F_0) 满足

$$\begin{cases} \inf\limits_{x\in\mathbb{T}} \rho_0(x) > 0, \ \ \rho_0 \in H^1(\mathbb{T}), \quad u_0 \in H^1(\mathbb{T}), \\ 0 \le F_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}), \qquad |v|^{k_0} F_0 \in L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R}), \end{cases}$$

则柯西问题 (1.3.14) 存在一个唯一的整体弱解 (ρ, u, F) 对任意时间 $T > 0$ 满足

$$\begin{cases} \rho_- \le \rho \le \rho_+, \quad \|\rho\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \le C, \quad 0 \le f \le e^{\rho_+ T}\|F_0\|_{L^\infty_{x,v}}, \\ \rho \in C([0,T];H^1(\mathbb{T})) \cap L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathbb{T})), \\ u \in C([0,T];H^1(\mathbb{T})) \cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{T})), \\ F \in C([0,T];L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R})) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})), \quad F_v \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})), \\ t^{\frac{1}{2}}F_v, tF_{vv}, t^{\frac{3}{2}}F_x \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})), \end{cases}$$

其中 $\rho_- > 0$、$\rho_+ > 0$ 和 $C > 0$ 为与时间 $T > 0$ 无关的常数.

进一步, 下面的长时行为成立:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^\infty} + \|(u-u_c)(t)\|_{L^2} + \|(F - M_{[n_c,u_c]})(t)\|_{L^1_{x,v}}\right) = 0,$$

其中 ρ_c、n_c 和 u_c 为由如下给出的常数:

$$\rho_c := \int_{\mathbb{T}} \rho_0(x)dx, \quad n_c := \int_{\mathbb{T}} n_0(x)dx, \quad u_c := \frac{\int_{\mathbb{T}} \rho_0 u_0(x)dx + \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} vF_0(x,v)dvdx}{\int_{\mathbb{T}} \rho_0(x)dx + \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} F_0(x,v)dvdx},$$

$M_{[n_c,u_c]}$ 为整体 Maxwellian:

$$M_{[n_c,u_c]} = M_{[n_c,u_c]}(v) := \frac{n_c}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|v-u_c|^2}{2}}.$$

注记 1.3.5. 与可压缩 NS-V 方程组的初值问题 (1.3.1) 不同的是 (参见定理 1.3.1), 对于可压缩 NS-VFP 方程组的初值问题 (1.3.14), 非线性 Fokker-Planck 算子 $vF_x - \kappa(\rho)F_{vv}$ 的亚椭圆性对分布函数 F 具有正则化效应.

注记 1.3.6. 定理 1.3.4 的证明可参见 [155].

1.3.3 高维 drift-flux 方程组

如小节 1.2 所述, 关于高维 drift-flux 方程组 (1.1.8) 整体弱解的存在性有很多重要进展, 但其中二元压力函数的单调性是一个关键的假设. 一个自然的问题是: 带二元非单调压力函数的高维 drift-flux 方程组 (1.1.8) 是否存在整体弱解? 为此, 我们考虑高维 drift-flux 方程组的初值问题

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ n_t + \operatorname{div}(nu) = 0, \\ ((\rho+n)u)_t + \operatorname{div}((\rho+n)u\otimes u) + \nabla P(\rho,n) = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div} u, \quad x\in\mathbb{T}^d,\ t>0, \\ (\rho,n,(\rho+n)u)(x,0) = (\rho_0,n_0,m_0)(x), \quad x\in\mathbb{T}^d, \end{cases} \tag{1.3.15}$$

其中 $\mathbb{T}^d$ 为周期为 1 的 d $(d\geq 2)$ 维周期域, 粘性系数 μ,λ 是满足 $\mu>0, 2\mu+\lambda>0$ 的常数, 二元压力函数 $P(\rho,n)$ 有如下特性:

$$\begin{cases} P(\rho,n)\in C^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+), \\ \dfrac{1}{P_0}(\rho^\gamma+n^\alpha) - P_0 \leq P(\rho,n) \leq P_0(\rho^\gamma+n^\alpha)+P_0, \\ |\partial_\rho P(\rho,n)| + |\partial_n P(\rho,n)| \leq P_0(\rho^{\widetilde{\gamma}-1}+n^{\widetilde{\alpha}-1}+1), \end{cases} \tag{1.3.16}$$

这里 $P_0>1$ 和 $\widetilde{\gamma},\widetilde{\alpha}\geq 1$ 为常数, γ,α 为绝热常数 (其范围将由定理 1.3.8 和 1.3.10 给出).

首先, 我们给出初值问题 (1.3.15) 能量有限的整体弱解的定义.

定义 1.3.7. $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 称为初值问题 (1.3.15) 的一个能量有限的整体弱解, 若对任意给定的时间 $T>0$, $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 有如下特性:

(1). $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 满足正则性

$$\begin{cases} 0\leq\rho\in C([0,T];L^\gamma_{weak}(\mathbb{T}^d)), \quad 0\leq n\in C([0,T];L^\alpha_{weak}(\mathbb{T}^d)), \\ u\in L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}^d)),\ (\rho+n)|u|^2\in L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)),\ (\rho+n)u\in C([0,T];L^{\gamma_*}_{weak}(\mathbb{T}^d)), \\ (\rho,n,(\rho+n)u)(x,0) = (\rho_0,n_0,m_0)(x), \quad a.e.\ x\in\mathbb{T}^d, \end{cases}$$

其中 $\gamma_* :== \frac{2\min\{\gamma,\alpha\}}{\min\{\gamma,\alpha\}+1}$, $C([0,T];X_{weak})$ 表示在 X 弱拓扑下关于时间连续的函数空间.

(2). 质量方程 $(1.3.15)_1$-$(1.3.15)_2$ 在重整化解意义下成立, 即如下方程在分布意义下成立:

$$\begin{cases} b_t(\rho) + \operatorname{div}(b(\rho)u) + [b'(\rho)\rho - b(\rho)]\operatorname{div} u = 0, \\ b_t(n) + \operatorname{div}(b(n)u) + [b'(n)n - b(n)]\operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

其中 $b(z)\in C^1(\mathbb{R})$, 且对充分大的 $|z|$ 满足 $b'(z)=0$.

(3). 动量方程 $(1.3.15)_3$ 在分布意义下成立.

(4). 对几乎处处的 $t\in(0,T)$, 能量不等式成立:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^d}[\frac{1}{2}(\rho+n)|u|^2+H(\rho,n)]dx+\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}[\mu|\nabla u|^2+(\mu+\lambda)(\operatorname{div}u)^2]dxd\tau\\&\quad\le\int_{\mathbb{T}^d}[\frac{1}{2}\frac{|m_0|^2}{\rho_0+n_0}+H(\rho_0,n_0)]dx,\end{aligned}$$

其中

$$H(\rho,n):=\begin{cases}(\rho+n)\int_1^{\rho+n}P(\frac{\rho s}{\rho+n},\frac{ns}{\rho+n})s^{-2}ds, & 若\quad \rho+n>0,\\ 0, & 若\quad \rho=n=0.\end{cases}\tag{1.3.17}$$

初值问题 (1.3.15) 的整体存在性定理叙述如下.

定理 1.3.8. 对维数 $d\ge 2$, 假设初值 (ρ_0,n_0,m_0) 满足

$$\begin{cases}0\le \underline{c}\rho_0(x)\le n_0(x)\le\overline{c}\rho_0(x), \quad x\in\mathbb{T}^d,\\ \dfrac{m_0(x)}{\sqrt{(\rho_0+n_0)(x)}}=0,\quad 若\ (\rho_0+n_0)(x)=0,\quad x\in\mathbb{T}^d,\\ (\rho_0,n_0,\dfrac{m_0}{\sqrt{\rho_0+n_0}})\in L^\gamma(\mathbb{T}^d)\times L^\alpha(\mathbb{T}^d)\times L^2(\mathbb{T}^d),\end{cases}\tag{1.3.18}$$

其中常数 $\underline{c}$ 和 $\overline{c}$ 满足 $0<\underline{c}\le\overline{c}<\infty$. 若压力函数 $P(\rho,n)$ 由 (1.3.16) 给出, 且绝热常数 γ, α 满足

$$\begin{cases}\gamma\ge\dfrac{3d}{d+2}\ (d=2,3),\qquad \gamma>\dfrac{d}{2}\ (d\ge4),\qquad \alpha\ge1,\\ \widetilde{\gamma},\widetilde{\alpha}\le\max\{\gamma,\alpha\}+\theta,\quad \theta_0:=\dfrac{2}{d}\max\{\gamma,\alpha\}-1>0,\end{cases}\tag{1.3.19}$$

则初值问题 (1.3.15) 有一个满足定义 1.3.7 的整体弱解 $(\rho,n,(\rho+n)u)$.

注记 1.3.9. 文献 [190, 209, 214] 主要考虑了如下压力函数:

$$P(\rho,n)=\rho^\gamma+n^\alpha+\sum_{i=1}^N c_i\rho^{\gamma_i}n^{\alpha_i},\tag{1.3.20}$$

此处 c_i、γ_i、α_i 为常数. 当 c_i $(i=1,...,N)$ 为负时, $P(\rho,n)$ 可以在 ρ 及 n 有界的情形下非单调, 但在 ρ 及 n 大的时候需要 $P(\rho,n)$ 的单调性.

易知 (1.3.20) 满足 (1.3.16). 此外, 我们也可以选取如下非单调的二元压力函数:

$$P(\rho,n)=\Pi_1(\rho)+\Pi_2(n),$$

其中 $\Pi_1(s)$ $(i=1,2)$ 为两个非单调压力函数 (具体例子参见 [29]).

当条件 $(1.3.18)_1$ 不满足时, 我们仍可以证明如下整体存在性结果.

定理 1.3.10. 对维数 $d\geq 2$, 假设初值 (ρ_0,n_0,m_0) 满足

$$\begin{cases}\rho_0(x)\geq 0,\quad n_0(x)\geq 0,\quad x\in\mathbb{T}^d,\\ \dfrac{m_0(x)}{\sqrt{(\rho_0+n_0)(x)}}=0,\quad \text{若 }(\rho_0+n_0)(x)=0,\quad x\in\mathbb{T}^d,\\ (\rho_0,n_0,\dfrac{m_0}{\sqrt{\rho_0+n_0}})\in L^\gamma(\mathbb{T}^d)\times L^\alpha(\mathbb{T}^d)\times L^2(\mathbb{T}^d).\end{cases}\tag{1.3.21}$$

若压力函数 $P(\rho,n)$ 由 (1.3.16) 给出, 且绝热常数 γ, α 满足

$$\begin{cases}\gamma,\alpha\geq\dfrac{3d}{d+2}\ (d=2,3),\quad \gamma,\alpha>\dfrac{d}{2}\ (d\geq 4),\\ 1\leq\widetilde{\gamma}\leq\gamma+\theta_1,\qquad \theta_1:=\dfrac{2}{d}\gamma-\dfrac{\gamma}{\min\{\gamma,\alpha\}}>0,\\ 1\leq\widetilde{\alpha}\leq\alpha+\theta_2,\qquad \theta_2:=\dfrac{2}{d}\alpha-\dfrac{\alpha}{\min\{\gamma,\alpha\}}>0,\end{cases}\tag{1.3.22}$$

则初值问题 (1.3.15) 有一个满足定义 1.3.7 的整体弱解 $(\rho,n,(\rho+n)u)$.

注记 1.3.11. 定理 1.3.10 揭示了 drift-flux 方程组 (1.1.8) 和等熵可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 弱解之间的联系, 即当 $n=0$ 时, 定理 1.3.10 中的弱解可转化为文献 [29] 中关于带非单调压力函数的等熵可压缩 NS 方程组的弱解.

注记 1.3.12. 绝热常数 γ, α 在维数 $d=2$, 3 时可以取到 $\frac{3d}{d+2}$, 从而我们推广了文献 [29] 关于带非单调压力可压缩 NS 方程组弱解的整体存在性.

注记 1.3.13. 定理 1.3.8 和 1.3.10 的证明见第三章, 也可以参见 [156].

下面我们简要说明定理 1.3.8-1.3.10 证明的主要困难和想法. 对参数 $\varepsilon,\delta\in(0,1)$, 我们将 $P(\rho,n)$ 正则化为单调压力函数 $P_\delta(\rho,n)$ 并在 $(1.3.15)_1$-$(1.1.8)_2$ 中考虑人工粘性项, 首先利用 Faedo-Galerkin 方法构造逼近解 $(\rho_\varepsilon,u_\varepsilon,(\rho_\varepsilon+n_\varepsilon)u_\varepsilon)$, 然后证明当 $\varepsilon\to 0$ 时 $(\rho_\varepsilon,u_\varepsilon,(\rho_\varepsilon+n_\varepsilon)u_\varepsilon)$ 收敛到带压力函数 $P_\delta(\rho,n)$ 初值问题 (1.3.15) 的弱解 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$.

为了证明当 $\delta\to 0$ 时 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$ 收敛到初值问题 (1.3.15) 的整体弱解 $(\rho,n,(\rho+n)u)$, 其关键是建立密度 (ρ_δ,n_δ) 强收敛到 (ρ,n) 的紧性估计. 然而, 由于二元非单调压力函数 $P(\rho_\delta,n_\delta)$ 不满足已有文献中为建立压力函数先验估计所需的条件 (参见 [29,87,164,209] 等), 如何建立密度的紧性估计有本质的困难. 为了克服这个困难, 受到文献 [209] 的启发, 我们先证明

$$\begin{aligned}&(\rho_\delta,n_\delta)\to(\rho,n)\quad \text{于 } L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))\times L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))\\ \Longleftrightarrow\ &\rho_\delta+n_\delta\to\rho+n\quad \text{于 } L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)),\quad \delta\to 0.\end{aligned}$$

从而, 根据在 [13,29] 引入的紧性标准, 我们需要对密度和 $\vartheta_\delta := \rho_\delta + n_\delta$ 作如下估计 (等价于 ϑ_δ 的空间等度连续性):

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{\delta\to 0}\frac{1}{\|K_h\|_{L^1}}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^{2d}}K_h(x-y)|\vartheta_\delta^x-\vartheta_\delta^y|dxdydt=0,$$

其中 K_h 为由 (3.4.15) 给出的周期对称核. 利用质量方程 $(3.3.1)_1$-$(3.3.1)_2$ 的特性, 我们将上述估计转化为散度部分 $\operatorname{div}u_\delta^x-\operatorname{div}u_\delta^y$ 的先验估计, 而其又可分解为压力函数的先验估计和有效粘性通量的先验估计 (参见引理 3.4.8).

对关键的压力函数先验估计, 我们引入如下分解:

$$\begin{aligned}
&P(\rho_\delta^x,n_\delta^x)-P(\rho_\delta^y,n_\delta^y)\\
&\quad=P(\rho_\delta^x,n_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)\\
&\qquad+P(A^y\vartheta_\delta^y,B^y\vartheta_\delta^y)-P(\rho_\delta^y,n_\delta^y)\\
&\qquad+P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)-P(A^y\vartheta_\delta^y,B^y\vartheta_\delta^y)\\
&\qquad+P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y),
\end{aligned}\tag{1.3.23}$$

其中

$$(A,B):=\begin{cases}(\frac{\rho}{\rho+n},\frac{n}{\rho+n}), & \text{若 } \rho+n>0,\\ (0,0), & \text{若 } \rho+n=0.\end{cases}\tag{1.3.24}$$

我们证明存在集合 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{T}^{2d}\times(0,T)$, 其中 $|\mathbb{T}^{2d}\times(0,T)/\mathbb{Q}|$ 可以任意小, 使得分解 (1.3.23) 右端前三项当 $\delta\to 0, x\to y$ 时在 $\mathbb{Q}$ 上一致地趋于 0, 并且将 $P(A\vartheta_\delta,B\vartheta_\delta)$ 当做关于单变量 ϑ_δ 的非单调压力函数来估计 (参见引理 3.4.9). 分解 (1.3.23) 给出了建立二元一般压力函数估计的方法. 特别地, 当 $\rho_\delta=n_\delta$ 时, (1.3.23) 等同于以往关于一元非单调压力函数先验估计所对应的分解 (参见 [29]).

此外, 为了处理有效粘性通量的先验估计, 我们利用动量方程 $(3.3.1)_3$ 的特性以及 Riesz 算子的交换子估计 (参见引理 3.4.10). 这是有效粘性通量的先验估计的一个新的证明, 并且适用于其他流体动力学中的相关方程组 (如可压缩 NS 方程组 (1.1.2)).

1.3.4 高维可压缩 Navier-Stokes-Euler 方程组

对于描述流体-粒子混合运动的可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 以及从其导出的可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11), 一个自然的问题是研究这两个方程组的拉力 (drag force) 项和粘性项的耦合作用对整体解的正则性和长时行为的影响. 为此, 我们考虑高维可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11) 的柯西问题, 在低正则的 Hybrid Besov 空间中研究其整体解的适定性和最优时间衰减速率, 在高频与低频分别精细刻画解与相对速度的行为.

高维可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11) 的柯西问题如下:

$$
\begin{cases}
\rho_t+\operatorname{div}(\rho u)=0, \\
(\rho u)_t+\operatorname{div}(\rho u\otimes u)+\nabla P(\rho)=\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u-\kappa n(u-w), \\
n_t+\operatorname{div}(nw)=0, \\
(nw)_t+\operatorname{div}(nw\otimes w)+\nabla n=\kappa n(u-w), \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t>0, \\
(\rho,u,n,w)(x,0)=(\rho_0,u_0,n_0,w_0)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \\
(\rho_0,u_0,n_0,w_0)(x)\to(\bar\rho,0,\bar n,0), \qquad |x|\to\infty,
\end{cases}
\tag{1.3.25}
$$

其中 $\kappa>0$、$\bar\rho>0$ 和 $\bar n>0$ 为常数, 粘性系数 μ,λ 是满足 $\mu>0, 2\mu+\lambda>0$ 的常数, $P(\rho)$ 为光滑压力函数, 且对 $\rho>0$ 满足 $P'(\rho)>0$.

首先, 我们证明柯西问题 (1.3.25) 在低正则的临界 Besov 空间中强解的存在性和唯一性, 并在低频和高频分别精细刻画解的正则性.

定理 1.3.14. *对维数 $d\geq 2$, 如果初值 (ρ_0,u_0,n_0,w_0) 满足 $(\rho_0-\bar\rho,u_0,n_0-\bar n,w_0)\in\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2}\times\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2-1}\times\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2+1}\times\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2+1}$ 以及*

$$
\hat\delta_1:=\|(\rho_0-\bar\rho,u_0,n_0-\bar n,w_0)^h\|_{\dot B_{2,1}^{\frac d2-1}}+\|(\nabla\rho_0,u_0)^h\|_{\dot B_{2,1}^{\frac d2-1}}+\|(n_0-\bar n,w_0)^h\|_{\dot B_{2,1}^{\frac d2+1}}\leq\delta_1, \tag{1.3.26}
$$

其中 $\delta_1>0$ 为一个充分小的常数, 则柯西问题 (1.3.25) 有唯一的整体强解 (ρ,u,n,w), 且 (ρ,u,n,w) 满足

$$
\begin{cases}
\rho-\bar\rho\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2+1,\frac d2}), \\
\quad u\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2-1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2+1,\frac d2+1}), \\
n-\bar n\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2+1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2+1,\frac d2+1}), \\
\quad w\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2+1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2+1,\frac d2+1}),
\end{cases}
\tag{1.3.27}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\|(\rho-\bar\rho,u,n-\bar n,w)\|^\ell_{\widetilde L^\infty_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2-1})}+\|(\nabla\rho,u)\|^h_{\widetilde L^\infty_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2-1})}+\|(n-\bar n,w)\|^h_{\widetilde L^\infty_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+1})}\\
&\quad+\|(\rho-\bar\rho,u,n-\bar n,w)\|^\ell_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+1})}+\|\rho-\bar\rho\|^h_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}+\|(u,n-\bar n,w)\|^h_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+1})}\\
&\quad+\|u-w\|^\ell_{\widetilde L^2_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2-1})}+\|u-w\|^\ell_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}\leq C\hat\delta_1,\ \ t>0,
\end{aligned}
\tag{1.3.28}
$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1、4.5.2 和 4.5.4, $C>0$ 为一个与时间无关的常数.

注记 1.3.15. 定理 1.3.14 揭示了柯西问题 (1.3.25) 的拉力 (drag force) 项和粘性项的耦合作用对其整体解正则性的影响. 事实上, 在 (1.3.27)-(1.3.28) 中, 相对速度 $u-w$ 的正则性 (由耦合拉力 (drag force) 项导致) 和速度 u 的正则性 (由粘性项导致) 蕴含了速度 w 的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}+1})$; 又由于拉力 (drag force) 项的阻尼作用, 相对速度 $u-w$ 低频部分的正则性 $\widetilde{L}^2(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})$ 强于速度 u 和 w 低频部分的正则性 $\widetilde{L}^2(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})$.

其次, 如果初始扰动低频部分还在 Besov 空间 $\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}$ ($\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$) 中有界, 我们建立可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11) 柯西问题整体解的最优时间收敛速率.

定理 1.3.16. 对维数 $d\geq 2$, 在定理 1.3.14 的假设下, 令 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体强解. 若进一步, 对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 初值 (ρ_0,u_0,n_0,w_0) 满足 $(\rho_0-\bar{\rho},u_0,n_0-\bar{n},w_0)^\ell\in\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}$, 那么对任意 $t\geq 1$, 该整体解 (ρ,u,n,w) 以最优时间速率收敛到平衡态 $(\bar{\rho},0,\bar{n},0)$:

$$\begin{cases}\|(\rho-\bar{\rho},u,n-\bar{n},w)(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\sigma}}^{\ell}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}, \quad \sigma\in(\sigma_0,\dfrac{d}{2}-1],\\ \|(\rho-\bar{\rho})(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}^{h}+\|(u,n-\bar{n},w)(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^{h}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)},\end{cases} \tag{1.3.29}$$

且相对速度 $u-w$ 满足

$$\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}}\leq C(1+t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)\}}, \quad t>0, \tag{1.3.30}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1 和 4.5.4, $C>0$ 为一个与时间无关的常数.

若 $d\geq 3$ 及 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-2)$, 则相对速度 $u-w$ 进一步满足

$$\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\sigma}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}, \quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}-2], \quad t>0. \tag{1.3.31}$$

注记 1.3.17. 定理 1.3.16 揭示了扰动 $(\rho-\bar{\rho},u,n-\bar{n},w)$ 在空间 $\dot{B}_{2,1}^{\sigma}$ 中的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}$ 等同于当初值在空间 $\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}$ 有界时热方程的柯西问题解的最优时间衰减速率；然而, 由于耦合拉力 (drag force) 项带来的阻尼效应, 相对速度 $u-w$ 在空间 $\dot{B}_{2,1}^{\sigma}$ 中的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}$ 比扰动 $(\rho-\bar{\rho},u,n-\bar{n},w)$ 的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}$ 更快.

若初始扰动低频部分还在 Besov 空间 $\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}$ ($\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$) 中充分小, 我们也可以得到如下可压缩 NS-Euler 方程组 (1.1.11) 柯西问题整体解的最优收敛速率.

定理 1.3.18. 对维数 $d\geq 2$, 在定理 1.3.14 的假设下, 令 (ρ,u,n,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体强解. 对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 如果初值 (ρ_0,u_0,n_0,w_0) 还满足

$$\|(\rho_0-\bar{\rho},u_0,n_0-\bar{n},w_0)^\ell\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}}\leq\delta_1^*, \tag{1.3.32}$$

其中 $\delta_1^*>0$ 为一个充分小的常数, 则对任意 $t\geq 1$, 该整体解 (ρ,u,n,w) 满足:

$$
\begin{cases}
\|(\rho-\bar{\rho},u,n-\bar{n},w)(t)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}, \quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}+1],\\
\|(\rho-\bar{\rho})(t)\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|(u,n-\bar{n},w)(t)\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-2\sigma_0-2\varepsilon_1)},\\
\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}},\\
\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}, \quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}],
\end{cases}
\tag{1.3.33}
$$

此处 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1 和 4.5.4, $\varepsilon_1\in(0,1)$ 为充分小的常数, $C>0$ 为一个与时间无关的常数.

注记 1.3.19. 与定理 1.3.16 中的时间衰减速率 (1.3.29)-(1.3.30) 相比, 在定理 1.3.16 中, 扰动的低频部分 $(\rho-\bar{\rho},u,n-\bar{n},w)^{\ell}$ 在更一般的空间 $\dot{B}^{\sigma}_{2,1}$ ($\sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}+1]$) 中有时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}$, 扰动的高频部分 $(\rho-\bar{\rho},u,n-\bar{n},w)^{h}$ 在相同空间中有更快的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-2\sigma_0-2\varepsilon_1)}$, 并且相对速度 $u-w$ 在更一般的空间 $\dot{B}^{\sigma}_{2,1}$ ($\sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}]$) 中有时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}$ (此时不需要限制 $d\geq 3$ 及 $\sigma_0<\frac{d}{2}-2$).

注记 1.3.20. 根据 (1.3.33) 及插值不等式, 对 $\Lambda:=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$、$p\geq 2$ 和 $t\geq 1$, 我们得到整体解 (ρ,u,n,w) 和相对速度 $u-w$ 的 L^p 型时间收敛速率:

$$
\begin{cases}
\|\Lambda^{\sigma}(\rho-\bar{\rho})(t)\|_{L^p}\lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}-\sigma_0)}, \quad \sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}\in(\sigma_0,\frac{d}{2}],\\
\|\Lambda^{\sigma}(u,n-\bar{n},w)(t)\|_{L^p}\lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}-\sigma_0)}, \quad \sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}\in(\sigma_0,\frac{d}{2}+1],\\
\|\Lambda^{\sigma}(u-w)(t)\|_{L^p}\lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}-\sigma_0)}, \quad \sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}\in(\sigma_0,\frac{d}{2}].
\end{cases}
$$

注记 1.3.21. 定理 1.3.14、1.3.16 和 1.3.18 的证明见第四章, 也可以参见 [157].

下面我们简要说明上述定理证明的主要困难和想法. 可压缩 NS-Euler 方程组 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 可看做带外力项 $-\kappa n(u-w)$ 的可压缩 NS 方程组 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 和带外力项 $\kappa n(u-w)$ 的可压缩 Euler 方程组 $(1.3.25)_3$-$(1.3.25)_4$ 相互耦合而成. 然而, 根据文献 [64] 中可压缩 Navier-Stokes 方程组在临界 Besov 空间中的整体存在性结果, 为了建立 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 中速度 u 的临界正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})$, 我们需要外力项 $-\kappa n(u-w)$ 中 w 的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$; 同时类似于文献 [61] 中关于带阻尼可压缩 Euler 方程组在临界 Besov 空间中的证明方法, 为了建立 $(1.3.25)_3$-$(1.3.25)_4$ 中速度 w 的临界正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1})$, 我们需要外力项 $\kappa n(u-w)$ 中 u 的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}+1}_{2,1})$. 然而, 上述对速度 w 在 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 中所要求的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 与其在 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 中临界的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1})$

不匹配, 并且 u 也有类似的问题, 这造成了建立解一致先验估计的本质困难.

为了克服这个困难, 对于线性部分, 我们在频率截断意义下观察到 $u-w$ 的估计 (由拉力 (drag-force) 项给出) 和 u 的估计 (由粘性项给出) 揭示了

$$2^{2j}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2+\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}^2 \gtrsim \begin{cases} 2^{2j}\|\dot{\Delta}_j w\|_{L^2}^2, & \text{若 } j\le 0,\\ \|\dot{\Delta}_j w\|_{L^2}^2. & \text{若 } j\ge -1. \end{cases}$$

因而, 我们能够将 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 和 $(1.3.25)_3$-$(1.3.25)_4$ 的结构联立, 进而对 $(\rho,\nabla\rho,u,n,w)$ 建立低阶 $\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}$-估计. 然后, 利用粘性项给出 u 的高阶正则性, 我们在高频单独分析 $(1.3.25)_3$-$(1.3.25)_4$ 以得到 (n,w) 的高阶 $\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}$-估计. 值得强调的是,, 我们建立了速度 u, w 的 $L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})$ 正则性而非其作为外力项一部分所需的 $L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 正则性.

然而, 对于非线性估计, $(1.3.25)_2$ 中的非线性项 $-\kappa(\frac{n}{\rho}-\frac{\bar{n}}{\bar{\rho}})(u-w)$ 会导致额外的困难. 事实上, 与其他非线性项不同的是, $-\kappa(\frac{n}{\rho}-\frac{\bar{n}}{\bar{\rho}})(u-w)$ 在空间 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 中不是尺度不变的. 为此, 我们观察到相对速度 $u-w$ 满足一个带阻尼的方程 (4.2.29), 并以此建立了相对速度 $u-w$ 在低频相比解更优的 $\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})$ 估计, 并将其结合解 (ρ,u,n,w) 的先验估计来控制 $-\kappa(\frac{n}{\rho}-\frac{\bar{n}}{\bar{\rho}})(u-w)$ 的 $L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 范数, 最终封闭了解的一致先验估计 (参见小节 4.2.1-4.2.2).

当 $(\rho_0-\bar{\rho},u_0,n_0-\bar{n},w_0)^\ell$ 还在 Besov 空间 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 中有界时, 受到文献 [96,224] 的启发, 我们利用一个新的时间加权能量方法证明定理 1.3.16 中柯西问题 (1.3.25) 解的最优收敛速率 (1.3.29), 即对带时间权 t^θ 的能量作类似于整体存在性部分的先验估计, 并在加权能量和解的 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 正则性之间建立时-空插值不等式, 最终证明了该时间加权能量泛函由 $t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)}$ 所控制, 进而证明了解 (ρ,u,n,w) 在 (1.3.29) 中的最优时间收敛速率. 然后, 利用已得解的衰减估计和带阻尼方程 (4.2.29), 我们可知 $u-w$ 在低频对应 $\nabla(\rho,u,n)$ 的衰减, 因而其中的一阶导数蕴含了 $u-w$ 比解的时间收敛速率快 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ (参见小节 4.3.2).

当 $(\rho_0-\bar{\rho},u_0,n_0-\bar{n},w_0)^\ell$ 还在 Besov 空间 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 中充分小时, 通过线性化方程组的半群估计、Duhamel 原理以及非线性项的二次时间加权估计, 我们证明定理 1.3.18 中柯西问题 (1.3.25) 解 (ρ,u,n,w) 和相对速度 $u-w$ 在 (1.3.33) 中的时间收敛速率. 值得强调的是, 相对速度 $u-w$ 在空间 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 中的衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 用于控制非线性项 $\|\kappa(\frac{n}{\rho}-\frac{\bar{n}}{\bar{\rho}})(u-w)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}$, 而这对封闭能量估计起到了关键作用 (参见节 4.4).

1.3.5 高维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck 方程组

定理 1.3.14 和 1.3.16 的方法也可用于研究到高维可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.1) 解的整体适定性和最优时间衰减速率. 我们考虑高维可压缩 NS-VFP 方程组 (1.1.11) 的柯西问题:

$$
\begin{cases}
\rho_t+\operatorname{div}_x(\rho u)=0, \\
(\rho u)_t+\operatorname{div}_x(\rho u\otimes u)+\nabla_x P(\rho)=\mu\Delta_x u+(\mu+\lambda)\nabla_x\operatorname{div}_x u-\int_{\mathbb{R}^d}\kappa(u-v)F\,dv, \\
F_t+v\cdot\nabla_x F+\operatorname{div}_v\big(\kappa(u-v)F-\kappa\nabla_v F\big)=0, \qquad (x,v)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,\ \ t>0, \\
(\rho(x,0),u(x,0),F(x,v,0))=(\rho_0(x),u_0(x),F_0(x,v)), \qquad (x,v)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d, \\
(\rho_0(x),u_0(x),F_0(x,v))\to(\bar\rho,0,M), \qquad |x|\to\infty,
\end{cases}
\tag{1.3.34}
$$

其中 $\kappa>0, \bar\rho>0$ 为常数, 粘性系数 μ, λ 是满足 $\mu>0, 2\mu+\lambda>0$ 的常数, $P(\rho)$ 为光滑压力函数, 且对 $\rho>0$ 满足 $P'(\rho)>0$, M 表示整体 Maxwellian

$$
M=M(v):=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|v|^2}{2}}.
$$

我们研究可压缩 NS-VFP 方程组柯西问题 (1.3.34) 解在低正则的临界 Besov 空间中的整体存在性和唯一性.

定理 1.3.22. *对维数 $d\geq 2$, 如果初值 (ρ_0,u_0,F_0) 满足 $(\rho_0-\bar\rho,u_0,M^{-\frac12}(F_0-M))\in\dot B_{2,1}^{\frac d2-1,\frac d2}\times\dot B_{2,1}^{\frac d2-1}\times\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac d2-1}$ 以及*

$$
\hat\delta_*:=\|(\rho_0-\bar\rho,u_0)^\ell\|_{\dot B_{2,1}^{\frac d2-1}}+\|(\nabla\rho_0,u_0)^h\|_{\dot B_{2,1}^{\frac d2-1}}+\|M^{-\frac12}(F_0-M)\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac d2-1}}\leq\delta_*,
$$

此处 $\delta_*>0$ 为一个充分小的常数, 那么柯西问题 (1.3.34) 有唯一的整体解 (ρ,u,F), 且 (ρ,u,F) 满足

$$
\begin{aligned}
&\|(\rho-\bar\rho,u)\|^\ell_{\widetilde L^\infty_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2-1})}+\|(\nabla\rho,u)\|^h_{\widetilde L^\infty_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}+\|M^{-\frac12}(F-M)\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac d2-1})}\\
&\quad+\|(\rho-\bar\rho,u)\|^\ell_{\widetilde L^2_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}+\|M^{-\frac12}(F-M)\|^\ell_{\widetilde L^2_t(\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac d2})}\\
&\quad+\|\rho-\bar\rho\|^h_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}+\|u\|^h_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+1})}+\|M^{-\frac12}(F-M)\|^h_{L^1_t(\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac d2-1})}\\
&\quad+\|u-w\|^\ell_{\widetilde L^2_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2-1})}+\|L^{\frac12}\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}M^{-\frac12}(F-M)\|_{\widetilde L^2_t(\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac d2-1})}\leq C\hat\delta_*,\quad t>0,
\end{aligned}
$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1-4.5.6, w 表示粒子分布函数的宏观速度, $\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}f$ 表示 f 的宏观部分, $L^{\frac12}f:=(|\nabla_v f|^2+(1+|v|^2)f^2)^{\frac12}$, $C>0$ 为一个与时间无关的常数.

注记 1.3.23. 与可压缩 NS-E 方程组相比 (见定理 1.3.14), 在定理 1.3.22 中, 由于介观 Fokker-Planck 算子的影响, 可压缩 NS-VFP 方程组柯西问题 (1.3.34) 的解在高频和低频有完全不同的耗散特性: 解的高频部分对应 L^1 时间可积性的耗散结构, 然而其低频部分对应 L^2 时间可积性的耗散结构; 此外, 由于拉力 (drag force) 项和微观部分的阻尼效应, 在低频, $u-w$ 和 $\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}M^{-\frac{1}{2}}(F-M)$ 的正则性要优于 $(\rho-\bar{\rho},u,M^{-\frac{1}{2}}(F-M))$ 的正则性.

此外, 我们建立可压缩 NS-VFP 方程组柯西问题 (1.3.34) 解在 Besov 空间中的最优时间衰减速率.

定理 1.3.24. *对维数 $d\geq 2$, 在定理 1.3.22 的假设下, 令 (ρ,u,F) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.22 给出的整体强解. 如果对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 初值 (ρ_0,u_0,F_0) 还满足 $(\rho_0-1,u_0)^\ell\in\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 以及 $M^{-\frac{1}{2}}(F_0-M)^\ell\in\dot{\mathbb{B}}^{\sigma_0}_{2,\infty}$, 则对任意 $t>0$, 该整体解 (ρ,u,F) 以最优时间速率收敛到平衡态:*

$$
\begin{cases}
\|(\rho-\bar{\rho},u)(t)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}+\|M^{-\frac{1}{2}}(F-M)(t)\|^{\ell}_{\dot{\mathbb{B}}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}, \quad \sigma\in(\sigma_0,\dfrac{d}{2}-1],\\
\|(\nabla\rho,u)(t)\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|M^{-\frac{1}{2}}(F-M)(t)\|^{h}_{\dot{\mathbb{B}}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)},
\end{cases}
$$

且相对速度 $u-w$ 和宏观部分 $\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}f$ 满足

$$
\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}M^{-\frac{1}{2}}(F-M)(t)\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\leq C(1+t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)\}}.
$$

若 $d\geq 3$ 及 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-2)$, 则 $u-b$ 和 $\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}M^{-\frac{1}{2}}(F-M)$ 进一步满足

$$
\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}+\|\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}M^{-\frac{1}{2}}(F-M)(t)\|_{\dot{\mathbb{B}}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)},\ \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}-2].
$$

注记 1.3.25. 定理 1.3.16 揭示了扰动 $(\rho-\bar{\rho},u,M^{-\frac{1}{2}}(F-M))$ 在空间 $\dot{B}^{\sigma}_{2,1}\times\dot{B}^{\sigma}_{2,1}\times\dot{\mathbb{B}}^{\sigma}_{2,1}$ 中的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}$ 等同于当初值在空间 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 有界时热方程的柯西问题解的最优时间衰减速率；然而, 由于耦合拉力 (drag force) 项以及微观部分的阻尼效应, $(u-w,\{\mathbf{I}-\mathbf{P}\}M^{-\frac{1}{2}}(F-M))$ 在空间 $\dot{B}^{\sigma}_{2,1}\times\dot{\mathbb{B}}^{\sigma}_{2,1}$ 中的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}$ 比 $(\rho-\bar{\rho},u,M^{-\frac{1}{2}}(F-M))$ 的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}$ 更快.

注记 1.3.26. 定理 1.3.22 和 1.3.24 的证明参见 [158].

1.3.6 具有趋化性的双曲-抛物方程组

Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 是生物数学中的一类基本模型, 用以模拟细胞的聚集运动或者趋化性影响下细菌密度的变化等 (参见 [5, 146, 147, 184, 193]). 具有趋化性的双曲抛物方程组 (1.1.12) 可以形式逼近 Keller-Segel 方程组 (1.3.37), 用以更好地模拟新生血管生成

(参见 [2,92]). 一个自然的问题是研究具有趋化性的双曲-抛物方程组 (1.1.12) 和其当松弛参数 $\varepsilon \to 0$ 时与极限方程组之间的联系. 与带阻尼可压缩 Euler 方程组类似 (参见 [59,229]), 双曲-抛物方程组 (1.1.12) 的解 $(\rho,u,\phi)(x,t)$, 引入时间尺度变换

$$(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})(x,t):=(\rho,\frac{1}{\varepsilon}u,\phi)(x,\frac{1}{\varepsilon}t), \tag{1.3.35}$$

则 $(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})(x,t)$ 满足柯西问题

$$\begin{cases}\rho^{\varepsilon}_t+\mathrm{div}\,(\rho^{\varepsilon}u^{\varepsilon})=0,\\ \varepsilon^2(\rho^{\varepsilon}u^{\varepsilon})_t+\varepsilon^2\mathrm{div}\,(\rho^{\varepsilon}u^{\varepsilon}\otimes u^{\varepsilon})+\nabla P(\rho^{\varepsilon})-\chi\rho^{\varepsilon}\nabla\phi^{\varepsilon}+\rho^{\varepsilon}u^{\varepsilon}=0,\\ \varepsilon\phi^{\varepsilon}_t-\Delta\phi^{\varepsilon}-a\rho^{\varepsilon}+b\phi^{\varepsilon}=0, \qquad x\in\mathbb{R}^d,\quad t>0,\\ (\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})(x,0)=(\rho_0,u_0,\phi_0)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d,\\ (\rho_0,u_0,\phi_0)(x)\to(\bar{\rho},0,\bar{\phi}), \qquad |x|\to\infty.\end{cases} \tag{1.3.36}$$

形式上, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 若 $(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})$ 收敛到极限 (ρ^*,u^*,ϕ^*), 那么 (ρ^*,u^*) 为如下 Keller-Segel 方程组的解:

$$\begin{cases}\rho^*_t-\mathrm{div}\,(\nabla P(\rho^*)-\chi\rho^*\nabla\phi^*)=0,\\ -\Delta\phi^*-a\rho^*+b\phi^*=0,\end{cases} \tag{1.3.37}$$

且 u^* 由如下关系决定:

$$\rho^*u^*=-\nabla P(\rho^*)+\chi\rho^*\nabla\phi^*. \tag{1.3.38}$$

(1.3.38) 可看做 Darcy law (参见 [119,178]) 的等价形式.

我们研究双曲-抛物方程组 (1.1.12) 在低正则的临界 Besov 空间中收敛到 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 的松弛极限, 给出双曲-抛物方程组 (1.1.12) 作为 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 一个合理逼近系统的严格证明. 此外, 我们也研究双曲-抛物方程组 (1.1.12) 在临界 Besov 空间中的最优时间衰减速率. 考虑任意维数双曲-抛物方程组 (1.1.12) 的柯西问题:

$$\begin{cases}\rho_t+\mathrm{div}\,(\rho u)=0,\\ (\rho u)_t+\mathrm{div}\,(\rho u\otimes u)+\nabla P(\rho)+\dfrac{1}{\varepsilon}\rho u-\chi\rho\nabla\phi=0,\\ \phi_t-\Delta\phi-a\rho+b\phi=0, \qquad x\in\mathbb{R}^d,\quad t>0,\\ (\rho,u,\phi)(x,0)=(\rho_0,u_0,\phi_0)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d,\\ (\rho_0,u_0,\phi_0)(x)\to(\bar{\rho},0,\bar{\phi}), \qquad |x|\to\infty,\end{cases} \tag{1.3.39}$$

其中 $\bar{\rho}>0$ 和 $\bar{\phi}:=\frac{a}{b}\bar{\rho}>0$ 为常数, $\varepsilon\in(0,1)$ 为松弛参数, $P(\rho)$ 为光滑压力函数, 且对 $\rho>0$ 满足 $P'(\rho)>0$.

首先,我们建立柯西问题 (1.3.39) 经典解在临界 Besov 空间中的整体存在性和唯一性.

定理 1.3.27. 对维数 $d\geq 1$, 假设

$$P'(\bar{\rho})>\frac{a\chi}{b}\bar{\rho}>0, \tag{1.3.40}$$

且高低频分界点取为

$$J_{\varepsilon}:=-[\log_2\varepsilon]-k_0, \tag{1.3.41}$$

此处 $k_0>0$ 为一个与 ε 无关的常数. 如果初值 (ρ_0,u_0,ϕ_0) 满足 $(\rho_0-\bar{\rho},u_0,\phi_0-\bar{\phi})\in\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1}\times\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1}\times\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+2}_{2,1}$ 且

$$\hat{\delta}_2:=\|(\rho_0-\bar{\rho},u_0,\phi_0-\bar{\phi})^{\ell,J_{\varepsilon}}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon\|(\rho_0-\bar{\rho},u_0,\nabla\phi_0)^{h,J_{\varepsilon}}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\leq\delta_2, \tag{1.3.42}$$

其中 $\delta_2>0$ 是一个与 ε 无关且充分小的常数, 则柯西问题 (1.3.39) 有唯一的整体经典解 (ρ,u,ϕ), 且 (ρ,u,ϕ) 满足

$$\begin{cases}\rho-\bar{\rho}\in C_b(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}+2,\frac{d}{2}+1}_{2,1}),\\ u\in C_b(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}+2,\frac{d}{2}+1}_{2,1}),\\ \phi-\bar{\phi}\in C_b(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+2}_{2,1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}+2,\frac{d}{2}+3}_{2,1}),\end{cases} \tag{1.3.43}$$

以及

$$\begin{aligned}&\|(\rho-\bar{\rho},u,\phi-\bar{\phi})\|^{\ell,J_{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(\rho-\bar{\rho},u,\nabla\phi)\|^{h,J_{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\quad+\varepsilon\|(\rho-\bar{\rho},\phi-\bar{\phi})\|^{\ell,J_{\varepsilon}}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|u\|^{\ell,J_{\varepsilon}}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|u\|^{\ell,J_{\varepsilon}}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\phi_t\|^{\ell,J_{\varepsilon}}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\quad+\|(\rho-\bar{\rho},u)\|^{h,J_{\varepsilon}}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\phi-\bar{\phi}\|^{h,J_{\varepsilon}}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})}+\|\phi_t\|^{h,J_{\varepsilon}}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\quad+\|\frac{1}{\varepsilon}\rho u+\nabla P(\rho)-\chi\rho\nabla\phi\|^{\ell,J_{\varepsilon}}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\quad+\|\phi-\bar{\phi}-(b-\Delta)^{-1}(\rho-\bar{\rho})\|^{\ell,J_{\varepsilon}}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\leq C\hat{\delta}_2,\quad t>0,\end{aligned} \tag{1.3.44}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1、4.5.2、4.5.4 和 5.5.1, $C>0$ 为一个与时间和 ε 无关的常数.

注记 1.3.28. 通过选取满足 $2^{J_{\varepsilon}}\sim\frac{1}{\varepsilon}$ 的高低频的分界点 (1.3.41), 我们将频率空间分为低频空间 $\{\xi\in\mathbb{R}^d||\xi|\leq 2^{-k_0}\frac{8}{3\varepsilon}\}$ 和高频空间 $\{\xi\in\mathbb{R}^d||\xi|\geq 2^{-k_0}\frac{3}{4\varepsilon}\}$, 从而建立了解 (ρ,u,ϕ) 关于 ε 及时间的一致估计 (1.3.44). 该高低频分界点 (1.3.41) 和一致估计 (1.3.44) 揭示了当松弛参数 $\varepsilon\to 0$ 时方程组 (1.1.12) 从双曲-抛物耦合结构向完全抛物结构的转化.

注记 1.3.29. 定理 1.3.27 中建立一致估计 (1.3.44) 的关键观察是: 在低频区域, 有效变量 $\frac{1}{\varepsilon}\rho u+\nabla P(\rho)-\chi\rho\nabla\phi$ 和 $\phi-\bar{\phi}-a(b-\Delta)^{-1}(\rho-\bar{\rho})$ 相比解 (ρ,u,ϕ) 有更优的正则性和 ε 的衰减性.

然后, 当初始扰动还在 Besov 空间 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ $(\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}))$ 中有界时, 我们证明双曲-抛物方程组柯西问题 (1.3.39) 的经典解以最优时间代数速率收敛到平衡态.

定理 1.3.30. 对维数 $d\geq 1$, 设定理 1.3.27 的假设成立, 且令 (ρ,u,ϕ) 为柯西问题 (1.3.39) 由定理 1.3.27 给出的整体经典解. 若对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$, 初值 (ρ_0,u_0,ϕ_0) 还满足 $(\rho_0-\bar{\rho},u_0,\phi_0-\bar{\phi})^{\ell,J_\varepsilon}$ 在 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 中关于 ε 一致有界, 则对 $t>0$, 该整体解 (ρ,u,ϕ) 满足

$$\begin{cases}\|(\rho-\bar{\rho},u,\phi-\bar{\phi})(t)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}, & \sigma\in(\sigma_0,\dfrac{d}{2}],\\ \|(\rho-\bar{\rho},u,\nabla\phi)(t)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\leq C(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}, & \end{cases}\tag{1.3.45}$$

且 u 和 $a\rho-b\phi$ 满足

$$\|(u,b\phi-a\rho)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\leq\frac{C}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)\}},\tag{1.3.46}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1、4.5.4 和 5.5.1, $C>0$ 为与 ε 及时间无关的常数.

若 $d\geq 2$ 及 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 则 u 和 $a\rho-b\phi$ 进一步满足

$$\|(u,b\phi-a\rho)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq\frac{C}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)},\quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}-1].\tag{1.3.47}$$

注记 1.3.31. 由 (1.3.45) 以及 Besov 空间中的插值不等式, 对 $\Lambda:=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$、$p\geq 2$ 及 $t>0$, 整体解 (ρ,u,ϕ) 有如下 L^p-型时间收敛估计:

$$\|\Lambda^{\sigma}(\rho-\bar{\rho},u,\phi-\bar{\phi})(t)\|_{L^p}\lesssim(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}-\sigma_0)},\quad \sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}\in(\sigma_0,\frac{d}{2}].$$

若 $d\geq 2$ 及 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 则 (1.3.47) 进一步给出

$$\|\Lambda^{\sigma}(u,b\phi-a\rho)(t)\|_{L^p}\lesssim\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}-\sigma_0)},\quad \sigma+\frac{d}{2}-\frac{d}{p}\in(\sigma_0,\frac{d}{2}-1].$$

因而, (1.3.45) 揭示了 $a\rho-b\phi$ 相比化学物质的产生 $a\rho$ 和化学物质的消耗 $b\phi$ 的时间收敛速率快 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$. 这是我们观察到并证明的新现象.

注记 1.3.32. 类似于定理 1.3.18 的论证过程, 如果在定理 1.3.30 中假设 $\|(\rho_0-\bar{\rho},u_0,\phi_0-\bar{\phi})^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}$ 充分小, 则我们可以建立 $(\rho-\bar{\rho},u,\phi-\bar{\phi})$ 在更一般的空间 $\dot{B}^{\sigma}_{2,1}$ $(\sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}+1])$ 的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}$, 以及 u 和 $a\rho-b\phi$ 在更一般的空间 $\dot{B}^{\sigma}_{2,1}$ $(\sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}])$ 中的时间衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}$ (此时不需要限制 $d\geq 2$ 及 $\sigma_0<\frac{d}{2}-1$).

最后, 我们研究双曲-抛物方程组 (1.1.12) 收敛到 Keller-Segel 方程组的松弛极限问题. 在严格证明 (1.3.36) 当 $\varepsilon \to 0$ 时强收敛到 (1.3.37)-(1.3.38) 前, 我们先考虑 Keller-Segel 方程组的柯西问题

$$\begin{cases} \rho^*_t - \operatorname{div}(\nabla P(\rho^*) - \chi\rho^*\nabla\phi^*) = 0, \\ -\Delta\phi^* - a\rho^* + b\phi^* = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ \rho^*(x,0) = \rho^*_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d, \\ \rho^*_0(x) \to \bar{\rho}, \qquad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{1.3.48}$$

我们证明 Keller-Segel 方程组的柯西问题 (1.3.48) 在 Besov 空间中强解的整体存在性和唯一性.

定理 1.3.33. 设 (1.3.40) 成立. 对维数 $d \geq 1$ 及 $p \in [1,\infty]$, 如果初值 ρ^*_0 满足

$$\|\rho^*_0 - \bar{\rho}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} \leq \delta^*_2, \tag{1.3.49}$$

其中 $\delta^*_2 > 0$ 为一个充分小的常数, 则柯西问题 (1.3.48) 有唯一的整体强解 (ρ^*,ϕ^*), 且 (ρ^*,ϕ^*) 满足

$$\rho^* - \bar{\rho} \in C_b(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}) \cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1}), \quad \phi^* - \bar{\phi} \in L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1} \cap \dot{B}^{\frac{d}{p}+4}_{p,1}), \tag{1.3.50}$$

以及

$$\|\rho^* - \bar{\rho}\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}) \cap L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})} + \|\phi^* - \bar{\phi}\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1} \cap \dot{B}^{\frac{d}{p}+4}_{p,1})} \leq C\|\rho^*_0 - \bar{\rho}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}, \quad t > 0, \tag{1.3.51}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1 和 4.5.4, $C > 0$ 为一个与时间无关的常数.

我们严格证明当松弛参数 $\varepsilon \to 0$ 时, $(\rho^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 以速率 ε 收敛到 Keller-Segel 方程组柯西问题 (1.3.48) 的解 (ρ^*,u^*), 且 u^ε 以速率 ε 收敛到由 (1.3.38) 决定的 u^*.

定理 1.3.34. 对维数 $d \geq 1$, 设定理 1.3.27 中的假设成立, 且令 $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 为柯西问题 (1.3.36) 由定理 1.3.27 及尺度变换 (1.3.35) 给出的整体解. 则 $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 满足

$$\|\nabla P(\rho^\varepsilon) - \chi\rho^\varepsilon\nabla\phi^\varepsilon + \rho^\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|a\rho^\varepsilon + \Delta\phi^\varepsilon - b\phi^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \leq C\varepsilon, \quad t > 0, \tag{1.3.52}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1 及 4.5.4, $C > 0$ 为一个与时间及 ε 无关的常数.

进一步, 设 (1.3.49) $(p = 2)$ 成立, (ρ^*,ϕ^*) 为柯西问题 (1.3.48) 由定理 1.3.30 给出的整体解, 且 u^* 由 (1.3.38) 给定. 若初值 ρ_0 和 ρ^*_0 还满足

$$\|\rho_0 - \rho^*_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} = O(\varepsilon), \tag{1.3.53}$$

则以下收敛速率估计成立:

$$\|\rho^\varepsilon-\rho^*\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|u^\varepsilon-u^*\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\phi^\varepsilon-\phi^*\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\leq C\varepsilon,\ \ t>0, \tag{1.3.54}$$

因而, 当 $\varepsilon\to0$ 时, $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 在如下意义下强收敛到 (ρ^*,u^*,ϕ^*):

$$\begin{cases}\rho^\varepsilon\to\rho^* & 于\quad \widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}),\\ u^\varepsilon\to u^* & 于\quad L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}),\\ \phi^\varepsilon\to\phi^* & 于\quad L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1}).\end{cases} \tag{1.3.55}$$

注记 1.3.35. 定理 1.3.34 是双曲抛物方程组 (1.1.12) 收敛到 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 松弛极限的第一个严格结果.

注记 1.3.36. 值得强调的是, (1.3.52) 对应于 (1.3.44) 中关于有效变量 $\frac{1}{\varepsilon}\rho u+\nabla P(\rho)-\chi\rho\nabla\phi$ 和 $\phi-\bar{\phi}-a(b-\Delta)^{-1}(\rho-\bar{\rho})$ 的一致估计. 该估计是研究双曲抛物方程组 (1.1.12) 当 $\varepsilon\to0$ 时到 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 收敛速率估计 (1.3.54) 的关键所在.

注记 1.3.37. 定理 1.3.27、1.3.30、1.3.33 和 1.3.34 的证明详见第五章, 也可以参见 [63].

我们解释上述定理证明的主要困难和想法. 由于 (5.1.1) 缺少对称性条件, 我们很难直接应用以往耗散双曲方程组 (如带阻尼 Euler 方程组, 参见 [61, 226, 227] 等) 或一般的双曲-抛物方程组 (如可压缩 Navie-Stokes 方程组, 参见 [143, 144, 201] 等) 的经典理论分析双曲-抛物方程组 $(1.3.39)_1$-$(1.3.39)_3$ 的耗散结构. 此外, 当研究带阻尼 Euler 方程组的松弛极限时, 通常可以将证明归结于 $\varepsilon=1$, 再通过尺度变换直接得到与 ε 无关的估计 (参见 [60–62]). 然而, 双曲方程 $(1.3.39)_1$-$(1.3.39)_2$ 和抛物方程 $(1.3.39)_3$ 具有不同的尺度不变性, 对方程组 $(1.3.39)_1$-$(1.3.39)_3$ 不易找到这样的尺度变换, 因而需要在计算中考虑到解对参数 ε 的精确依赖性, 而这导致了建立解与 ε 无关先验估计的本质困难.

为了克服这些困难, 我们首先定义 ρ 和 ϕ 的扰动为

$$n:=\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\frac{P'(s)}{s}ds,\quad \psi:=\phi-\bar{\phi},$$

从而 ρ 可以改写为 $\rho=\bar{\rho}+a\bar{\rho}P'(\bar{\rho})^{-1}n+H(n)$, 其中 $H(n)\sim n^2$ ($|n|<<1$). 该扰动变量 n 可以简化方程 $(1.3.39)_2$, 并且将方程 $(1.3.39)_3$ 改写为一个带阻尼和二次非线性项 $H(n)$ 的热方程 (参见改写后的柯西问题 (5.1.1)).

为证明定理 1.3.27 中柯西问题 (5.1.1) 经典解整体存在性, 其关键是建立 (n,u,ψ) 与 ε 及时间无关的先验估计. 在低频估计中, 受到文献 [60, 107, 116] 启发, 我们引入两个新的有效变量

$$\varphi := \psi - (b-\Delta)^{-1}\Big(\frac{a\bar{\rho}}{P'(\bar{\rho})}n + H(n)\Big), \qquad \omega := u + \varepsilon\nabla n - \varepsilon\chi\nabla\phi,$$

以利用如下耦合特性:

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u = -\dfrac{1}{\varepsilon}\omega, \\ \psi_t = (\Delta - b)\varphi. \end{cases} \tag{1.3.56}$$

将方程组 $(5.1.1)_1$-$(5.1.1)_3$ 用 (n,φ,ω) 的形式改写成扩散阻尼耦合的方程组 (5.2.5), 然后通过选取一个满足 $2^{J_\varepsilon} \sim \frac{1}{\varepsilon}$ 的高低频分界点 (1.3.41), 建立了 (n,φ,ω) 的一致估计, 进而得到了 (u,ψ) 的一致估计 (参见小节 5.2.1). 值得强调的是, 有效变量 (φ,ω) 在低频的正则性和关于 ε 的依赖性要优于 (n,φ,ω), 而这是方程组 (1.1.12) 松弛极限的关键所在. 在高频估计中, 我们引入了一个新的非线性 Lyapunov 能量泛函 (5.2.41), 并以此建立了 (n,u,ψ) 高频部分的一致估计. 值得强调的是, (5.2.41) 中权函数 $w_j \sim 1$ 的引入是为了抵消 $(5.1.1)_1$ 中非线性项 $G(n)\mathrm{div}\,u$. 此外, 为了克服二次非线性项 $H(n)$ 带来的困难, 我们将交叉项 $\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j H(n)\dot{\Delta}_j\psi dx$ 和非线性项 $2^{-2j}\|\dot{\Delta}_j H(n)\|_{L^2}^2$ 加入能量泛函 (5.2.41), 并证明了关于二次函数 $H(n)$ 在 Besov 空间中的一些新估计 (见引理 5.5.6). 利用高频和低频的估计, 我们能够封闭柯西问题 (1.3.39) 解关于 ε 一致的先验估计, 最终证明其整体存在性. 值得强调的是, (1.3.40) 是一个自然的结构性条件, 其保证了在低频估计时算子 $(5.2.6)_1$ 的严格椭圆性以及在高频估计 (5.2.49) 时能量泛函的强制性.

其次, 当证明定理 1.3.30 时, 由于抵消非线性项需要 L^1 时间可积性和 L^2 时间可积性的混合耗散结构 (参见 (1.3.44)), 我们无法直接应用文献 [96, 229] 中的方法. 为此, 基于定理 1.3.16 的想法, 我们先建立 (n,ω,φ) 的时间加权估计, 然后转化为 (u,ψ) 的时间加权估计, 最终通过时-空插值不等式证明解的最优时间收敛速率 (1.3.45). 此外, 我们观察到方程 $(5.1.1)_2$-$(5.1.1)_3$ 的阻尼效应, 得到了 (1.3.46)-(1.3.47) 中 u 和 $a\rho - b\phi$ 相比解 (ρ,u,ϕ) 更快的时间收敛速率.

然后, 为证明双曲-抛物方程组 (1.1.12) 收敛到 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 的松弛极限, 我们需要先建立 Keller-Segel 系统柯西问题 (1.3.48) 强解的整体存在性和唯一性. 为此, 我们将 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 改写如下:

$$\rho_t^* - \tilde{\Delta}_*\rho^* = \text{二次非线性项}.$$

在 $P'(\bar{\rho}) > \frac{\chi a}{b}\bar{\rho}$ 的假设下, 上式中微分算子 $\tilde{\Delta}_*$ 的性质与拉普拉斯算子 Δ 类似, 因而我们建立了柯西问题 (1.3.48) 解相应的先验估计 (参见见小节 5.4.1). 为了得到收敛速率, 我们观察到 $\widetilde{\rho}^\varepsilon := \rho^\varepsilon - \rho^*$ 满足

$$\widetilde{\rho}_t^\varepsilon - \tilde{\Delta}_*\widetilde{\rho}^\varepsilon = R^\varepsilon + \text{二次非线性项},$$

基于 (1.3.56) 以及 (1.3.44) 中有效变量 (φ,ω) 的一致估计, 我们证明余项 R^ε 当 $\varepsilon \to 0$ 时在 $L^1(\mathbb{R}_+;B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})$ 中以速率 ε 收敛到零, 从而建立相应的收敛速率估计, 最终严格证明 $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 强收敛到 (ρ^*,u^*,ϕ^*) (参见小节 5.4.2).

第二章 一维可压缩 Navier-Stokes-Vlasov 方程组的整体弱解

2.1 引言

在本章, 我们考虑可压缩 NS-V 方程组在一维周期域上的初值问题:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + (P(\rho))_x = (\mu(\rho)u_x)_x - \int_{\mathbb{R}} \kappa(\rho)(u-v)F\,dv, \\ F_t + vF_x + (\kappa(\rho)(u-v)F)_v = 0, \quad (x,v) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}, \quad t>0, \\ (\rho(x,0), u(x,0), F(x,v,0)) = (\rho_0(x), u_0(x), F_0(x,v)), \quad (x,v) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

我们证明定理 1.3.1 关于一维可压缩 NS-V 方程组的初值问题 (1.3.1) 整体弱解的存在性、唯一性和正则性, 并分析该整体弱解的长时行为. 为阅读方便, 我们重新陈述定理 1.3.1 如下:

定理 1.3.1. 对给定的常数 $r_0>0$, 假设初值 (ρ_0,u_0,F_0) 满足

$$\begin{cases} \inf\limits_{x\in\mathbb{T}} \rho_0(x) > 0, \quad \rho_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u_0 \in H^1(\mathbb{T}), \\ 0 \le F_0 \in L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}), \quad \mathrm{Supp}_v F_0(x,\cdot) \subset \{v\in\mathbb{R} \;\big|\; |v| \le r_0\}, \quad x\in\mathbb{T}, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

则初值问题 (1.3.1) 有唯一的整体弱解 (ρ,u,F), 且对任意给定的时间 $T>0$, (ρ,u,F) 满足

$$\begin{cases} \rho_- \le \rho \le \rho_+, \quad \|\rho\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \le C, \quad 0 \le F \le e^{\rho_+ T}\|F_0\|_{L^\infty_{x,v}}, \\ \rho \in C([0,T];H^1(\mathbb{T})) \cap L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathbb{T})), \\ u \in C([0,T];H^1(\mathbb{T})) \cap L^2(0,T;H^2(\mathbb{T})), \\ F \in C([0,T];L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R})) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})), \end{cases} \tag{1.3.6}$$

及长时行为

$$
\begin{cases}
\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^\infty}+\|(u-u_c)(t)\|_{L^2}\le Ce^{-ct}, & 0<t<T,\\
\mathrm{W}_1(F,n\delta(v-u_c))(t)+\|n(w-u_c)(t)\|_{L^1}\le Ce^{-ct}, & 0<t<T,\\
\mathrm{Supp}_v F(x,\cdot,t)\subset\{v\in\mathbb{R}\mid |v-u_c|\le Ce^{-ct}\}, & (x,t)\in\mathbb{T}\times[0,T],
\end{cases}
\tag{1.3.7}
$$

其中常数 $\rho_->0$、$\rho_+>0$、$C>0$ 和 $c>0$ 与时间 $T>0$ 无关, 常数 ρ_c 和 u_c 由 (1.3.8) 给出, $W_1(f,g)$ 为由定义 2.4.1 给出的 1-Wasserstein 度量, $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 测度, n 和 nw 由 (1.3.9) 给出.

进一步, 若初值 (ρ_0,u_0,F_0) 还满足

$$
\rho_0\in H^2(\mathbb{T}),\quad u_0\in H^2(\mathbb{T}),\quad F_0\in C^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R}),
\tag{1.3.10}
$$

则 (ρ,u,F) 即为初值问题 (1.3.1) 满足如下正则性的整体强解:

$$
\begin{cases}
\rho\in C([0,T];H^2(\mathbb{T})), & \rho_t\in C([0,T];H^1(\mathbb{T})),\\
u\in C([0,T];H^2(\mathbb{T})), & t^{\frac{1}{2}}u\in L^\infty(0,T;H^3(\mathbb{T})),\\
F\in C([0,T];C^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R})), & F_t\in C([0,T];C^0(\mathbb{T}\times\mathbb{R})).
\end{cases}
\tag{1.3.11}
$$

我们回顾定理 1.3.1 证明的主要困难和想法. 对满足 (1.3.5) 和 (1.3.10) 的正则化初值, 我们易证初值问题 (1.3.1) 强解的局部存在性, 对该局部强解建立一致的先验估计, 从而将该解延拓为整体强解, 最终证明逼近强解序列收敛到初值问题 (1.3.1) 的整体弱解. 其中, 建立解先验估计的关键一步是证明密度有 ρ 一致的上界. 然而, 方程 $(1.3.1)_2$ 右端非线性拉力 (drag force) 项 $\rho n(w-u)$ 在估计密度 ρ 上界时会造成本质的困难. 事实上, 如果我们在估计方程 $(1.3.1)_2$ 时将 $\rho n(w-u)$ 当成已知的外力项, 则我们需要分布函数 F 的上界估计. 由 Vlasov 方程 $(1.3.1)_1$ 的性质, 在估计 F 之前我们需要密度 ρ 的上界:

$$
\|F\|_{L^\infty(0,T;L^\infty_{x,v})}\le e^{T\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}}.
$$

从而, 以往对一维可压缩 NS 方程估计密度 ρ 的上界的方法 (参见 [116,137,145,182,203] 等) 不能直接应用于一维可压缩 NS-V 方程组情形. 为了克服非线性拉力 (drag force) 项 $\rho n(w-u)$ 的困难, 我们通过引入一个新的有效速度

$$
u+I(n),
$$

将动量方程 $(1.3.1)_2$ 改写为

$$
\big(\rho(u+I(n))\big)_t+\big(\rho u(u+I(n))\big)_x+(\rho^\gamma)_x=(\mu(\rho)u_x)_x+\rho\int_0^1 nwdy.
\tag{1.3.12}
$$

利用基本能量估计、方程 (1.3.12) 以及 Zlotnik 不等式, 我们建立了密度 ρ 与时间无关的上界和与时间有关的下界 (参见定理 2.2.2). 然后, 通过建立流体部分的相对熵估计, 我们证明压力函数 $P(\rho)$ 的 $L^1(\mathbb{T})$-范数在一个充分大时间后是严格正的, 进而得到了密度 ρ 关于时间一致的下界 (参见引理 2.2.5-2.2.6). 此外, 我们也引入另一个新的有效速度

$$U := u + I(n) + \rho^{-2}\mu(\rho)\rho_x.$$

根据 $(1.3.1)_1$ 和 (1.3.12), U 满足一个带阻尼的输运方程

$$\rho(U_t + uU_x) + \gamma\rho^{\gamma+1}\mu(\rho)^{-1}U = \gamma\rho^{\gamma+1}\mu(\rho)^{-1}(u + I(n)) + \rho\int_0^1 nwdy. \tag{1.3.13}$$

利用 (1.3.13) 及密度 ρ 的一致上下界, 我们证得 ρ 与时间无关的 $H^1(\mathbb{T})$ 估计 (见定理 2.2.7).

本章其余部分的安排如下: 在节 2.2, 我们对初值问题 (1.3.1) 的解建立一致的先验估计. 在节 2.3, 我们将定理 1.3.1 的证明分成三部分: 在小节 2.3.1, 我们利用先验估计和紧性证明初值问题 (1.3.1) 弱解的整体存在性和正则性; 在小节 2.3.2, 我们证明初值问题 (1.3.1) 弱解的唯一性; 在小节 2.3.3, 我们研究初值问题初值问题 (1.3.1) 弱解的渐近行为. 在附录中, 我们给出 Wasserstein 度量的定义和 Zlotnik 不等式.

2.2 先验估计

不失一般性, 在本章的计算中我们取

$$A = \mu_0 = \mu_1 = \kappa = 1.$$

对满足 (1.3.5) 和 (1.3.10) 的正则化初值, 我们需要以对初值问题的局部强解建立一致的先验估计, 从而将该解延拓为整体强解, 最终用紧性证明逼近强解序列收敛到初值问题 (1.3.1) 的整体弱解 (参见小节 2.3.1).

首先, 我们建立基本能量估计.

引理 2.2.1. *对任意给定的时间 $T > 0$, 若 (ρ, u, F) $(\rho > 0, F \geq 0)$ 为当 $t \in (0,T)$ 时初值问题 (1.3.1) 的一个强解, 则在定理 1.3.1 的假设下, (ρ, u, F) 满足*

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{T}}\rho dx = \int_{\mathbb{T}}\rho_0 dx, \quad \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} F dvdx = \int_{\mathbb{T}} ndx = \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} F_0 dx, \quad t \in (0,T), \\ \sup\limits_{t\in(0,T)} \Big(\int_{\mathbb{T}}(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1})dx + \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\frac{1}{2}|v|^2 F dvdx\Big) \\ \qquad + \int_0^T\int_{\mathbb{T}}\mu(\rho)|u_x|^2 dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho|u-v|^2 F dvdxdt \leq E_0, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

其中

$$E_0 := \int_{\mathbb{T}} (\frac{1}{2}\rho_0|u_0|^2 + \frac{\rho_0^\gamma}{\gamma-1})dx + \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} \frac{1}{2}|v|^2 F_0 dvdx. \tag{2.2.2}$$

证明. 将方程 (1.3.1) 和 $(1.3.1)_3$ 积分, 我们得到 $(2.2.1)_1$. 为证 $(2.2.1)_2$, 在方程 $(1.3.1)_1$ 与 $(1.3.1)_2$ 两边各自乘以 $\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}$ 和 u, 在 $\mathbb{T}$ 上积分, 并把所得的两个等式相加得到

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}} (\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1})dx + \int_{\mathbb{T}} \mu(\rho)|u_x|^2 dx = -\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} \rho(u-v)uF dvdx. \tag{2.2.3}$$

同时, 方程 $(1.3.1)_3$ 两边乘以 $\frac{1}{2}|v|^2$ 并在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上积分, 我们得

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} \frac{1}{2}|v|^2 F dvdx = \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} \rho(u-v)vF dvdx. \tag{2.2.4}$$

结合 (2.2.3)-(2.2.4) 得到 $(2.2.1)_2$. 引理 2.2.1 证毕. □

由引理 2.2.1, 我们证明密度 ρ 关于时间一致的上界估计:

引理 2.2.2. *对任意给定的时间 $T>0$, 若 (ρ,u,F) $(\rho>0, F\geq 0)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (1.3.1) 的一个强解, 则在定理 1.3.1 的假设下, ρ 满足*

$$0 < \frac{1}{C_T} \leq \rho(x,t) \leq \rho_+, \quad (x,t)\in\mathbb{T}\times(0,T), \tag{2.2.5}$$

此处 $\rho_+>0$ 为一个与时间 $T>0$ 无关的常数, $C_T>0$ 为一个与时间 $T>0$ 有关的常数.

证明. 我们引入一个新的有效速度

$$u + I(n),$$

其中

$$I(g)(x) := \int_0^x g(y)dy - \int_0^1\int_0^y g(z)dzdy, \quad g\in L^1(\mathbb{T}). \tag{2.2.6}$$

对任意 $g=g(x)\in W^{1,1}(\mathbb{T})$, 算子 I 满足

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} I(g)(x) \leq \|g\|_{L^1}, \quad I(g)_x = g, \quad I(g_x) = g - \int_0^1 g(y)dy. \tag{2.2.7}$$

将方程 $(1.3.1)_3$ 关于变量 v 在 $\mathbb{R}$ 上积分, 我们得

$$n_t + (nw)_x = 0, \tag{2.2.8}$$

其中 n 和 w 由 (1.3.9) 给出. 对方程 (2.2.8) 作用算子 I 并利用 (2.2.7), 我们有

$$(I(n))_t + nw - \int_0^1 nwdy = 0.$$

将上述方程与 $(1.3.1)_1$、(1.3.9) 及 (2.2.7) 相结合, 我们得到

$$(\rho I(n))_t+(\rho uI(n))_x=\rho I(n)_t+\rho uI(n)_x=-\rho nw+\rho un+\rho\int_0^1 nwdy. \tag{2.2.9}$$

根据 (2.2.9), 我们可以将动量方程 $(1.3.1)_2$ 改写为

$$\big(\rho(u+I(n))\big)_t+\big(\rho u(u+I(n))\big)_x+(\rho^\gamma)_x=(\mu(\rho)u_x)_x+\rho\int_0^1 nwdy. \tag{2.2.10}$$

从 (2.2.7) 及 (2.2.10), 我们可得

$$\begin{aligned}&I(\rho u+I(n))_t+uI(\rho u+I(n))_x+\rho^\gamma\\&\quad=\mu(\rho)u_x+I(\rho)\int_0^1 nwdy+\int_0^1\big(\rho|u|^2+\rho uI(n)+\rho^\gamma-\mu(\rho)u_y\big)dy.\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

又由质量方程 $(1.3.1)_1$, 以下不等式成立:

$$\frac{d}{dt}\theta(\rho)+u\theta(\rho)_x=-\mu(\rho)u_x, \tag{2.2.12}$$

其中

$$\theta(\rho):=\int_1^\rho\frac{\mu(s)}{s}ds=\begin{cases}2\log\rho, & 若\ \beta=0,\\ \log\rho+\frac{\rho^\beta-1}{\beta}, & 若\ \beta>0.\end{cases} \tag{2.2.13}$$

将 (2.2.12) 代入 (2.2.11) 并将方程限制在着粒子轨道 $\overline{X}^{x,t}(s)$ 定义为

$$\frac{d}{ds}\overline{X}^{x,t}(s)=u(\overline{X}^{x,t}(s),x),\quad s\in[0,t],\quad \overline{X}^{x,t}(t)=x,\quad (x,t)\in\mathbb{T}\times[0,T], \tag{2.2.14}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\big(\theta(\rho)+I(\rho u+\rho I(n))\big)(\overline{X}^{x,t}(s),s)+\rho^\gamma(\overline{X}^{x,t}(s),s)\\&=H_1(\overline{X}^{x,t}(s),s)-\int_0^1\mu(\rho)u_y(y,s)dy,\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

其中

$$H_1(x,t):=I(\rho)\int_0^1 nwdy+\int_0^1\big(\rho|u|^2+\rho uI(n)+\rho^\gamma\big)dy.$$

由 (1.3.9)、(2.2.1) 以及 (2.2.7) 可证, 对任意 $(x,t)\in\mathbb{T}\times[0,T]$, 存在与时间无关的常数 $C>0$ 使

得如下不等式成立:

$$
\begin{cases}
|I(\rho u+\rho I(n))(x,t)| \leq \|\rho(t)\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\rho}u(t)\|_{L^2}+\|\rho(t)\|_{L^1}\|n(t)\|_{L^1} \leq C, \\
|H_1(x,t)| \leq \|\rho(t)\|_{L^1}\|F(t)\|_{L^1_{x,v}}^{\frac{1}{2}}\||v|^2F(t)\|_{L^1_{x,v}}^{\frac{1}{2}}+\|\sqrt{\rho}u(t)\|_{L^2}^2 \\
\qquad\qquad +\|n(t)\|_{L^1}\|\rho(t)\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\rho}u(t)\|_{L^2}+\|\rho^\gamma(t)\|_{L^1} \leq C.
\end{cases} \tag{2.2.16}
$$

注意到对 $0 \leq \rho \leq 1$ 有 $\mu(\rho) \leq 2$, 而对 $\rho \geq 1$ 成立 $\mu(\rho) \leq \beta\theta(\rho)+2$. 由此, 我们得到

$$
\Big|\int_0^1 \mu(\rho)u_y dy\Big| \leq 1+\int_0^1 \mu(\rho)|u_y|^2 dy+\frac{\beta}{4}\sup_{x\in\Omega_0}\theta(\rho)(x,t)\int_0^1 \mu(\rho)|u_y|^2 dy. \tag{2.2.17}
$$

其中 $\Omega_0 := \{y \in (0,1) \mid \rho(y,t) \geq 1\}$.

然后, 利用 (2.2.16)-(2.2.17) 和引理 2.4.3 中的 Zlotnik 不等式, $\theta(\rho)$ 满足

$$
\sup_{x\in\Omega_0}\theta(\rho)(x,t) \leq \theta(C_*)+2C+E_0+\frac{\beta}{4}\int_0^T \sup_{x\in\Omega_0}\theta(\rho)(x,\tau)\int_0^1 \mu(\rho)|u_y|^2 dyd\tau. \tag{2.2.18}
$$

由 (2.2.1)、(2.2.18) 及 Grönwall 不等式, 我们证明

$$
\sup_{x\in\Omega_0}\theta(\rho)(x,t) \leq e^{\frac{\beta E_0}{4}}\big(\theta(C_*)+2C+E_0\big). \tag{2.2.19}
$$

因而, 我们得到 (2.2.5) 中 ρ 关于时间一致的上界估计.

此外, 将 (2.2.15) 在 $[0,t]$ 上积分并利用 (2.2.1)、(2.2.14)、(3.3.5) 及 ρ 的上界, 对任意 $(x,t) \in \mathbb{T}\times[0,T]$, 我们有

$$
\theta(\rho)(x,t) \geq \inf_{x\in\mathbb{T}}\theta(\rho_0)(x)-2C-(\rho_+^\gamma+C)T-(\mu(\rho_+)T)^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{\mu(\rho)}u_x\|_{L^2(0,T;L^2)}. \tag{2.2.20}
$$

由于

$$
\theta(\rho)=2\log\rho, \quad 若\ \beta=0, \qquad \theta(\rho) \leq \log\rho+\frac{\rho_+^\beta}{\beta}, \quad 若\ \beta>0,
$$

从而 (2.2.20) 蕴含了密度 ρ 与时间有关的下界估计. 引理 2.2.2 得证. □

引理 2.2.3. 对任意给定的时间 $T>0$, 若 (ρ,u,F) $(\rho>0, F\geq 0)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题

(1.3.1) 的一个强解, 则在定理 1.3.1 的假设下, 以下估计成立:

$$\begin{cases} \sup\limits_{t\in(0,T)} \|F(t)\|_{L^\infty_{x,v}} \leq e^{\rho_+ T}\|F_0\|_{L^\infty_{x,v}}, \\ \mathrm{Supp}_v F(x,\cdot,t) \subset \{v\in\mathbb{R} \mid |v| \leq r_T\}, \quad (x,t)\in\mathbb{T}\times(0,T), \\ \sup\limits_{t\in(0,T)} \big(\|n(t)\|_{L^\infty} + \|\rho_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_x(t)\|_{L^2}\big) + \|(u_t,u_{xx})\|_{L^2(0,T;L^2)} \leq C_T, \end{cases} \tag{2.2.21}$$

其中常数 $\rho_+ > 0$ 由 (2.2.5) 给出, $r_T > 0$ 和 $C_T > 0$ 为两个依赖于时间 T 的常数.

证明. 首先, 对任意 $(x,v,t)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times(0,T)$, 双特征线 $(X^{x,v,t}(s),V^{x,v,t}(s))$ 由如下方程给出:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}X^{x,v,t}(s) = V^{x,v,t}(s), \quad s\in[0,t], \quad X^{x,v,t}(t) = x, \\ \dfrac{d}{ds}V^{x,v,t}(s) = \rho(X^{x,v,t}(s),s)\big(u(X^{x,v,t}(s),s) - V^{x,v,t}(s)\big), \quad s\in[0,t], \quad V^{x,v,t}(t) = v. \end{cases} \tag{2.2.22}$$

我们将 Vlasov 方程 $(1.3.1)_3$ 沿着双特征线 $(X^{x,v,t}(s),V^{x,v,t}(s))$ 改写如下:

$$\frac{d}{ds}F(X^{x,v,t}(s),V^{x,v,t}(s),s) - \rho(X^{x,v,t}(s),s)F(X^{x,v,t}(s),V^{x,v,t}(s),s) = 0.$$

因而, 分布函数 F 有如下表达式:

$$F(x,v,t) = e^{\int_0^t \rho(X^{x,v,t}(s),s)ds}F_0(X^{x,v,t}(0),V^{x,v,t}(0)). \tag{2.2.23}$$

由 (2.2.5) 及 (2.2.23), $(2.2.21)_1$ 成立.

其次, 将 $(2.2.22)_3$ 在 $[0,t]$ 上求解可得

$$v = e^{-\int_0^t \rho(X^{x,v,t}(\tau),\tau)d\tau}V^{x,v,t}(0) + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \rho(X^{x,v,t}(\bar\tau),\bar\tau)d\bar\tau}\rho u(X^{x,v,t}(\tau),\tau)d\tau. \tag{2.2.24}$$

对任意 $(x,t)\in\mathbb{T}\times[0,T]$ 及 $\Sigma(x,t) := \{v\in\mathbb{R} \mid F(x,v,t)\neq 0\}$, 根据 (2.2.23), 我们由 $(1.3.5)_2$、(2.2.1)、(2.2.5) 和 (2.2.23)-(2.2.24) 推出

$$\sup_{v\in\Sigma(x,t)} |v| \leq r_0 + \rho_+\int_0^t |u(x,s)|ds \leq r_T := r_0 + \rho_+ E_0^{\frac{1}{2}}\Big(T^{\frac{1}{2}} + \frac{2^{\frac{1}{2}}T}{\|\rho_0\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}}\Big), \tag{2.2.25}$$

此处用到以下事实:

$$u(x,t) \leq \|u_x(t)\|_{L^2} + \frac{\|(\sqrt{\rho}u)(t)\|_{L^2}}{\|\rho_0\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.2.26}$$

根据 (2.2.25), 我们有 $(2.2.21)_2$.

下一步, 为证明 $(2.2.21)_3$, 我们通过引入第二个有效速度

$$U := u + I(n) + \rho^{-2}\mu(\rho)\rho_x, \tag{2.2.27}$$

将方程 (2.2.10) 改写为

$$\rho(U_t + uU_x) + \gamma\rho^{\gamma+1}\mu(\rho)^{-1}U = \gamma\rho^{\gamma+1}\mu(\rho)^{-1}(u + I(n)) + \rho\int_0^1 nwdy. \tag{2.2.28}$$

将方程 (2.2.28) 乘以 $p|U|^{p-2}U$ ($p \in [2,\infty)$) 并在 $\mathbb{T}$ 上分部积分, 并利用 (2.2.1)-(2.2.5) 及 (2.2.7), 我们得到

$$\frac{d}{dt}\|(\rho^{\frac{1}{p}}U)(t)\|_{L^p}^p + p\gamma\int_{\mathbb{T}}\rho^{\gamma+1}\mu(\rho)^{-1}|U|^p dx \le pC\big(1 + \|u(t)\|_{L^\infty}\big)\|(\rho^{\frac{1}{p}}U)(t)\|_{L^p}^{p-1}. \tag{2.2.29}$$

将 (2.2.29) 除以 $\big(\|(\rho^{\frac{1}{p}}U)(t)\|_{L^p}^p + \eta^p\big)^{\frac{p-1}{p}}$ 后在 $[0,t]$ 上积分, 再结合 (2.2.1)、(2.2.5)、(2.2.7) 及 (2.2.26), 最后取极限 $\eta \to 0$, 我们有

$$\sup_{t\in(0,T)}\|(\rho^{\frac{1}{p}}U)(t)\|_{L^p} \le C(1+T), \tag{2.2.30}$$

其中常数 $C > 0$ 与 $T > 0$ 和 $p \in [2,\infty)$ 无关.

由 (2.2.5) 及 (2.2.30), 我们推出

$$\sup_{t\in(0,T)}\|U(t)\|_{L^p} \le C_T^{\frac{1}{p}}\sup_{t\in(0,T)}\|(\rho^{\frac{1}{p}}U)(t)\|_{L^p} \le C(C_T+1)^{\frac{1}{2}}(1+T). \tag{2.2.31}$$

因为 (2.2.31) 右端的估计与 $p \in [2,\infty)$ 无关, 我们通过 (2.2.31) 中取极限 $p \to \infty$ 得到

$$\sup_{t\in(0,T)}\|U(t)\|_{L^\infty} \le C(C_T+1)^{\frac{1}{2}}(1+T). \tag{2.2.32}$$

我们在 (2.2.31) 中选取 $p = 2$ 并利用 (2.2.1)、(2.2.5) 及 (2.2.27) 得到

$$\sup_{t\in(0,T)}\|\rho_x(t)\|_{L^2} \le \rho_+^2\sup_{t\in(0,T)}\big(\|U(t)\|_{L^2} + \|u(t)\|_{L^2} + \|n(t)\|_{L^1}\big) \le C_T. \tag{2.2.33}$$

下一步, 将方程 $(1.3.1)_2$ 除以 ρ, 我们得到

$$u_t - \mu(\rho)\rho^{-1}u_{xx} = H_2 := nw - nu - \gamma\rho^{\gamma-2}\rho_x - uu_x + \beta\rho^{\beta-2}\rho_x u_x. \tag{2.2.34}$$

由 (1.3.9) 及 $(2.2.21)_1$-$(2.2.21)_2$ 可得

$$\sup_{t\in(0,T)}\|n(t)\|_{L^\infty}\le 2r_T\sup_{t\in(0,T)}\|F(t)\|_{L^\infty_{x,v}}\le 2r_Te^{\rho_+T}\|F_0\|_{L^\infty_{x,v}}. \tag{2.2.35}$$

联立 (2.2.1)、(2.2.5)、(2.2.33) 及 (2.2.35) 并使用 Gagliardo-Nirenberg 不等式, (2.2.34) 的右端可如下估计:

$$\|H_2\|_{L^2(0,T;L^2)}\le C_T\big(1+\|u_x\|^{\frac12}_{L^2(0,T;L^2)}\|u_{xx}\|^{\frac12}_{L^2(0,T;L^2)}\big). \tag{2.2.36}$$

我们将 (2.2.34) 乘以 $-u_{xx}$ 并在 $\mathbb{T}\times[0,t]$ 上积分, 然后利用 (2.2.36) 及 Young 不等式得到

$$\begin{aligned}&\|u_x(t)\|^2_{L^2}+\|u_{xx}\|^2_{L^2(0,t;L^2)}\\&\quad\le C\big(\|u_{0x}\|^2_{L^2}+\|u_{xx}\|_{L^2(0,t;L^2)}\|H_2\|_{L^2(0,t;L^2)}\big)\le C_T+\frac12\|u_{xx}\|^2_{L^2(0,t;L^2)}.\end{aligned}$$

由上式可得

$$\sup_{t\in(0,T)}\|u_x(t)\|_{L^2}+\|u_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2)}\le C_T. \tag{2.2.37}$$

结合 (2.2.5) 及 (2.2.34)-(2.2.37), 我们有

$$\|u_t\|_{L^2(0,T;L^2)}=\|\mu(\rho)\rho^{-1}u_{xx}+G\|_{L^2(0,T;L^2)}\le C_T. \tag{2.2.38}$$

又由 (2.2.1)、(2.2.7)、(2.2.27)、(2.2.32)、(2.2.37) 及 Sobolev 嵌入 $H^1(\mathbb{T})\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T})$, 我们得到

$$\sup_{t\in(0,T)}\|\rho_x(t)\|_{L^\infty}\le\rho_+^2\sup_{t\in(0,T)}\big(\|U(t)\|_{L^\infty}+\|u(t)\|_{L^\infty}+\|n(t)\|_{L^1}\big)\le C_T. \tag{2.2.39}$$

将 (2.2.35) 与 (2.2.37)-(2.2.39) 联立得到 $(2.2.21)_3$. 引理 2.2.3 证毕. □

我们估计 (ρ,u,F) 的高阶导数.

引理 2.2.4. 对任意给定的时间 $T>0$, 若 (ρ,u,F) $(\rho>0,F\ge0)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (1.3.1) 的一个强解, 则在定理 1.3.1 的假设下, 以下估计成立:

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T)}\big(\|(\rho_{xx},u_{xx})(t)\|_{L^2}+\|\rho_t(t)\|_{H^1}+t^{\frac12}\|(u_{xxx},u_{tx})(t)\|_{L^2}\big)\\&\quad+\sup_{t\in(0,T)}\big(\|F(t)\|_{C^1_{x,v}}+\|F_t(t)\|_{C^0_{x,v}}\big)+\|(u_{xxx},u_{xt})\|_{L^2(0,T;L^2)}\le C_T,\end{aligned} \tag{2.2.40}$$

其中 $C_T>0$ 为一个与时间 T 有关的常数.

证明. 将 $(1.3.1)_3$ 关于变量 x 和 v 分别微分, 我们得到

$$\begin{cases}(F_v)_t+v(F_v)_x+\rho(u-v)(F_v)_v-2\rho F_v=-F_x,\\(F_x)_t+v(F_x)_x+\rho(u-v)(F_x)_v-\rho F_x=\rho_x vF_v-(\rho u)_xF_v+\rho_xF.\end{cases}\tag{2.2.41}$$

从而, 对任意 $(x,v,t)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times(0,T)$, F_x 和 F_v 可沿双特征线 $(X^{x,v,t}(s),V^{x,v,t}(s))$ (由 (2.2.22) 给出) 表示为

$$\begin{cases}F_v(x,v,t)=e^{2\int_0^t\rho(X^{x,v,t}(s),s)ds}F_{0v}(X^{x,v,t}(0),V^{x,v,t}(0))\\\qquad\qquad-\displaystyle\int_0^t e^{2\int_s^t\rho(X^{x,v,t}(\tau),\tau)d\tau}F_x(X^{x,v,t}(s),V^{x,v,t}(s),s)ds,\\F_x(x,v,t)=e^{\int_0^t\rho(X^{x,v,t}(s),s)ds}F_{0x}(X^{x,v,t}(0),V^{x,v,t}(0))\\\qquad\qquad+\displaystyle\int_0^t e^{\int_s^t\rho(X^{x,v,t}(\tau),\tau)d\tau}\big(\rho_xvF_v-(\rho u)_xF_v+\rho_xF\big)(X^{x,v,t}(s),V^{x,v,t}(s),s)ds.\end{cases}\tag{2.2.42}$$

利用该表示及估计 (2.2.5) 和 (2.2.21), 我们得到

$$\sup_{t\in(0,T)}\|F_v(t)\|_{L^\infty_{x,v}}\le e^{2\rho_+T}\big(\|F_{0v}\|_{L^\infty_{x,v}}+\int_0^T\|F_x(t)\|_{L^\infty_{x,v}}dt\big),\tag{2.2.43}$$

及

$$\sup_{t\in(0,T)}\|F_x(t)\|_{L^\infty_{x,v}}\le e^{\rho_+T}\big(\|F_{0x}\|_{L^\infty_{x,v}}+C_T+C_T\int_0^T\big(1+\|u(t)\|_{H^2}\big)\|F_v(t)\|_{L^\infty_{x,v}}dt\big),\tag{2.2.44}$$

将 (2.2.44) 代入 (2.2.43) 并且应用 Grönwall 不等式, 可证

$$\sup_{t\in(0,T)}\|(F_x,F_v)(t)\|_{L^\infty_{x,v}}\le C_T.\tag{2.2.45}$$

又由 $(1.3.1)_3$、(2.2.5)、(2.2.21) 及 (2.2.45), F_t 有如下估计:

$$\sup_{t\in(0,T)}\|F_t(t)\|_{L^\infty_{x,v}}=\sup_{t\in(0,T)}\|\big(vF_x+\rho(u-v)F_v-\rho F\big)(t)\|_{L^\infty_{x,v}}\le C_T.\tag{2.2.46}$$

结合 (2.2.21) 与 (2.2.45)-(2.2.46), 我们有

$$\begin{cases}\displaystyle\sup_{t\in(0,T)}\|(n_x,n_t)(t)\|_{L^\infty}\le 2r_T\sup_{t\in(0,T)}\|(F_x,F_t)(t)\|_{L^\infty_{x,v}}\le C_T,\\\displaystyle\sup_{t\in(0,T)}\|\big((nw)_x,(nw)_t\big)(t)\|_{L^\infty}\le 2r_T^2\sup_{t\in(0,T)}\|(F_x,F_t)(t)\|_{L^\infty_{x,v}}\le C_T.\end{cases}\tag{2.2.47}$$

我们进一步估计 ρ 的高阶导数. 将 (2.2.28) 除以 ρ 然后关于变量 x 求导得到

$$(U_x)_t+\gamma\rho^\gamma\mu(\rho)^{-1}U_x=-(uU_x)_x-\gamma(\rho^\gamma\mu(\rho)^{-1})_x\rho^{-2}\mu(\rho)\rho_x+\gamma\rho^\gamma\mu(\rho)^{-1}(u_x+n). \tag{2.2.48}$$

将 (2.2.48) 乘以 U_x 并在 $\mathbb{T}$ 上积分, 然后利用 (2.2.5) 及 (2.2.21), 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_x(t)\|_{L^2}^2+\gamma\int_{\mathbb{T}}\rho^\gamma\mu(\rho)^{-1}|U_x|^2dx\\&\quad\le C_T\left(\|u_x(t)\|_{H^1}+1\right)\|U_x(t)\|_{L^2}^2+C_T\|u_x(t)\|_{H^1}^2+C_T.\end{aligned}$$

由上式我们可得

$$\sup_{t\in(0,T)}\|U_x(t)\|_{L^2}^2\le C_Te^{C_T\|u_x\|_{L^1(0,T;H^1)}}\left(\|U_{0x}\|_{L^2}^2+\|u_x\|_{L^2(0,T;H^1)}^2+1\right). \tag{2.2.49}$$

因而, 根据 (2.2.5)、(2.2.21)、(2.2.27) 及 (2.2.49), ρ_{xx} 满足

$$\sup_{t\in(0,T)}\|\rho_{xx}(t)\|_{L^2}\le\rho_+^2\sup_{t\in(0,T)}\left(\|U_x(t)\|_{L^2}+\|u_x(t)\|_{L^2}+\|n(t)\|_{L^2}\right)\le C_T. \tag{2.2.50}$$

为建立 u 的 $H^2(\mathbb{T})$ 估计, 我们将方程 (2.2.34) 关于变量 x 微分得到

$$u_{xt}-\mu(\rho)\rho^{-1}u_{xxx}=H_{2x}+(\mu(\rho)\rho^{-1})_xu_{xx}. \tag{2.2.51}$$

将 (2.2.51) 乘以 $-u_{xxx}$, 在 $\mathbb{T}\times[0,t]$ 上分部积分并利用 (2.2.1)、(2.2.5)、(2.2.21)、(2.2.47) 和 (2.2.50), 我们易得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T)}\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2+\|u_{xxx}\|_{L^2(0,T;L^2)}^2\\&\quad\le C\left(\|u_{0x}\|_{H^1}^2+\|H_{2x}+(\mu(\rho)\rho^{-1})_xu_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2)}^2\right)\le C_T.\end{aligned} \tag{2.2.52}$$

根据 $(1.3.1)_1$、(2.2.34) 及 (2.2.50)-(2.2.52), 我们有

$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in(0,T)}\|\rho_t(t)\|_{H^1}=\sup\limits_{t\in(0,T)}\|(\rho u)_x(t)\|_{H^1}\le C_T,\\ \|u_{xt}\|_{L^2(0,T;L^2)}=\|\rho^{-1}\mu(\rho)u_{xxx}+H_{2x}+(\mu(\rho)\rho^{-1})_xu_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2)}\le C_T.\end{cases} \tag{2.2.53}$$

为建立 u 的时间加权 $H^3(\mathbb{T})$ 估计, 我们将 (2.2.34) 关于时间 t 微分得到

$$u_{tt}-\mu(\rho)\rho^{-1}u_{txx}=H_{2t}+(\mu(\rho)\rho^{-1})_tu_{xx}. \tag{2.2.54}$$

将 (2.2.54) 与 $-tu_{txx}$, 在 $\mathbb{T}$ 上作内积并应用估计 (2.2.5)、(2.2.47)、(2.2.50) 及 (2.2.52)-(2.2.53),

我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(t\|u_{xt}(t)\|_{L^2}^2\big)+\frac{t}{\rho_+}\|u_{xxt}(t)\|_{L^2}^2\\&\quad\le\frac{t}{2\rho_+}\|u_{xxt}(t)\|_{L^2}^2+C_Tt\|u_{xt}(t)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|u_{xt}(t)\|_{L^2}^2+C_T.\end{aligned}\tag{2.2.55}$$

因而, 由 (2.2.53)、(2.2.55)、Grönwall 不等式及 $tu_{xt}|_{t=0}=0$, 以下时间加权估计成立:

$$\sup_{t\in(0,T)}t^{\frac{1}{2}}\|u_{xt}(t)\|_{L^2}\le C_T.\tag{2.2.56}$$

又由 (2.2.5)、(2.2.50)-(2.2.53) 及 (2.2.56), 我们得到 u 的时间加权 $H^3(\mathbb{T})$ 估计

$$\sup_{t\in(0,T)}t^{\frac{1}{2}}\|u_{xxx}(t)\|_{L^2}\le\rho_+\sup_{t\in(0,T)}t^{\frac{1}{2}}\|\big(u_{xt}-H_{2x}-(\mu(\rho)\rho^{-1})_xu_{xx}\big)(t)\|_{L^2}\le C_T.\tag{2.2.57}$$

因为 (2.2.50) 及 (2.2.52), (ρ,u) 满足 C^1 估计:

$$\sup_{t\in(0,T)}\|(\rho,u)(t)\|_{C^1}\le C_T,$$

进而, 类似于 (2.2.41)-(2.2.46) 的论证过程, 我们有

$$\sup_{t\in(0,T)}\big(\|F(t)\|_{C^1_{x,v}}+\|F_t(t)\|_{C^0_{x,v}}\big)\le C_T.\tag{2.2.58}$$

我们将 (2.2.45)-(2.2.46)、(2.2.50)、(2.2.52)-(2.2.53) 及 (2.2.56)-(2.2.58) 联立得 (2.2.40). 引理 2.2.4 证毕. □

受到文献 [203] 中关于单相可压缩流长时行为研究的启发, 我们证明压力函数 $P(\rho)$ 的 $L^1(\mathbb{T})$ 范数在时间足够大时是严格正的, 这是证明密度 ρ 关于时间一致下界的关键.

引理 2.2.5. *存在一个充分大的时间 $T_0>0$ 使得对给定的时间 $T>T_0$, 若 (ρ,u,F) $(\rho>0,F\ge0)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (1.3.1) 的一个强解, 则在定理 1.3.1 的假设下, 以下估计成立:*

$$\int_{\mathbb{T}}\rho^\gamma(x,t)dx\ge P_*>0,\quad T_0\le t<T,\tag{2.2.59}$$

其中 $P_*>0$ 为一个与时间无关的常数.

证明. 我们断言密度 ρ 满足如下长时行为:

$$\lim_{t\to+\infty}\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^2}=0,\quad\rho_c:=\int_{\mathbb{T}}\rho_0(x)dx.\tag{2.2.60}$$

若 (2.2.60) 成立, 则我们易证

$$\lim_{t\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{T}}\rho^\gamma dx-\rho_c^\gamma\Big|\le\gamma(\rho_++\rho_c)^{\gamma-1}\lim_{t\to\infty}\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^2}=0,$$

从而 (2.2.59) 得证.

下面, 为证明 (2.2.60), 我们利用引理 2.2.1-2.2.2 及可压缩 NS 方程 $(1.3.1)_1$-$(1.3.1)_2$ 的相对熵估计. 我们引入

$$\begin{cases}E_{NS}(t):=\int_{\mathbb{T}}\big(\frac{1}{2}\rho|u-m_1|^2+\Pi_\gamma(\rho|\rho_c)\big)dx-\eta\int_{\mathbb{T}}\rho(u-m_1)I(\rho-\rho_c)dx,\\ D_{NS}(t):=\int_{\mathbb{T}}\mu(\rho)|u_x|^2dx+\eta\int_{\mathbb{T}}(\rho^\gamma-\rho_c^\gamma)(\rho-\rho_c)dx\\ \qquad\qquad-\eta\int_{\mathbb{T}}\big(\rho_c\rho|u-m_1|^2+\mu(\rho)u_x(\rho-\rho_c)\big)dx\\ \qquad\qquad+\eta\int_{\mathbb{T}}I(\rho-\rho_c)\big(-\rho n(u-w)+\frac{\rho}{\rho_c}\int_{\mathbb{T}}\rho n(u-w)dy\big)dx,\end{cases}$$

此处

$$\begin{cases}m_1(t):=\frac{\int_{\mathbb{T}}\rho u dx}{\int_{\mathbb{T}}\rho_0 dx},\\ \Pi_\gamma(\rho|\rho_c):=\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}-\frac{\rho_c^\gamma}{\gamma-1}-\frac{\gamma\rho_c^{\gamma-1}}{\gamma-1}(\rho-\rho_c).\end{cases}\tag{2.2.61}$$

基于方程组 (1.3.1), 我们可证

$$\frac{d}{dt}E_{NS}(t)+D_{NS}(t)=-\int_{\mathbb{T}}\rho n(u-w)(u-m_1)dx,\tag{2.2.62}$$

且对一个充分小的常数 $\eta>0$,

$$\begin{cases}E_{NS}(t)\le C(\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}(u-m_1)(t)\|_{L^2}^2),\\ E_{NS}(t)\ge\frac{1}{C}(\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho}(u-m_1)(t)\|_{L^2}^2),\\ D_{NS}(t)\ge\frac{1}{2}\|u_x(t)\|_{L^2}^2+\frac{1}{C}E_{NS}(t)-C\|\sqrt{\rho F}(u-v)(t)\|_{L^2_{x,v}}^2,\end{cases}\tag{2.2.63}$$

其中 $C>1$ 表示一个与时间无关的常数.

此外, 我们有

$$\Big|\int_{\mathbb{T}}\rho n(u-w)(u-m_1)dx\Big|\le\frac{1}{2}\|u_x(t)\|_{L^2}^2+\frac{\rho_+\|F_0\|_{L^1_{x,v}}}{2}\|\sqrt{\rho F}(u-v)(t)\|_{L^2_{x,v}}^2,\tag{2.2.64}$$

此处我们用到 (2.2.1)、(2.2.5) 及事实

$$(u-m_1)(x,t)=\frac{\int_{\mathbb{T}}\rho(y,t)\int_y^x u_z(z,t)dzdy}{\int_{\mathbb{T}}\rho(y,t)dy}\leq\|u_x(t)\|_{L^2},\quad x\in\mathbb{T},\quad t>0. \tag{2.2.65}$$

根据 (2.2.62)-(2.2.64), 我们可得

$$\frac{d}{dt}E_{NS}(t)+\frac{1}{C}E_{NS}(t)\leq C\|\sqrt{\rho F}(u-v)(t)\|_{L^2_{x,v}}^2. \tag{2.2.66}$$

对 (2.2.66) 应用 Grönwall 不等式并利用 (2.2.1), 当 $t\to\infty$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}E_{NS}(t)\leq{}& e^{-\frac{1}{C}t}E_{NS}(0)+Ce^{-\frac{1}{2C}t}\int_0^{\frac{t}{2}}\|\sqrt{\rho F}(u-v)(s)\|_{L^2_{x,v}}^2ds\\&+C\int_{\frac{t}{2}}^t\|\sqrt{\rho F}(u-v)(s)\|_{L^2_{x,v}}^2ds\to0.\end{aligned} \tag{2.2.67}$$

将 (2.2.67) 与 $(2.2.63)_2$ 联立, 我们证得 (2.2.60). □

引理 2.2.6. *对任意给定的时间 $T>0$, 若 (ρ,u,F) $(\rho>0,F\geq0)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (1.3.1) 的一个强解, 则在定理 1.3.1 的假设下, 密度 ρ 满足*

$$\rho(x,t)\geq\rho_->0,\quad (x,t)\in\mathbb{T}\times(0,T), \tag{2.2.68}$$

其中 $\rho_->0$ 为一个与时间 T 有关的常数.

证明. 由 (2.2.5), 我们有

$$\rho(x,t)\geq\frac{1}{C_{T_0}}>0,\quad (x,t)\in\mathbb{T}\times(0,T_0), \tag{2.2.69}$$

其中时间 $T_0>0$ 由引理 2.2.5 给出.

下面, 我们证明密度 ρ 在 $t\in[T_0,T)$ 上有一致的正下界. 我们只考虑情形 $\beta=0$, 而情形 $\beta>0$ 同理易证. 对 $\beta=0$, 方程 $(1.3.1)_2$ 可改写为

$$(\rho(u-m_1))_t+(\rho u(u-m_1))_x+(\rho^\gamma)_x=2u_{xx}-\rho n(u-w)+\frac{\rho}{\|\rho_0\|_{L^1}}\int_{\mathbb{T}}\rho n(u-w)dy, \tag{2.2.70}$$

其中 $m_1(t)$ 由 $(2.2.61)_1$ 给出. 对 (2.2.70) 作用算子 I (由 (2.2.6) 定义) 并将得到的方程沿着粒子轨道 $\overline{X}^{x,t}(s)$ (对任意 $(x,t)\in\mathbb{T}\times[T_0,T)$ 及 $s\in[T_0,t]$, 由 (2.2.14) 定义), 根据 (2.2.7) 和 (2.2.12), 我们得到

$$\frac{d}{ds}\Big(\big(2\log\rho+I(\rho(u-m_1))\big)(\overline{X}^{x,t}(s),s)+\int_{T_0}^s R_2(\overline{X}^{x,t}(\tau),\tau)d\tau\Big)=-\rho^\gamma(\overline{X}^{x,t}(s),s), \tag{2.2.71}$$

其中 $R_2=R_2(x,t)$ 为

$$R_2:=-\int_0^1\big(\rho^\gamma+\rho u(u-m_1)-\mu(\rho)u_y\big)dy+I(\rho n(u-w))-\frac{I(\rho)}{\|\rho_0\|_{L^1}}\int_{\mathbb{T}}\rho n(u-w)dy.$$

利用 (2.2.1)、(2.2.5)、(2.2.7) 及 (2.2.61), 我们得到

$$\sup_{t\in[T_0,T)}\|I(\rho(u-m_1))(t)\|_{L^\infty}\le\sup_{t\in(0,T)}\|\rho(u-m_1)(t)\|_{L^1}\le 2(2\|\rho_0\|_{L^1}E_0)^{\frac12}. \tag{2.2.72}$$

同时, 由 (2.2.1)、(2.2.5)、(2.2.7)、(2.2.59) 及 (2.2.65), 对任意 $t\in[T_0,T)$ 及 $s\in[T_0,t]$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_s^t R_2(\overline{X}^{x,t}(\tau),\tau)d\tau\\&\quad\le-\int_s^t\int_{\mathbb{T}}\rho^\gamma dyd\tau+\int_s^t\int_{\mathbb{T}}(\rho|u||u-m_1|+\mu(\rho)|u_y|)dyd\tau\\&\qquad+2\int_s^t\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho|u-v|Fdvdyd\tau\le-\frac{P_*}{2}(t-s)+C,\end{aligned}\tag{2.2.73}$$

其中 $C>0$ 表示与时间 T 无关的常数. 将 (2.2.71) 乘以

$$-\frac12 e^{-\frac12\left(2\log\rho+I(\rho(u-m_1))\right)(\overline{X}^{x,t}(s),s)-\frac12\int_{T_0}^s R_2(\overline{X}^{x,t}(\tau),\tau)d\tau},$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\big(\rho^{-1}(\overline{X}^{x,t}(s),s)e^{-\frac12 I(\rho(u-m_1))(\overline{X}^{x,t}(s),s)-\frac12\int_{T_0}^s R_2(\overline{X}^{x,t}(\tau),\tau)d\tau}\big)\\&=\frac12\rho^{\gamma-1}(\overline{X}^{x,t}(s),s)e^{-\frac12 I(\rho(u-m_1))(\overline{X}^{x,t}(s),s)-\frac12\int_{T_0}^s R_2(\overline{X}^{x,t}(\tau),\tau)d\tau}.\end{aligned}$$

上式与 (2.2.14) 及 (2.2.72)-(2.2.73) 可推出如下估计:

$$\begin{aligned}\rho^{-1}(x,t)&=\rho^{-1}(\overline{X}^{x,t}(T_0),T_0)e^{\frac12 I(\rho(u-m_1))(x,t)-\frac12 I(\rho(u-m_1))(\overline{X}^{x,t}(T_0),T_0)+\frac12\int_{T_0}^t R_2(\overline{X}^{x,t}(\tau),\tau)d\tau}\\&\quad+\frac12\int_{T_0}^t\rho^{\gamma-1}(\overline{X}^{x,t}(s),s)e^{\frac12 I(\rho(u-m_1))(x,t)-\frac12 I(\rho(u-m_1))(\overline{X}^{x,t}(s),s)+\frac12\int_s^t R_2(\overline{X}^{x,t}(\tau),\tau)d\tau}ds\\&\le\frac{1}{C_{T_0}}e^{C-\frac{P_*}{4}(t-T_0)}+\frac12\rho_+^{\gamma-1}e^C\int_{T_0}^t e^{-\frac{P_*}{4}(t-s)}ds,\quad(x,t)\in\mathbb{T}\times[T_0,T].\end{aligned}$$

我们将上式与 (2.2.69) 相结合得到 (2.2.68). 引理 2.2.6 证毕. □

引理 2.2.7. 对任意给定的时间 $T>0$, 若 (ρ,u,F) $(\rho>0,F\ge0)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (1.3.1) 的一个强解, 则在定理 1.3.1 的假设下, 密度 ρ 满足

$$\sup_{t\in(0,T)}\|\rho_x(t)\|_{L^2}\le C, \tag{2.2.74}$$

其中 $C>0$ 为一个与时间 T 无关的常数.

证明. 将方程 (2.2.28) 乘以有效速度 U (由 (2.2.27 定义), 在 $\mathbb{T}$ 上分部积分并使用估计 (2.2.1)、(2.2.5) 及 (2.2.68), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}U(t)\|_{L^2}^2+\gamma\rho_-^\gamma\mu^{-1}(\rho_+)\|\sqrt{\rho}U(t)\|_{L^2}^2\\
&\quad\le\big(\gamma\|\rho(t)\|_{L^\infty}^\gamma\|(\sqrt{\rho}u)(t)\|_{L^2}+\gamma\|\rho(t)\|_{L^\infty}^\gamma\|\rho(t)\|_{L^1}^{\frac12}\|n(t)\|_{L^1}\\
&\qquad+\|\rho(t)\|_{L^1}^{\frac12}\|F(t)\|_{L^1_{x,v}}^{\frac12}\||v|^2F(t)\|_{L^1_{x,v}}^{\frac12}\big)\|\sqrt{\rho}U(t)\|_{L^2}\le C\|\sqrt{\rho}U(t)\|_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{2.2.75}
$$

对任意 $\eta>0$, 将 (2.2.75) 除以 $(\|\sqrt{\rho}U(t)\|_{L^2}^2+\eta^2)^{\frac12}$, 然后应用 Grönwall 不等式, 最后取极限 $\eta\to0$, 我们得到

$$
\sup_{t\in(0,T)}\|\sqrt{\rho}U(t)\|_{L^2}\le e^{-\gamma\rho_-^\gamma\mu^{-1}(\rho_+)t}\|(\sqrt{\rho}U)(0)\|_{L^2}+C\int_0^T e^{-\gamma\rho_-^\gamma\mu^{-1}(\rho_+)s}ds. \tag{2.2.76}
$$

从而, 将 (2.2.1)、(2.2.5)、(2.2.27) 及 (2.2.76) 结合, 我们有 (2.2.74). □

2.3 定理 1.3.1 的证明

2.3.1 整体存在性

对满足 (1.3.5) 和 (1.3.10) 的初值 (ρ_0,u_0,F_0), 利用线性化技术和不动点定理 (参见 [10, 153, 173]), 我们易证存在一个最大时间 $T_*>0$ 使得初值问题 (1.3.1) 在 $[0,T_*)$ 上存在唯一的强解.

若 $T_*<\infty$, 我们借助引理 2.2.1-2.2.4 中和局部存在时间无关的先验估计, 易将局部强解 (ρ,u,F) 继续延拓使得存在时间超过 T_*, 从而与 T_* 的最大性矛盾. 所以, 该解为初值问题 (1.3.1) 满足特性 (1.3.6) 及 (1.3.11) 的一个整体强解.

若初值 (ρ_0,u_0,F_0) 仅满足 (1.3.5), 对 $\delta\in(0,1)$, 我们正则化初值如下:

$$
(\rho_0^\delta(x),u_0^\delta(x),F_0^\delta(x,v))=(J_1^\delta*\rho_0(x),J_1^\delta*u_0(x),J_1^\delta*J_2^\delta*F_0(x,v)), \tag{2.3.1}
$$

其中 $J_1^\delta(x)$ 及 $J_2^\delta(v)$ 分别表示关于变量 x 和 v 的 Friedrichs 磨光核.

从而, 我们易证

$$
\begin{cases}
\inf\limits_{x\in\mathbb{T}}\rho_0^\delta(x)\ge\inf\limits_{x\in\mathbb{T}}\rho(x)>0, & \|\rho_0^\delta\|_{W^{1,\infty}}\le\|\rho_0\|_{W^{1,\infty}},\\
\|u_0^\delta\|_{H^1}\le\|u_0\|_{H^1},\ \ F_0^\delta\ge0, & \|F_0^\delta\|_{L^\infty_{x,v}}\le\|F_0\|_{L^\infty_{x,v}},\\
\mathrm{Supp}_vF_0^\delta(x,\cdot)\subset\{v\in\mathbb{R}\mid|v|\le r_0+1\}, & x\in\mathbb{T}.
\end{cases}
\tag{2.3.2}
$$

此外, 当 $\delta\to 0$ 时, 存在一个子序列 (为简单起见, 我们仍记为 $(\rho_0^\delta,u_0^\delta,F_0^\delta)$) 使得对 $p\in[1,\infty)$, $(\rho_0^\delta,u_0^\delta,F_0^\delta)$ 在如下意义下强收敛到原初值 (ρ_0,u_0,F_0):

$$\begin{cases}(\rho_0^\delta,u_0^\delta,F_0^\delta)\to(\rho_0,u_0,F_0) \ \text{于} \quad W^{1,p}(\mathbb{T})\times H^1(\mathbb{T})\times L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{R}),\\ (\rho_0^\delta,F_0^\delta)\overset{*}{\rightharpoonup}(\rho_0,F_0) \qquad\qquad \text{于} \quad W^{1,\infty}(\mathbb{T})\times L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}).\end{cases}\tag{2.3.3}$$

对任意给定的时间 $T>0$, 根据第一步, 初值问题 (1.3.1) 以 $(\rho_0^\delta,u_0^\delta,F_0^\delta)$ 为初值的逼近问题在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times[0,T]$ 上存在一个强解 $(\rho^\delta,u^\delta,F^\delta)$.

根据引理 2.2.1-2.2.3 中关于 $\delta\in(0,1)$ 一致的先验估计及 Aubin-Lions 紧性定理 (参见 [202]), 在一个极限 (ρ,u,F) 使得当 $\delta\to 0$ 时, 在取子序列的意义下 (仍记为 $(\rho^\delta,u^\delta,F^\delta)$), 以下收敛性成立:

$$\begin{cases}(\rho^\delta,F^\delta)\overset{*}{\rightharpoonup}(\rho,F) \ \ \text{于} \quad L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathbb{T}))\times L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})),\\ u^\delta\rightharpoonup u \qquad\qquad\quad \text{于} \quad L^2(0,T;H^2(\mathbb{T}))\cap H^1(0,T;L^2(\mathbb{T})),\\ (\rho^\delta,u^\delta)\to(\rho,u) \quad \text{于} \quad C([0,T];C^0(\mathbb{T}))\times C([0,T];C^0(\mathbb{T})).\end{cases}$$

因而, (ρ,u,F) 在分布意义下满足方程组 (1.3.1). 又由 Sobolev 嵌入定理, 我们有

$$u\in C([0,T];H^1(\mathbb{T})).\tag{2.3.4}$$

根据输运方程 $(1.3.1)_1$ 重整化解的性质 (参见 [75]), 我们易知

$$\rho\in C([0,T];H^1(\mathbb{T})),\quad F\in C([0,T];L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{R})).\tag{2.3.5}$$

从而, 由引理 2.2.1-2.2.3 及 (2.3.3)-(2.3.5), 弱解 (ρ,u,F) 满足特性 (2.2.1) 及 (2.2.5). 最后, 我们重复引理 2.2.5-2.2.7 中相同的证明, 可知 (ρ,u,F) 满足一致估计 (1.3.11).

2.3.2 唯一性

假设初值 (ρ_0,u_0,F_0) 满足 (1.3.5). 让 (ρ_1,u_1,F_1) 和 (ρ_2,u_2,F_2) 为两个以 (ρ_0,u_0,F_0) 为初值的初值问题 (1.3.1) 在 $\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times[0,T]$ 上满足 (1.3.6)-(1.3.11) 的弱解. 记

$$(\widetilde{\rho},\widetilde{u},\widetilde{F}):=(\rho_1-\rho_2,u_1-u_2,F_1-F_2).$$

对任意 $(x,v,t)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times[0,T]$, 我们定义双特征线 $(X_i(t),V_i(t))$ $(i=1,2)$ 如下:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}X_i(t)=V_i(t),\quad X_i(0)=x,\\ \dfrac{d}{dt}V_i(t)=\rho_i(X_i(t),t)\big(u_i(X_i(t),t)-V_i(t)\big),\quad V_i(0)=v.\end{cases}\tag{2.3.6}$$

记

$$(\widetilde{X}(t),\widetilde{V}(t)) := (X_1(t)-X_2(t),V_1(t)-V_2(t)).$$

受到文献 [103, 171] 启发, 为估计 $\widetilde{f}$, 我们引入如下泛函:

$$Q(t) := \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\mathbb{R}} F_0(x,v)\big(|\widetilde{X}(t)|^2+|\widetilde{V}(t)|^2\big)dvdx. \tag{2.3.7}$$

(2.3.7) 对应于定义 2.4.1 中的 2-wasserstein 度量 (参见 [171]). 我们将 f_i $(i=1,2)$ 沿双特征线 $(X_i(t),V_i(t))$ 表示为

$$F_i\big(X_i(t),V_i(t),t\big)=e^{\int_0^t \rho_i(X_i(s),s)ds}F_0(x,v),\quad (x,v,t)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times[0,T]. \tag{2.3.8}$$

对任意 $\varphi_*\in C^0(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$, 由 (2.3.6) 及 (2.3.8) 可得如下坐标变换 $(x,v)\mapsto(X_i(t),V_i(t))(i=1,2)$:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\varphi_*(X_i(t),V_i(t))F_0(x,v)dvdx\\&=\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\varphi_*(X_i(t),V_i(t))F_i(X_i(t),V_i(t),t)dX_i(t)dV_i(t)=\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\varphi_*(x,v)F_i(x,v,t)dvdx.\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

利用 (2.3.6), 我们可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}Q(t)+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho_1(X_1(t),t)F_0(x,v)|\widetilde{V}(t)|^2dvdx\\&=\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)\widetilde{X}(t)\widetilde{V}(t)dvdx+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)\widetilde{V}(t)(\rho_1u_1-\rho_2u_2)(X_1(t),t)dvdx\\&\quad+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)\widetilde{V}(t)\big((\rho_2u_2)(X_1(t),t)-(\rho_2u_2)(X_2(t),t)\big)dvdx\\&\quad+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)\widetilde{V}(t)\big(\rho_2(X_2(t),t)-\rho_2(X_1(t),t)\big)V_2(t)dvdx\\&\quad+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)\widetilde{V}(t)\widetilde{\rho}(X_1(t),t)V_2(t)dvdx.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

我们逐项估计 (2.3.10) 等式右侧的项. 首先, 我们易知

$$\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)\widetilde{X}(t)\widetilde{V}(t)dvdx\le Q(t).$$

由 (2.3.9), (2.3.10) 等式右侧第二项估计如下:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)\widetilde{V}(t)(\rho_1u_1-\rho_2u_2)(X_1(t),t)dvdx\\&\quad\le\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)|\widetilde{V}(t)|^2dvdx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\big(\rho_1^2|\widetilde{u}|^2+|\widetilde{\rho}|^2|u_2|^2\big)(X_1(t),t)F_0(x,v)dvdx\\&\quad\le Q(t)+C\big(\|\sqrt{\rho_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2+\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^2}^2\big).\end{aligned}$$

对 (2.3.10) 等式右侧第三项和第四项, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} F_0(x,v)\widetilde{V}(t)\big((\rho_2u_2)(X_1(t),t)-(\rho_2u_2)(X_2(t),t)\big)dvdx\\&\qquad+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} F_0(x,v)\widetilde{V}(t)\big(\rho_2(X_2(t),t)-\rho_2(X_1(t),t)\big)V_2(t)dvdx\\&\quad\le C\big(\|u_{2x}(t)\|_{L^\infty}+1\big)Q(t).\end{aligned}$$

此处我们用到 F_0 初始紧支集假设以及如下事实:

$$F_0(x,v)|V_i(t)|\le\big(e^{-\rho_- t}|v|+\rho_+\int_0^t e^{-\rho_- s}|u_i(x,t)|ds\big)F_0(x,v)\le CF_0(x,v), \tag{2.3.11}$$

由 (2.3.9) 及 (2.3.11), 以下等式成立:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} F_0(x,v)\widetilde{V}(t)\widetilde{\rho}(X_1(t),t)V_2(t)dvdx\\&\le\frac12\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} F_0(x,v)|\widetilde{V}(t)|^2|V_2(t)|dvdx+\frac12\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}|\widetilde{\rho}(X_1(t),t)|^2|V_2(t)|F_0(x,v)dvdx\\&\le CQ(t)+C\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

将上述估计代入 (2.3.10), 我们得到

$$\frac{d}{dt}Q(t)\le C_T\big(1+\|u_{2x}(t)\|_{L^\infty}\big)\big(Q(t)+\|\sqrt{\rho_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2+\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^2}^2\big). \tag{2.3.12}$$

下一步, 我们估计 $(\rho_1-\rho_2,u_1-u_2)$. 不失一般性, 我们仅证明情形 $\beta=0$. 根据方程, 我们易知

$$\widetilde{\rho}_t+(\rho_1)_x\widetilde{u}+\rho_1\widetilde{u}_x+(u_2\widetilde{\rho})_x=0, \tag{2.3.13}$$

$$\begin{aligned}&\rho_1\widetilde{u}_t+\rho_1u_1\widetilde{u}_x-2\widetilde{u}_{xx}+\rho_1\widetilde{u}\int_{\mathbb{R}}F_1dv\\&\quad=-(\rho_1^\gamma-\rho_2^\gamma)_x-\rho_1\widetilde{u}u_{2x}-\widetilde{\rho}(u_{2t}+u_2u_{2x})+\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\rho}(v-u_2)F_1dv+\int_{\mathbb{R}}\rho_2(v-u_2)\widetilde{F}dv.\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

将 (2.3.13) 与 $\widetilde{\rho}$ 作 $L^2(\mathbb{T})$ 内积并使用 (1.3.6)-(1.3.11), 我们有

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^2}^2\le C_T\big(1+\|u_{2x}(t)\|_{L^\infty}\big)\big(\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2\big)+\frac{1}{100}\|\widetilde{u}_x(t)\|_{L^2}^2. \tag{2.3.15}$$

此外, 将 (2.3.14) 与 $\widetilde{u}$ 作 $L^2(\mathbb{T})$ 内积并利用 (1.3.6)-(1.3.11), 我们可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2+4\|\widetilde{u}_x(t)\|_{L^2}^2+2\|\sqrt{\rho_1F_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2\\
&\le C\big(1+\|u_{2t}(t)\|_{L^2}^2\big)\big(\|\sqrt{\rho_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2+\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^2}^2\big)+\frac{1}{100}\|\widetilde{u}_x(t)\|_{L^2}^2\\
&\quad+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho_2\big(v-u_2\big)\widetilde{u}\widetilde{F}dvdx.
\end{aligned}\tag{2.3.16}$$

根据 (1.3.6)-(1.3.11)、(2.3.9) 及 (2.3.11), (2.3.16) 右端最后一项估计如下:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho_2\big(v-u_2\big)\widetilde{u}\widetilde{F}dvdx\\
&=C_T\big(1+\|u_{2x}(t)\|_{L^\infty}^2\big)\big(Q(t)+\|\sqrt{\rho_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2\big)+\frac{1}{100}\|\widetilde{u}_x(t)\|_{L^2}^2\\
&\quad+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho_2(X_2(t),t)\big(V_2(t)-u_2(X_2(t),t)\big)\big(\widetilde{u}(X_1(t),t)-\widetilde{u}(X_2(t),t)\big)F_0(x,v)dvdx.
\end{aligned}\tag{2.3.17}$$

利用 (1.3.6)-(1.3.11) 和 (2.3.11) 并结合极大函数 $M|g|$ 的特性 (3.5.6)-(3.5.9), 我们可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho_2(X_2(t),t)\big(V_2(t)-u_2(X_2(t),t)\big)\big(\widetilde{u}(X_1(t),t)-\widetilde{u}(X_2(t),t)\big)F_0(x,v)dvdx\\
&\le C\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}(M|\widetilde{u}_x|(X_1(t),t)+M|\widetilde{u}_x|(X_2(t),t))dz|\widetilde{X}(t)|F_0(x,v)dvdx\\
&\le C_TQ(t)+\frac{1}{100}\|\widetilde{u}_x(t)\|_{L^2}^2,
\end{aligned}\tag{2.3.18}$$

将 (2.3.12)-(2.3.18) 联立, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big(Q(t)+\|\sqrt{\rho_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2+\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^2}^2\big)+\|\widetilde{u}_x(t)\|_{L^2}^2\\
&\le C_T\big(1+\|u_{2x}(t)\|_{L^\infty}^2+\|u_{2t}(t)\|_{L^2}^2\big)\big(Q(t)+\|\sqrt{\rho_1}\widetilde{u}(t)\|_{L^2}^2+\|\widetilde{\rho}(t)\|_{L^2}^2\big).
\end{aligned}$$

对上式应用 Grönwall 不等式及 (1.3.6), 我们证明 $(\rho_1,u_1,F_1)=(\rho_2,u_2,F_2)$ 成立. 唯一性证毕.

2.3.3 渐近行为

我们利用相对熵估计证明初值问题 (1.3.1) 的整体解 (ρ,u,f) 以时间指数速率收敛到其平衡态 $(\rho_c,u_c,n\delta(v-u_c))$, 其中常数 ρ_c 及 u_c 由 (1.3.8) 确定. 对待定的常数 η_0, 我们引入如下相对熵及相应的耗散:

$$\begin{cases} E(t):=\int_{\mathbb{T}}\big(\frac{1}{2}\rho|u-m_1|^2+\Pi_\gamma(\rho|\rho_c)\big)dx+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\frac{1}{2}|v-m_2(t)|^2Fdvdx \\ \qquad +\frac{\rho_c\, n_c}{2(n_c+\rho_c)}|(m_2-m_1)(t)|^2-\eta_0\int_{\mathbb{T}}[\rho(u-m_1)I(\rho-\rho_c)](x,t)dx, \\ D(t):=\int_{\mathbb{T}}\mu(\rho)|u_x|^2dx+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho|u-v|^2Fdvdx+\eta_0\int_{\mathbb{T}}(\rho^\gamma-\rho_c^\gamma)(\rho-\rho_c)dx \\ \qquad -\eta_0\int_{\mathbb{T}}\big(\rho_c\rho|u-m_1|^2+\mu(\rho)u_x(\rho-\rho_c)\big)dx \\ \qquad +\eta_0\int_{\mathbb{T}}I(\rho-\rho_c)\big(-\rho n(u-w)+\frac{\rho}{\rho_c}\int_{\mathbb{T}}\rho n(u-w)dy\big)dx. \end{cases}$$

其中 $m_1(t)$ 及 $\Pi_\gamma(\rho|\rho_c)$ 由 (2.2.61) 给出,

$$m_2(t):=\frac{\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}vFdvdx}{\int_{\mathbb{T}}Fdvdx},\quad \rho_c:=\int_{\mathbb{T}}\rho_0dx,\quad n_c:=\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0dvdx.$$

通过对方程 (1.3.1) 的直接计算, 我们可证如下相对熵-耗散不等式:

$$\frac{d}{dt}E^{\eta_0}(t)+D^{\eta_0}(t)=0. \tag{2.3.19}$$

利用基本能量估计 (2.2.1) 及密度的一致上界 (2.2.5), 我们易得

$$\begin{cases} \frac{1}{C}\|\Pi_\gamma(\rho|\rho_c)(t)\|_{L^1}\le\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^2}^2\le C\|\Pi_\gamma(\rho|\rho_c)(t)\|_{L^1}, \\ (1-C\eta_0)E(t)\le E^{\eta_0}(t)\le(1+C\eta_0)E(t), \end{cases} \tag{2.3.20}$$

以及

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}}\rho(u-m_1)I(\rho-\rho_c)dx \\ &\ge\frac{1}{C}\|\Pi_\gamma(\rho|\rho_c)(t)\|_{L^1}-C(\|u_x(t)\|_{L^2}^2+\|\sqrt{\rho F}(u-v)(t)\|_{L^2_{x,v}}^2), \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

其中 $C>1$ 表示一个充分大且与时间无关的常数.

然后, 利用 ρ 有一致的下界 (2.2.68), 我们得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\rho|u-v|^2Fdvdx \\ &\ge\rho_-\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}|u-m_1|^2Fdvdx+\rho_-|(m_1-m_2)(t)|^2\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}Fdvdx+\rho_-\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}|v-m_2|^2Fdvdx \\ &\quad+2\rho_-(m_1-m_2)(t)\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}(u-m_1)Fdvdx+2\rho_-\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}(u-m_1)(m_2-v)Fdvdx, \end{aligned}$$

将上式与 (2.2.1) 及 (2.2.65) 联立, 我们有

$$\begin{aligned}&\|\sqrt{\rho F}(u-v)(t)\|_{L^2_{x,v}}^2\\&\quad\geq -3\rho_-n_c\|u_x(t)\|_{L^2}^2+\frac{\rho_-n_c}{2}|(m_1-m_2)(t)|^2+\frac{\rho_-}{2}\|(v-m_2)f(t)\|_{L^2_{x,v}}^2.\end{aligned}\tag{2.3.22}$$

结合 (2.2.63) 及 (2.3.21)-(2.3.22), 我们得到

$$\begin{aligned}D^{\eta_0}(t)\geq\frac{1}{C}\|\Pi_\gamma(\rho|\rho_c)(t)\|_{L^1}+\frac{1}{C}(1-C\eta_0)\big(&\|\sqrt{\rho}(u-m_1)(t)\|_{L^2}^2\\&+\|(v-m_2)f(t)\|_{L^2_{x,v}}^2+|(m_1-m_2)(t)|^2\big).\end{aligned}\tag{2.3.23}$$

我们选取 $\eta_0=\frac{1}{2C}$ 并利用 (2.3.20) 及 (2.3.23) 证得

$$D^{\eta_0}(t)\geq\frac{1}{C}E^{\eta_0}(t),\qquad \frac{d}{dt}E^{\eta_0}(t)+\frac{1}{C}E^{\eta_0}(t)\leq 0.$$

因而, 对上式应用 Grönwall 不等式以及估计 (2.2.68) 和 (2.3.20), 我们有

$$\begin{cases}\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^2}+\|(u-m_1)(t)\|_{L^2}\leq Ce^{-\frac{1}{C}t}\\ \|\sqrt{F}(v-m_2)(t)\|_{L^2_{x,v}}+|(m_1-m_2)(t)|\leq Ce^{-\frac{1}{C}t}.\end{cases}\tag{2.3.24}$$

利用质量守恒和 $(2.3.24)_2$, 我们得

$$\|n(w-u_c)(t)\|_{L^1}\leq\|F(v-u_c)(t)\|_{L^1_{x,v}}\leq\|F_0\|_{L^1_{x,v}}^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{F}(v-u_c)(t)\|_{L^2_{x,v}}\leq Ce^{-\frac{1}{C}t},$$

进一步, 我们利用 (2.2.74) 及 (2.3.24) 得到密度 ρ 的点态估计:

$$\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^\infty}\leq C\|(\rho-\rho_c)(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\rho_x(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\leq Ce^{-\frac{1}{C}t}.\tag{2.3.25}$$

注意到由质量和动量守恒可知

$$m_1(t)=\frac{1}{\rho_c}\Big(\int_{\mathbb{T}}\rho_0u_0dx+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}vF_0dvdx-n_cm_2(t)\Big),$$

从而我们有

$$|(m_1-m_2)(t)|=\frac{\rho_c+n_c}{\rho_c}|(m_2-u_c)(t)|,\quad u_c:=\frac{\int_{\mathbb{T}}\rho_0u_0(x)dx+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}vF_0(x,v)dvdx}{\int_{\mathbb{T}}\rho_0(x)dx+\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}F_0(x,v)dvdx}.\tag{2.3.26}$$

我们结合 (2.3.24) 及 (2.3.26) 得到

$$|(m_1-u_c)(t)|+|(m_2-u_c)(t)|\leq C|(m_1-m_2)(t)|\leq Ce^{-\frac{1}{C}t}.\tag{2.3.27}$$

对流体速度 u, 我们利用 (2.2.68) 及 (2.3.24) 可得

$$\|(u-u_c)(t)\|_{L^2} \le \rho_-^{-\frac{1}{2}}\|\sqrt{\rho}(u-m_1)(t)\|_{L^2} + |(m_1-u_c)(t)| \le Ce^{-\frac{1}{C}t}. \tag{2.3.28}$$

我们进一步证明 f 的长时行为. 根据质量守恒, 衰减估计 $(2.3.24)_1$ 以及 Monge-Kantorovich 对偶定理 (参见引理 2.4.2), 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_1(F, n\delta(v-u_c))(t) &= \sup_{\|(\psi_x,\psi_v)\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\le 1}\left\{\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} f(x,v,t)(\psi(x,v)-\psi(x,u_c))dvdx\right\}\\
&\le \sup_{\|(\psi_x,\psi_v)\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\le 1}\left\{\|\psi_v\|_{L^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}|v-u_c|f(x,v,t)dvdx\right\}\\
&\le \|F_0\|_{L^1_{x,v}}^{\frac{1}{2}}\|\sqrt{F}(v-u_c)(t)\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})} \le Ce^{-\frac{1}{C}t}.
\end{aligned}$$

此外, 对于由 (2.2.22) 定义的双特征线 $(X^{x,v,t}(s), V^{x,v,t}(s))$, 注意到

$$v-u_c = e^{-\int_0^t \rho(X^{x,v,t}(\tau),\tau)d\tau}(V^{x,v,t}(0)-u_c) + \int_0^t e^{-\int_\tau^t \rho(X^{x,v,t}(\bar\tau),\bar\tau)d\bar\tau}\rho(u-u_c)(X^{x,v,t}(\tau),\tau)d\tau. \tag{2.3.29}$$

根据 (2.3.27)-(2.3.28) 及 Gagliardo-Nirenberg 不等式, 我们可证

$$\begin{aligned}
&\|(u-u_c)(t)\|_{L^\infty}\\
&\quad\le \|(u-\int_{\mathbb{T}} udx)(t)\|_{L^\infty} + |(\int_{\mathbb{T}} udx - u_c)(t)|\\
&\quad\le C(\|(u-m_1)(t)\|_{L^2} + |(m_1-\int_{\mathbb{T}} udx)(t)|)^{\frac{1}{2}}\|u_x(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|(u-u_c)(t)\|_{L^2}\\
&\quad\le Ce^{-\frac{1}{C}t}\|u_x(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + Ce^{-\frac{1}{C}t}.
\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

因而, 根据 (2.2.1)、(2.2.23)、(2.3.28)、(2.3.29) 及 (2.3.30), 对任意 $(x,t)\in\mathbb{T}\times[0,\infty)$, 我们有

$$\sup_{v\in\Sigma(x,t)}|v-u_c| \le e^{-\rho_- t}(|u_c|+r_0) + C\int_0^t e^{-\rho_-(t-\tau)}\left(e^{-\frac{1}{C}\tau}\|u_x(\tau)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{C}\tau}\right)d\tau \le Ce^{-\frac{1}{C}t}, \tag{2.3.31}$$

此处 $\Sigma(x,t) := \{v\in\mathbb{R}|F(x,v,t)\neq 0\}$. 联立 (2.3.25)、(2.3.28) 及 (2.3.31), 我们得到 $(1.3.7)_3$. 定理 1.3.1 证毕.

2.4 附录

下面, 我们给出 Wasserstein 度量的定义.

定义 2.4.1. [211] 设 F_i $(i=1,2)$ 为两个在 $Y=\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上的 Borel 概率测度. 对 $p\in[1,\infty)$, F_1 和 F_2 间的 p-Wasserstein 度量定义为

$$\mathrm{W}_p(F_1,F_2)=:\left(\inf_{\Theta\in\Gamma(F_1,F_2)}\int_{Y\times Y}|z-z'|^p d\Theta(z,z')\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\Gamma(F_1,F_2)$ 表示在 $Y\times Y$ 上所有投影为 F_i $(i=1,2)$ 的测度集合.

为了估计定理 1.3.1 中分布函数 F 和 $n\delta(v-u_c)$ 间的 1-Wasserstein 度量, 我们需要如下 Monge-Kantorovich 对偶定理.

引理 2.4.2. [211] 设 F_i $(i=1,2)$ 为两个在 $Y=\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ 上的 Borel 概率测度. 则 F_1 和 F_2 间的 1-Wasserstein 度量 $\mathrm{W}_1(F_1,F_2)$ 可等价表示为

$$\mathrm{W}_1(F_1,F_2)=\sup\left\{\int_Y g(z)dF_1(z)-\int_Y g(z)dF_2(z)\;\Big|\;\forall g\in Lip(Y),\ \|\nabla g\|_{L^\infty(Y)}\le 1\right\}.$$

如下 Zlotnik 不等式在引理 2.2.2 中被用于证明密度 ρ 的一致上界.

引理 2.4.3. [242] 对时间 $T>0$, 假设 $f_0\ge 0$, $f(t),g_*(t)\in W^{1,1}(0,T)$, $g(f)\in C(\mathbb{R})$, 并且

$$\frac{d}{dt}f(t)=g(f)+\frac{d}{dt}g_*(t),\quad t\in(0,T),\quad f(0)=f_0.$$

如果 $g(\infty)=-\infty$, 且存在两个常数 $N_1,N_1\ge 0$ 使得如下估计成立:

$$g_*(t_2)-g_*(t_1)\le N_0+N_1(t_2-t_1),\quad 0<t_1<t_2<T,$$

则 $f(t)$ 有和时间无关的上界:

$$f(t)\le\max\{f_0,\bar{f}\}+N_0<\infty,\quad t\in(0,T),$$

其中 $\bar{f}$ 为满足 $g(f)\le -N_1$ $(f\ge\bar{f})$ 的常数.

第三章　高维 drift-flux 方程组的整体弱解

3.1　引言

在本章, 我们考虑高维 drift-flux 方程组的初值问题

$$
\begin{cases}
\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\
n_t + \operatorname{div}(nu) = 0, \\
((\rho+n)u)_t + \operatorname{div}((\rho+n)u\otimes u) + \nabla P(\rho,n) = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u, \quad x\in\mathbb{T}^d,\ t>0, \\
(\rho, n, (\rho+n)u)(x,0) = (\rho_0, n_0, m_0)(x), \quad x\in\mathbb{T}^d.
\end{cases} \tag{1.3.15}
$$

我们证明定理 1.3.8 和 1.3.10 关于带非单调二元压力函数的高维 drift-flux 方程组初值问题 (1.3.15) 弱解的整体存在性. 为了阅读方便, 我们重新叙述定理 1.3.8 和 1.3.10 如下:

定理 1.3.8. 对维数 $d\geq 2$, 假设初值 (ρ_0, n_0, m_0) 满足

$$
\begin{cases}
0\leq \underline{c}\rho_0(x)\leq n_0(x)\leq \overline{c}\rho_0(x), \quad x\in\mathbb{T}^d, \\
\dfrac{m_0(x)}{\sqrt{(\rho_0+n_0)(x)}} = 0, \quad 若\ (\rho_0+n_0)(x)=0, \quad x\in\mathbb{T}^d, \\
(\rho_0, n_0, \dfrac{m_0}{\sqrt{\rho_0+n_0}}) \in L^\gamma(\mathbb{T}^d)\times L^\alpha(\mathbb{T}^d)\times L^2(\mathbb{T}^d),
\end{cases} \tag{1.3.18}
$$

其中常数 $\underline{c}$ 和 $\overline{c}$ 满足 $0<\underline{c}\leq\overline{c}<\infty$. 若压力函数 $P(\rho,n)$ 由 (1.3.16) 给出, 且绝热常数 γ, α 满足

$$
\begin{cases}
\gamma\geq \dfrac{3d}{d+2}\ (d=2,3), \qquad \gamma>\dfrac{d}{2}\ (d\geq 4), \qquad \alpha\geq 1, \\
\widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}\leq \max\{\gamma,\alpha\}+\theta, \quad \theta_0 := \dfrac{2}{d}\max\{\gamma,\alpha\}-1>0,
\end{cases} \tag{1.3.19}
$$

则初值问题 (1.3.15) 存在一个满足定义 1.3.7 的整体弱解 $(\rho, n, (\rho+n)u)$.

定理 1.3.10. 对维数 $d\geq 2$, 假设初值 (ρ_0,n_0,m_0) 满足

$$\begin{cases}\rho_0(x)\geq 0,\quad n_0(x)\geq 0,\quad x\in\mathbb{T}^d,\\ \dfrac{m_0(x)}{\sqrt{(\rho_0+n_0)(x)}}=0,\quad 若\ (\rho_0+n_0)(x)=0,\quad x\in\mathbb{T}^d,\\ (\rho_0,n_0,\dfrac{m_0}{\sqrt{\rho_0+n_0}})\in L^\gamma(\mathbb{T}^d)\times L^\alpha(\mathbb{T}^d)\times L^2(\mathbb{T}^d).\end{cases}\tag{1.3.21}$$

若压力函数 $P(\rho,n)$ 由 (1.3.16) 给出, 且绝热常数 γ,α 满足

$$\begin{cases}\gamma,\alpha\geq\dfrac{3d}{d+2}\ (d=2,3),\quad \gamma,\alpha>\dfrac{d}{2}\ (d\geq 4),\\ \widetilde{\gamma}\leq\gamma+\theta_1,\qquad \theta_1:=\dfrac{2}{d}\gamma-\dfrac{\gamma}{\min\{\gamma,\alpha\}}>0,\\ \widetilde{\alpha}\leq\alpha+\theta_2,\qquad \theta_2:=\dfrac{2}{d}\alpha-\dfrac{\alpha}{\min\{\gamma,\alpha\}}>0,\end{cases}\tag{1.3.22}$$

则初值问题 (1.3.15) 存在一个满足定义 1.3.7 的整体弱解 $(\rho,n,(\rho+n)u)$.

我们回顾定理 1.3.8-1.3.10 证明的主要困难和想法. 下面我们简要说明定理 1.3.8-1.3.10 证明的主要困难和想法. 对参数 $\varepsilon,\delta\in(0,1)$, 我们将 $P(\rho,n)$ 正则化为单调压力函数 $P_\delta(\rho,n)$ 并在 $(1.3.15)_1$-$(1.1.8)_2$ 中考虑人工粘性项, 首先利用 Faedo-Galerkin 方法构造逼近解 $(\rho_\varepsilon,u_\varepsilon,(\rho_\varepsilon+n_\varepsilon)u_\varepsilon)$, 然后证明当 $\varepsilon\to 0$ 时 $(\rho_\varepsilon,u_\varepsilon,(\rho_\varepsilon+n_\varepsilon)u_\varepsilon)$ 收敛到带压力函数 $P_\delta(\rho,n)$ 初值问题 (1.3.15) 的弱解 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$.

为了证明当 $\delta\to 0$ 时 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$ 收敛到初值问题 (1.3.15) 的整体弱解 $(\rho,n,(\rho+n)u)$, 其关键是建立密度 (ρ_δ,n_δ) 强收敛到 (ρ,n) 的紧性估计. 然而, 由于二元非单调压力函数 $P(\rho_\delta,n_\delta)$ 不满足已有文献中为建立压力函数先验估计所需的条件 (参见 [29, 87, 164, 209] 等), 如何建立密度的紧性估计有本质的困难. 为了克服这个困难, 受到文献 [209] 的启发, 我们先证明

$$\begin{aligned}&(\rho_\delta,n_\delta)\to(\rho,n)\quad 于\ L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))\times L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))\\ \Longleftrightarrow\ &\rho_\delta+n_\delta\to\rho+n\quad 于\ L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)),\quad \delta\to 0.\end{aligned}$$

从而, 根据在 [13, 29] 引入的紧性标准, 我们需要对密度和 $\vartheta_\delta:=\rho_\delta+n_\delta$ 作如下估计 (等价于 ϑ_δ 的空间等度连续性):

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{\delta\to 0}\frac{1}{\|K_h\|_{L^1}}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^{2d}}K_h(x-y)|\vartheta_\delta^x-\vartheta_\delta^y|dxdydt=0,$$

其中 K_h 为由 (3.4.15) 给出的周期对称核. 利用质量方程 $(3.3.1)_1$-$(3.3.1)_2$ 的特性, 我们将上述估计转化为散度部分 $\mathrm{div}\,u_\delta^x-\mathrm{div}\,u_\delta^y$ 的先验估计, 而其又可分解为压力函数的先验估计和有效粘性通量的先验估计 (参见引理 3.4.8).

对关键的压力函数先验估计, 我们引入如下分解:

$$
\begin{aligned}
&P(\rho_\delta^x, n_\delta^x) - P(\rho_\delta^y, n_\delta^y) \\
&\quad = P(\rho_\delta^x, n_\delta^x) - P(A^x \vartheta_\delta^x, B^x \vartheta_\delta^x) \\
&\qquad + P(A^y \vartheta_\delta^y, B^y \vartheta_\delta^y) - P(\rho_\delta^y, n_\delta^y) \\
&\qquad + P(A^x \vartheta_\delta^y, B^x \vartheta_\delta^y) - P(A^y \vartheta_\delta^y, B^y \vartheta_\delta^y) \\
&\qquad + P(A^x \vartheta_\delta^x, B^x \vartheta_\delta^x) - P(A^x \vartheta_\delta^y, B^x \vartheta_\delta^y),
\end{aligned} \tag{1.3.23}
$$

其中

$$
(A,B) := \begin{cases} (\frac{\rho}{\rho+n}, \frac{n}{\rho+n}), & \text{若 } \rho + n > 0, \\ (0,0), & \text{若 } \rho + n = 0. \end{cases} \tag{1.3.24}
$$

我们证明存在集合 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{T}^{2d} \times (0,T)$, 其中 $|\mathbb{T}^{2d} \times (0,T)/\mathbb{Q}|$ 可以任意小, 使得分解 (1.3.23) 右端前三项当 $\delta \to 0$, $x \to y$ 时在 $\mathbb{Q}$ 上一致地趋于 0, 并且将 $P(A\vartheta_\delta, B\vartheta_\delta)$ 当做关于单变量 ϑ_δ 的非单调压力函数来估计 (参见引理 3.4.9). 分解 (1.3.23) 给出了建立二元一般压力函数估计的方法. 特别地, 当 $\rho_\delta = n_\delta$ 时, (1.3.23) 等同于以往关于一元非单调压力函数先验估计所对应的分解 (参见 [29]).

此外, 为了处理有效粘性通量的先验估计, 我们利用动量方程 $(3.3.1)_3$ 的特性以及 Riesz 算子的交换子估计 (参见引理 3.4.10). 这是有效粘性通量的先验估计的一个新的证明, 并且适用于其他流体动力学中的相关方程组 (如可压缩 NS 方程组 (1.1.2)).

本章其余部分的安排如下: 在节 3.2, 我们利用 Faedo-Galerkin 方法得到了带人工粘性和人工压力的逼近初值问题的整体弱解并建立了逼近解的一致估计. 在节 3.3, 我们将人工粘性消失并利用 [88, 165, 209] 中的紧性方法证明带人工压力的逼近初值问题弱解的整体存在性. 在节 3.4 中, 我们先建立密度的最优可积性估计, 再将人工压力消失并推广 [29] 中的紧性估计以证明其极限为 drift-flux 方程组初值问题 (1.3.15) 的整体弱解. 在附录 3.5 中, 我们叙述应用文献 [29] 方法所需要的一些技术性引理.

3.2 逼近解的构造

对 $\eta,\delta\in(0,1)$, 我们考虑如下初值问题 (1.3.15) 的逼近问题:

$$\begin{cases}\rho_t+\operatorname{div}(\rho u)=\eta\Delta\rho,\\ n_t+\operatorname{div}(nu)=\eta\Delta n,\\ ((\rho+n)u)_t+\operatorname{div}((\rho+n)u\otimes u)+\nabla P_\delta(\rho,n)+\eta\nabla u\cdot\nabla(\rho+n)\\ \qquad\qquad=\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u,\\ (\rho,n,u)(x,0)=(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta},u_{0,\delta})(x),\end{cases}\tag{3.2.1}$$

其中人工压力函数 $P_\delta(\rho,n)$ 为

$$P_\delta(\rho,n):=\mathbf{I}_{\rho+n\geq\delta}P(\rho,n)+\delta(\rho+n)^{p_0},\quad p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1,\tag{3.2.2}$$

正则化初值 $(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta},u_{0,\delta})$ 为

$$(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta},u_{0,\delta}):=(\rho_0*j_\delta+\delta,n_0*j_\delta+\delta,\frac{\frac{m_0}{\sqrt{\rho_0+n_0}}*j_\delta}{\sqrt{\rho_0*j_\delta+n_0*j_\delta+2\delta}}).\tag{3.2.3}$$

此处 j_δ 为一个 $\mathbb{T}^d$ 上的光滑函数满足

$$\|j_\delta\|_{L^1}=1,\ \ 0\leq j_\delta\leq\delta^{-\frac{1}{2p_0}},\ \ \lim_{\delta\to0}\|j_\delta*f-f\|_{L^p}=0,\ \ f\in L^p(\mathbb{T}^d),\ \ p\in[1,\infty).\tag{3.2.4}$$

我们易证 $(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta},(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})u_{0,\delta})$ 当 $\delta\to0$ 时在 $L^\gamma(\mathbb{T}^d)\times L^\alpha(\mathbb{T}^d)\times L^{\frac{2\min\{\gamma,\alpha\}}{\min\{\gamma,\alpha\}+1}}(\mathbb{T}^d)$ 中强收敛于 (ρ_0,u_0,m_0), 且满足

$$\begin{cases}\|\rho_{0,\delta}\|_{L^\gamma}\leq\|\rho_0\|_{L^\gamma},\quad\|n_{0,\delta}\|_{L^\alpha}\leq\|n_0\|_{L^\alpha},\\ \|\sqrt{\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta}}u_{0,\delta}\|_{L^2}\leq\|\frac{m_0}{\sqrt{\rho_0+n_0}}\|_{L^2},\\ 0<\delta\leq\rho_{0,\delta}(x),n_{0,\delta}(x)\leq C\delta^{-\frac{1}{2p_0}},\quad x\in\mathbb{T}^d,\\ \frac{1}{c_{*,\delta}}\leq\frac{n_{0,\delta}(x)}{\rho_{0,\delta}(x)}\leq c_{*,\delta},\quad x\in\mathbb{T}^d,\quad c_{*,\delta}:=C\delta^{-\frac{1}{2p_0}-1}>1,\\ \underline{c}\rho_{0,\delta}(x)\leq n_{0,\delta}(x)\leq\bar{c}\rho_{0,\delta}(x),\ \text{若}\ \underline{c}\rho_0(x)\leq n_0(x)\leq\bar{c}\rho_0(x),\quad x\in\mathbb{T}^d.\end{cases}\tag{3.2.5}$$

不失一般性, 在证明中我们不妨设 $P(\rho,n)$ 满足

$$P(\rho,n)\in C^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+),\quad|\partial_{nn}P(\rho,n)|\leq C(1+\rho^{p_0-3}+n^{p_0-3}),\tag{3.2.6}$$

其中 $C>0$ 某个与 η 无关的常数. 上述性质用于推导对柯西问题 (3.2.1) 解的基本能量估计 (参见 (3.2.16)), 但不影响节 3.4 中取极限 $\delta\to 0$ 的过程. 事实上, 若 $P(\rho,n)$ 不满足 (3.2.6), 我们可以用一列满足 (3.2.6) 的压力函数序列来逼近 $P(\rho,n)$.

我们可以计算出一个常数 c_δ ($c_\delta\to\infty$, $\delta\to 0$) 使得对满足 $\rho+n\geq c_\delta>0$ 的二元变量 $(\rho,n)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, $\partial_\rho P_\delta(\rho,n)>0$ 及 $\partial_n P_\delta(\rho,n)>0$ 成立. 设

$$\begin{cases} P_{1,\delta}(\rho,n):=P_\delta(\rho,n)+C_*\mathbf{1}_{\rho+n\leq C_*c_\delta}\big((\rho+n)^{\widetilde{\gamma}+\widetilde{\alpha}}+\rho+n\big),\\ P_{2,\delta}(\rho,n):=C_*\mathbf{1}_{\rho+n\leq C_*c_\delta}\big((\rho+n)^{\widetilde{\gamma}+\widetilde{\alpha}}+\rho+n\big),\end{cases}\tag{3.2.7}$$

其中 $C_*>1$ 为一个充分大的常数. 从而压力函数 $P_\delta(\rho,n)$ 可改写为

$$P_\delta(\rho,n)=P_{1,\delta}(\rho,n)-P_{2,\delta}(\rho,n).\tag{3.2.8}$$

注意到 $P_{1,\delta}(\rho,n)\in C^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ 关于二元变量 $(\rho,n)\geq 0\times\mathbb{R}_+$ 单调递增, 且 $P_{2,\delta}(\rho,n)\in C^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ 满足 $P_{2,\delta}(\rho,n)\geq 0$, 且当 $\rho+n\geq 2C_*c_\delta$ 时 $P_{2,\delta}(\rho,n)=0$, 因而我们可以对初值问题 (3.2.1) 的弱解应用与 [88, 165] 类似的紧性方法证其当 $\varepsilon\to 0$ 时收敛到带人工压力函数逼近问题 (3.3.1) 的弱解.

记 $\psi_l\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ $(l=1,\ldots)$ 为 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的正交基. 定义有限维线性空间 $X_l\subset L^2$ 以及它的投影 $\mathbf{P}_l:L^2\to X_l$ 为

$$X_l:=\mathrm{span}\{\dot{\Delta}_j\psi\}_{j=1}^l,\quad \mathbf{P}_l f:=\sum_{i=1}^l\psi_i\int_{\mathbb{T}^d}\psi_i f\,dx,\quad \forall f\in X_l.$$

命题 3.2.1. *对任意 $p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$、$\delta,\eta\in(0,1)$ 及整数 $l\geq 1$, 在定理 1.3.8 或 1.3.10 的假设下, (3.2.1) 以 $(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta},\mathbf{P}_l u_{0,\delta})$ 为初值的初值问题 (3.2.1) 存在唯一的正则解 (ρ_l,n_l,u_l), 且对给定的时间 $T>0$ 满足*

$$\begin{cases} \|(\rho_l,n_l)\|_{L^\infty(0,T;L^{p_0})}+\eta^{\frac12}\|(\nabla\rho_l,\nabla n_l)\|_{L^2(0,T;L^2)}\leq C_\delta,\\ \|\sqrt{\rho_l+n_l}u_l\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|u_l\|_{L^2(0,T;H^1)}\leq C_\delta,\\ 0\leq \dfrac{1}{c_{*,\delta}}\rho_l(x,t)\leq n_l(x,t)\leq c_{*,\delta}\rho_l(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{T}^d\times(0,T),\\ \underline{c}\rho_l(x,t)\leq n_l(x,t)\leq\overline{c}\rho_l(x,t),\ \text{若 } \underline{c}\rho_0(x)\leq n_0(x)\leq\overline{c}\rho_0(x),\ (x,t)\in\mathbb{T}^d\times(0,T),\end{cases}\tag{3.2.9}$$

其中 $C_\delta>0$ 为一个与 η 及 l 无关的常数, 常数 $c_{*,\delta}>1$ 由 $(3.2.5)_2$ 给定.

进一步, 能量不等式成立:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d}[\frac{1}{2}(\rho_l+n_l)|u_l|^2+H_\delta(\rho_l,n_l)]dx+\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}[\mu|\nabla u_l|^2+(\mu+\lambda)(\operatorname{div}u_l)^2]dxd\tau\\
&\quad\le\int_{\mathbb{T}^d}[\frac{1}{2}(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})|u_{0,\delta}|^2+H_\delta(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta})]dx+C_\delta\eta,
\end{aligned}
\tag{3.2.10}
$$

其中

$$
H_\delta(\rho,n):=(\rho+n)\int_1^{\rho+n}P_\delta(\frac{\rho s}{\rho+n},\frac{ns}{\rho+n})s^{-2}ds=\rho\int_{\frac{\rho}{\rho+n}}^{\rho}P_\delta(s,\frac{n}{\rho}s)s^{-2}ds. \tag{3.2.11}
$$

证明. 由 Faedo-Galerkin 方法及不动点定理, 存在一个时间 $T_l\in(0,T]$ 使得以 $(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta},\mathbf{P}_lu_{0,\delta})$ 为初值的逼近问题 (3.2.1) 在 $[0,T_l]$ 上是局部适定的. 具体的证明细节参见 [87, 89, 189].

为了证明 $T_l=T$, 我们需要对 (3.2.9) 在 $(0,T_l)$ 上建立关于 l 一致的先验估计. 由于在有限维空间 X_l 中所有 Sobolev 范数是等价的, u_l 在 $\mathbb{T}^d\times(0,T_l)$ 上是正则的. 根据质量方程 $(3.2.1)_1$-$(3.2.1)_2$ 的比较原理, 密度满足

$$
0\le\frac{1}{c_{*,\delta}}\rho_l(x,t)\le n_l(x,t)\le c_{*,\delta}\rho_l(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{T}^d\times(0,T_l). \tag{3.2.12}
$$

考虑如下方程

$$
\partial_\rho(\frac{H_\delta(\rho,n)}{\rho})+\frac{n}{\rho}\partial_n(\frac{H_\delta(\rho,n)}{\rho})=\frac{P_\delta(\rho,n)}{\rho^2},\qquad H(\frac{\rho}{\rho+n},\frac{n}{\rho+n})=0, \tag{3.2.13}
$$

以求满足如下等式的 $H_\delta(\rho,n)$:

$$
\rho\partial_\rho H_\delta(\rho,n)+n\partial_nH_\delta(\rho,n)-H_\delta(\rho,n)=P_\delta(\rho,n). \tag{3.2.14}
$$

应用特征线法, 我们易证由 (3.2.11) 给出的 $H_\delta(\rho,n)$ 为问题 (3.2.13) 的一个解. 将方程 $(3.2.1)_1$、$(3.2.1)_2$ 和 $(3.2.1)_3$ 分别乘以 $\partial_{\rho_l}H_\delta(\rho_l,n_l)$、$\partial_{n_l}H_\delta(\rho_l,n_l)$ 以及 u_l, 然后利用 (3.2.14), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d}\big(\frac{1}{2}(\rho_l+n_l)|u_l|^2+H_\delta(\rho_l,n_l)\big)dx+\int_{\mathbb{T}^d}\big(\mu|\nabla u_l|^2+(\mu+\lambda)(\operatorname{div}u_l)^2\\
&\quad+\eta\delta p_0\rho_l^{p_0-2}|\nabla\rho_l|^2+\eta\delta p_0n_l^{p_0-2}|\nabla n_l|^2\big)dx\\
&=-\eta\int_{\mathbb{T}^d}\big(\partial^2_{\rho_l\rho_l}H_\delta|\nabla\rho_l|^2+2\partial^2_{\rho_ln_l}H_\delta\nabla\rho_l\cdot\nabla n_l+\partial^2_{n_ln_l}H_\delta|\nabla n_l|^2\big)dx,\quad t\in[0,T_l].
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

由 (3.2.6)、(3.2.2) 及 (3.2.11)-(3.2.12), $H_\delta(\rho_l,n_l)$ 满足以下特性:

$$
\begin{cases}
H_\delta(\rho_l,n_l)\ge\dfrac{\delta}{p_0-1}(\rho_l+n_l)^{p_0}-C_\delta,\\
|\partial^2_{\rho_l\rho_l}H_\delta|+|\partial^2_{\rho_ln_l}H_\delta|+|\partial^2_{n_ln_l}H_\delta|\le C_\delta(\rho_l+n_l)^{p_0-2}+C_\delta.
\end{cases}
\tag{3.2.16}
$$

又由 $(3.2.16)_2$ 及 Young 不等式, 等式 (3.2.15) 右端项可作如下估计:

$$\begin{aligned}&-\eta\int_{\mathbb{T}^d}\left(\partial^2_{\rho_l\rho_l}H_\delta|\nabla\rho_l|^2+2\partial^2_{\rho_l n_l}H_\delta\nabla\rho_l\cdot\nabla n_l+\partial^2_{n_l n_l}H_\delta|\nabla n_l|^2\right)dx\\&\le\frac{\eta\delta p_0}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\rho_l^{p_0-2}|\nabla\rho_l|^2+n_l^{p_0-2}|\nabla n_l|^2\right)dx+C_\delta\eta\int_{\mathbb{T}^d}(|\nabla\rho_l|^2+|\nabla n_l|^2)dx+C_\delta\eta.\end{aligned}\tag{3.2.17}$$

为了控制 (3.2.17) 右端的第二项, 利用 $(3.2.1)_1$-$(3.2.1)_2$, 我们可得

$$\begin{aligned}&C_\delta\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d}(|\rho_l|^2+|n_l|^2)dx+2C_\delta\eta\int_{\mathbb{R}^d}(|\nabla\rho_l|^2+|\nabla n_l|^2)dx\\&\le\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\mu|\nabla u_l|^2+(\mu+\lambda)(\operatorname{div}u_l)^2\right)dx+C_\delta\int_{\mathbb{T}^d}(|\rho_l|^2+|n_l|^2)dx.\end{aligned}\tag{3.2.18}$$

将 (3.2.15) 及 (3.2.17)-(3.2.18) 相加并使用 (3.2.5)、$(3.2.16)_1$ 及 Grönwall 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in(0,T_l)}\int_{\mathbb{T}^d}[(\rho_l+n_l)|u_l|^2+\rho_l^{p_0}+n_l^{p_0}]dx\\&\quad+\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}[|\nabla u_l|^2+\eta(1+\rho_l^{p_0-2}+n_l^{p_0-2})(|\nabla\rho_l|^2+|\nabla n_l|^2)]dxdt\le C_\delta.\end{aligned}\tag{3.2.19}$$

将 (3.2.12)、(3.2.19)、Sobolev 不等式以及 [89, 引理 3.2] 联立, 我们证明 (3.2.9) 及 (3.2.10). 命题 3.2.1 证毕. □

根据命题 3.2.1, 易证初值问题 (3.2.1) 弱解的整体存在性 (参见 [190,209]).

命题 3.2.2. 对任意 $p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$、$\delta,\eta\in(0,1)$ 及整数 $l\ge 1$, 在定理 1.3.8 或 1.3.10 的假设下, (3.2.1) 存在一个整体弱解 $(\rho_\eta,n_\eta,(\rho_\eta+n_\eta)u_\eta)$, 且对给定的时间 $T>0$ 满足

$$\begin{cases}\|(\rho_\eta,n_\eta)\|_{L^\infty(0,T;L^{p_0})}+\eta^{\frac{1}{2}}\|(\nabla\rho_\eta,\nabla n_\eta)\|_{L^2(0,T;L^2)}\le C_\delta,\\ \|\sqrt{\rho_\eta+n_\eta}u_\eta\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|u_\eta\|_{L^2(0,T;H^1)}\le C_\delta,\\ \|(\rho_\eta,n_\eta)\|_{L^{p_0+1}(0,T;L^{p_0+1})}\le C_\delta,\\ 0\le\dfrac{1}{c_{*,\delta}}\rho_\eta(x,t)\le n_\eta(x,t)\le c_{*,\delta}\rho_\eta(x,t),\ \ (x,t)\in\mathbb{T}^d\times(0,T),\\ \underline{c}\rho_\eta(x,t)\le n_\eta(x,t)\le\bar{c}\rho_\eta(x,t),\ \ \text{若 }\underline{c}\rho_0(x)\le n_0(x)\le\bar{c}\rho_0(x),\ (x,t)\in\mathbb{T}^d\times(0,T),\end{cases}\tag{3.2.20}$$

其中 $C_\delta>0$ 为一个与 η 无关的常数, 常数 $c_{*,\delta}>1$ 由 $(3.2.5)_2$ 给出.

进一步, 能量不等式成立:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^d}[\frac{1}{2}(\rho_\eta+n_\eta)|u_\eta|^2+H_\delta(\rho_\eta,n_\eta)]dx+\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}[\mu|\nabla u_\eta|^2+(\mu+\lambda)(\operatorname{div}u_\eta)^2]dxd\tau\\&\quad\le\int_{\mathbb{T}^d}[\frac{1}{2}(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})|u_{0,\delta}|^2+H_\delta(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta})]dx+C_\delta\eta,\end{aligned}\tag{3.2.21}$$

其中 $H_\delta(\rho,n)$ 由 (3.2.11) 定义.

3.3 人工粘性消失极限

在本节中, 我们考虑如下带人工压力的初值问题:

$$\begin{cases}\rho_t+\operatorname{div}(\rho u)=0,\\ n_t+\operatorname{div}(nu)=0,\\ \big((\rho+n)u\big)_t+\operatorname{div}\big((\rho+n)u\otimes u\big)+\nabla P_\delta(\rho,n)=\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u,\\ (\rho,n,u)(x,0)=(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta},u_{0,\delta})(x),\end{cases}\tag{3.3.1}$$

其中人工压力函数 $P_\delta(\rho,n)$ 及正则化初值 $(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta},u_{0,\delta})$ 分别由 (3.2.2) 及 (3.2.3) 给出.

首先, 根据 (3.2.20), 易证如下收敛性.

引理 3.3.1. 对任意 $T>0$、$p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$ 及 $\delta,\eta\in(0,1)$, 若 $(\rho_\eta,n_\eta,(\rho_\eta+n_\eta)u_\eta)$ 为初值问题 (3.3.1) 由命题 3.2.2 给出的整体弱解, 则存在一个极限 $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 使得当 $\eta\to0$ 时, 如下收敛性在抽子列意义下成立:

$$\begin{cases}(\rho_\eta,n_\eta)\rightharpoonup(\rho,u) & \text{于 } L^{p_0+1}(0,T;L^{p_0+1}(\mathbb{T}^d))\times L^{p_0+1}(0,T;L^{p_0+1}(\mathbb{T}^d)),\\ \eta(\nabla\rho_\eta,\nabla n_\eta)\to0 & \text{于 } L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^d)),\\ u_\eta\rightharpoonup u & \text{于 } L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}^d)),\\ (\rho_\eta,n_\eta)\to(\rho,n) & \text{于 } C([0,T];L^{p_0}_{weak}(\mathbb{T}^d))\times C([0,T];L^{p_0}_{weak}(\mathbb{T}^d)),\\ (\rho_\eta,n_\eta)\to(\rho,n) & \text{于 } C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d))\times C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d)),\\ (\rho_\eta+n_\eta)u_\eta\to(\rho+n)u & \text{于 } C([0,T];L^{\frac{2p_0}{p_0+1}}_{weak}(\mathbb{T}^d))\cap C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d)).\end{cases}\tag{3.3.2}$$

为了证明密度强收敛, 我们需要如下引理.

引理 3.3.2. 对任意 $T>0$、$p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$ 及 $\delta,\eta\in(0,1)$, 若 $(\rho_\eta,n_\eta,(\rho_\eta+n_\eta)u_\eta)$ 为初值问题 (3.3.1) 由命题 3.2.2 给出的整体弱解, 且 $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 为由引理 3.3.1 给出的极限, 则如下收敛性成立:

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{\eta\to0}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}(\rho_\eta+n_\eta)|A_\eta-A|^p\,dxdt=0, & p\in[1,\infty),\\ \displaystyle\lim_{\eta\to0}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}(\rho_\eta+n_\eta)|B_\eta-B|^p\,dxdt=0, & p\in[1,\infty),\end{cases}\tag{3.3.3}$$

其中 (A,B) 由 (1.3.24) 定义, (A_η,B_η) 为

$$(A_\eta,B_\eta):=\begin{cases}\left(\frac{\rho_\eta}{\rho_\eta+n_\eta},\frac{n_\eta}{\rho_\eta+n_\eta}\right), & \text{若 } \rho_\eta+n_\eta>0,\\ (0,0), & \text{若 } \rho_\eta+n_\eta=0.\end{cases}$$

进一步, 当 $\eta \to 0$ 时, 以下收敛等价性成立:

$$\begin{aligned}&(\rho_\eta, n_\eta) \to (\rho, n) \quad \text{于 } L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)) \times L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))\\ \Longleftrightarrow\ &\rho_\eta + n_\eta \to \rho + n \quad \text{于 } L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)).\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

证明. (3.3.3) 的类似证明可见 [209]. 对 $\sigma > 0$, 引入 $F_\sigma(\rho, n) := \frac{\rho^2}{\rho+n+\sigma}$. 我们易证

$$\begin{cases} |\rho\partial_\rho F_\sigma + n\partial_n F_\sigma - F_\sigma| = \dfrac{\sigma\rho^2}{(\rho+n+\sigma)^2} \leq \sigma, \\ \partial^2_{\rho\rho} F_\sigma |\nabla\rho|^2 + 2\partial^2_{\rho n} F_\sigma \nabla\rho \cdot \nabla n + \partial^2_{nn} F_\sigma |\nabla n|^2 \geq 0, \\ |\partial_\rho F_\sigma| + |\partial_n F_\sigma| \leq 4. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

设 $J_\sigma \in C_c^\infty(\mathbb{T}^d)$ 为 Friedrichs 磨光核. 对质量方程 $(3.2.1)_1$-$(3.2.1)_2$ 应用 $J_\sigma *$ 得到

$$\begin{cases} (J_\sigma * \rho_\eta)_t + \operatorname{div}\big((J_\sigma * \rho_\eta) u_\eta\big) = \eta\Delta(J_\sigma * \rho_\eta) + r_{1,\sigma}, \\ r_{1,\sigma} := \operatorname{div}\big((J_\sigma * \rho_\eta) u_\eta\big) - J_\sigma * \operatorname{div}(\rho_\eta u_\eta), \\ (J_\sigma * n_\eta)_t + \operatorname{div}\big((J_\sigma * n_\eta) u_\eta\big) = \eta\Delta(J_\sigma * n_\eta) + r_{2,\sigma}, \\ r_{2,\sigma} := \operatorname{div}\big((J_\sigma * n_\eta) u_\eta\big) - J_\sigma * \operatorname{div}(n_\eta u_\eta). \end{cases} \tag{3.3.6}$$

根据 Friedrichs 磨光核的交换子估计 (参见 [75, 164]), 余项 $r_{1,\sigma}$ $(i = 1, 2)$ 当 $\sigma \to 0$ 时在 $L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))$ 强收敛于 0. 对 $(3.3.6)_1$ 及 $(3.3.6)_3$ 分别乘以 $\partial_{J_\sigma * \rho_\eta} F_\sigma(J_\sigma * \rho_\eta, J_\sigma * n_\eta)$ 及 $\partial_{J_\sigma * n_\eta} F_\sigma(J_\sigma * \rho_\eta, J_\sigma * n_\eta)$, 将得到的两个方程相加后再利用 (3.3.5), 我们得

$$\begin{aligned}&(F_\sigma(J_\sigma * \rho_\eta, J_\sigma * n_\eta))_t + \operatorname{div}\big(F_\sigma(J_\sigma * \rho_\eta, J_\sigma * n_\eta) u_\eta\big)\\ &\quad \leq \sigma|\operatorname{div} u_\eta| + \eta\Delta F_\sigma(J_\sigma * \rho_\eta, J_\sigma * n_\eta) + 4(|r_{1,\sigma}| + |r_{2,\sigma}|).\end{aligned}$$

由此, 我们推出

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} F_\sigma(J_\sigma * \rho_\eta, J_\sigma * n_\eta)\,dxdt \leq T \int_{\mathbb{T}^d} & F_\sigma(J_\sigma * \rho_{0,\delta}, J_\sigma * n_{0,\delta})\,dx\\ &+ \sigma T^{\frac{3}{2}} \|\operatorname{div} u_\eta\|_{L^2(0,T;L^2)} + 4T\|(r_{1,\sigma}, r_{2,\sigma})\|_{L^1(0,T;L^1)}.\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

根据控制收敛定理, 我们在 (3.3.7) 中取极限 $\sigma \to 0$ 后得到

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\rho_\eta^2}{\rho_\eta + n_\eta}\,dxdt \leq T \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\rho_{0,\delta}^2}{\rho_{0,\delta} + n_{0,\delta}}\,dx. \tag{3.3.8}$$

类似地, 我们有

$$\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\frac{\rho^2}{\rho+n}dxdt=T\int_{\mathbb{T}^d}\frac{\rho_{0,\delta}^2}{\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta}}dx. \tag{3.3.9}$$

应用 (3.3.2)、(3.3.8)-(3.3.9) 及事实

$$\rho=(\rho+n)A,\ \ \frac{\rho^2}{\rho+n}=\rho A=(\rho+n)A^2,\ \ n=(\rho+n)B,\ \ \frac{n^2}{\rho+n}=nB=(\rho+n)B^2, \tag{3.3.10}$$

我们得到

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}(\rho_\eta+n_\eta)|A_\eta-A|^2dxdt\le\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\Big(\frac{\rho^2}{\rho+n}-2\rho A+(\rho+n)A^2\Big)dxdt=0.$$

根据上式、Hölder 不等式及事实

$$0\le A,B\le 1, \tag{3.3.11}$$

$(3.3.3)_1$ 成立. 相似地, 我们易证 $(3.3.3)_2$.

我们证明 (3.3.4). 其左端显然可以推出右端. 假设当 $\eta\to 0$ 时, $\rho_\eta+n_\eta$ 在 $L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))$ 中强收敛到 $\rho+n$, 则根据 $(3.3.3)_1$ 及 (3.3.10)-(3.3.11), 我们有如下收敛:

$$\begin{aligned}&\lim_{\eta\to 0}\|\rho_\eta-\rho\|_{L^1(0,T;L^1)}\\&\quad\le\lim_{\eta\to 0}\big(\|\rho_\eta-(\rho_\eta+n_\eta)A\|_{L^1(0,T;L^1)}+\|A_{\rho,n}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}\|\rho_\eta+n_\eta-\rho-n\|_{L^1(0,T;L^1)}\big)=0.\end{aligned}$$

类似地, 我们可证 n_η 当 $\eta\to 0$ 时在 $L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))$ 中强收敛到 n. 引理 3.3.2 证毕. □

我们考虑截断函数

$$T_k(s):=\begin{cases}s, & 若\quad 0\le s\le k,\\ 光滑凹函数, & 若\quad k\le s\le 3k,\\ 2k, & 若\quad s\ge 3k.\end{cases} \tag{3.3.12}$$

类似于文献 [87,165], 易证如下有效粘性通量的弱紧性特性.

引理 3.3.3. *对任意 $T>0$、$p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$ 及 $\delta,\eta\in(0,1)$, 令 $(\rho_\eta,n_\eta,(\rho_\eta+n_\eta)u_\eta)$ 为初值问题 (3.3.1) 由命题 3.2.2 给出的整体弱解, 且 $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 为由引理 3.3.1 给出的极限. 则以下等式成立:*

$$\begin{aligned}&\lim_{\eta\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\big(P_\delta(\rho_\eta,n_\eta)-(2\mu+\lambda)\mathrm{div}\,u_\eta\big)T_k(\rho_\eta+n_\eta)dxdt\\&=\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\big(\overline{P_\delta(\rho,n)}-(2\mu+\lambda)\mathrm{div}\,u\big)\overline{T_k(\rho+n)}dxdt,\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

其中 $\overline{T_k(\rho+n)}$ 表示 $T_k(\rho_\eta+n_\eta)$ 的弱极限.

在本节最后, 我们证明两个密度的强收敛性.

引理 3.3.4. 对任意 $T>0$、$p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$ 及 $\delta,\eta\in(0,1)$, 令 $(\rho_\eta,n_\eta,(\rho_\eta+n_\eta)u_\eta)$ 为初值问题 (3.3.1) 由命题 3.2.2 给出的整体弱解, 且 $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 为由引理 3.3.1 给出的极限. 那么对 $p\in[1,p_0+1)$, 以下强收敛性成立:

$$(\rho_\eta,n_\eta)\to(\rho,n)\quad 于\ L^p(0,T;L^p(\mathbb{T}^d))\times L^p(0,T;L^p(\mathbb{T}^d)). \tag{3.3.14}$$

证明. 对 $s\geq 0$ 及 $\sigma>0$, 定义 $\vartheta_\eta:=\rho_\eta+n_\eta$, $\vartheta:=\rho+n$ 及 $b_\sigma(s):=(s+\sigma)\log(s+\sigma)$. 由 (3.3.6), 我们有

$$(J_\sigma*\vartheta_\eta)_t+\operatorname{div}\big((J_\sigma*\vartheta_\eta)u_\eta\big)=\eta\Delta(J_\sigma*\vartheta_\eta)+r_{1,\sigma}+r_{2,\sigma}, \tag{3.3.15}$$

其中 $J_\sigma\in C_c^\infty(\mathbb{T}^d)$ 为 Friedrichs 磨光核, $r_{i,\sigma}$ $(i=1,2)$ 由 (3.3.6) 给出. 将 (3.3.15) 乘以 $b'(J_\sigma*\vartheta_\eta)=1+\log(J_\sigma*\vartheta_\eta+\sigma)$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\big(b(J_\sigma*\vartheta_\eta)\big)_t+\operatorname{div}\big(b(J_\sigma*\vartheta_\eta)u_\eta\big)+\big(b'(J_\sigma*\vartheta_\eta)J_\sigma*\vartheta_\eta-b(J_\sigma*\vartheta_\eta)\big)\operatorname{div}u_\eta\\&\quad\leq\eta\Delta\big(b(J_\sigma*\vartheta_\eta)\big)+b'(J_\sigma*\vartheta_\eta)(r_{1,\sigma}+r_{2,\sigma}).\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

对 (3.3.16) 在 $\mathbb{T}^d\times[0,t]$ 上积分并取极限 $\sigma\to 0$, 我们证得

$$\int_{\mathbb{T}^d}\vartheta_\eta\log\vartheta_\eta dx\leq\int_{\mathbb{T}^d}(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})\log(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})dx-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\vartheta_\eta\operatorname{div}u_\eta dxd\tau. \tag{3.3.17}$$

类似地, 我们有等式

$$\int_{\mathbb{T}^d}\vartheta\log\vartheta dx=\int_{\mathbb{T}^d}(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})\log(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})dx-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\vartheta\operatorname{div}udxd\tau. \tag{3.3.18}$$

设 $\overline{f}$ 表示序列 f_η 的弱极限, 且 $P_{1,\delta}(\rho,n)$、$P_{2,\delta}(\rho,n)$、(A,B) 及 $T_k(f)$ 分别由 $(3.2.7)_1$, $(3.2.7)_2$, (1.3.24) 和 (3.3.12) 给出. 根据 (3.2.8)、(3.3.10)、(3.3.13) 与 (3.3.17)-(3.3.18), 我们可证

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^d}(\overline{\vartheta\log\vartheta}-\vartheta\log\vartheta)dx\\&\leq\lim_{\eta\to 0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}(\vartheta\operatorname{div}u-\vartheta_\eta\operatorname{div}u_\eta)dxd\tau\\&=\lim_{\eta\to 0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\Big(\big(\vartheta-\overline{T_k(\vartheta)}\big)\operatorname{div}u-\big(\vartheta_\eta-T_k(\vartheta_\eta)\big)\operatorname{div}u_\eta\\&\quad+\frac{1}{2\mu+\lambda}\big(P_\delta(\rho_\eta,n_\eta)-P_\delta(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)\big)\big(\overline{T_k(\vartheta)}-T_k(\vartheta_\eta)\big)\\&\quad+\frac{1}{2\mu+\lambda}\big(P_{1,\delta}(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)-P_{1,\delta}(\rho,n)\big)\big(\overline{T_k(\vartheta)}-T_k(\vartheta_\eta)\big)\\&\quad+\frac{1}{2\mu+\lambda}\big(P_{2,\delta}(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)-P_{2,\delta}(\rho,n)\big)\big(T_k(\vartheta_\eta)-\overline{T_k(\vartheta)}\big)\Big)dxd\tau.\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

利用 (3.2.20)、(3.3.2) 以及弱极限 $\vartheta-\overline{T_k(\vartheta)}$ 的下半连续性, 我们可以推出

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\eta\to0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\big(\vartheta-\overline{T_k(\vartheta)}\big)\operatorname{div}u-\big(\vartheta_\eta-T_k(\vartheta_\eta)\big)\operatorname{div}u_\eta dxd\tau\\
&\quad\le\sup_{\eta\to0}\lim\|\operatorname{div}u_\eta\|_{L^2(0,T;L^2)}\big(\|\vartheta-\overline{T_k(\vartheta)}\|_{L^2(0,T;L^2)}+\|\vartheta_\eta-T_k(\vartheta_\eta)\|_{L^2(0,T;L^2)}\big)\\
&\quad\le\frac{C_\delta\|\vartheta_\delta\|_{L^{p_0+1}(0,T;L^{p_0+1})}^{\frac{p_0+1}{2}}}{k^{\frac{p_0-1}{2}}}\le\frac{C_\delta}{k^{\frac{p_0-1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

注意到对任意 $x_1,x_2,y_1,y_2\ge0$ 及 $F(x,y)\in C^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)=&(x_1-x_2)\int_0^1\partial_xF\big(x_2+\theta(x_1-x_2),y_2+\theta(y_1-y_2)\big)d\theta\\
&+(y_1-y_2)\int_0^1\partial_yF\big(x_2+\theta(x_1-x_2),y_2+\theta(y_1-y_2)\big)d\theta,
\end{aligned}
\tag{3.3.20}
$$

联立 (1.3.16)、(3.2.2)、(3.3.3)、$(3.2.20)_4$ 及 (3.3.20), 我们证明

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\eta\to0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\big(P_\delta(\rho_\eta,n_\eta)-P_\delta(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)\big)\big(\overline{T_k(\vartheta)}-T_k(\vartheta_\eta)\big)dxd\tau\\
&\quad\le C_\delta k\lim_{\eta\to0}\Big(\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\vartheta_\eta\big(|A_\eta-A|^{p_0}+|B_\eta-B|^{p_0}\big)dxd\tau\Big)^{\frac{1}{p_0}}=0.
\end{aligned}
$$

注意到 $T_k(s)$ 及 $P_{1,\delta}(As,Bs)$ 关于 $s\ge0$ 的单调性, 我们应用 [90, 定理 10.19] 以得到

$$
\lim_{\eta\to0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\big(P_{1,\delta}(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)-P_{1,\delta}(A\vartheta,B\vartheta)\big)\big(\overline{T_k(\vartheta)}-T_k(\vartheta_\eta)\big)dxd\tau\le0.
$$

将上述估计代入 (3.3.19), 取极限 $k\to\infty$ 并注意到 $\overline{T_k(\vartheta)}$ 几乎处处收敛于 ϑ, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d}(\overline{\vartheta\log\vartheta}-\vartheta\log\vartheta)dx\\
&\quad\le\frac{1}{2\mu+\lambda}\lim_{\eta\to0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\big(P_{2,\delta}(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)-P_{2,\delta}(\rho,n)\big)\big(T_k(\vartheta_\eta)-\overline{T_k(\vartheta)}\big)dxd\tau\\
&\quad=\frac{1}{2\mu+\lambda}\lim_{\eta\to0}\int_0^tP_{2,\delta}(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)\vartheta_\eta-P_{2,\delta}(\rho,n)\vartheta dxd\tau\\
&\qquad+\frac{1}{2\mu+\lambda}\lim_{\eta\to0}\int_0^t\big(\big(P_{2,\delta}(\rho,n)-P_{2,\delta}(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)\big)\vartheta\big)dxd\tau.
\end{aligned}
\tag{3.3.21}
$$

由于 $P_{2,\delta}(sA,sB)$ 在 $\{s\in\mathbb{R}_+\mid s\le2C_*c_\delta\}$ 中有紧支集, 存在一个常数 $C_{*,\delta}>0$ 使得 $C_{*,\delta}s\log s-$

$sP_{2,\delta}(As,Bs)$ 及 $C_{*,\delta}s\log s+P_{2,\delta}(As,Bs)$ 对 $s\geq 0$ 是严格凸的. 因而, 我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\eta\to 0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\big(P_{2,\delta}(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)\vartheta_\eta-P_{2,\delta}(\rho,n)\vartheta\big)dxd\tau\\&\quad\leq C_{*,\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}(\overline{\vartheta\log\vartheta}-\vartheta\log\vartheta)dxd\tau,\end{aligned}\tag{3.3.22}$$

以及

$$\begin{aligned}&\lim_{\eta\to 0}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\big(P_{2,\delta}(\rho,n)-P_{2,\delta}(A\vartheta_\eta,B\vartheta_\eta)\big)\vartheta dxd\tau\\&\quad\leq C_{*,\delta}\lim_{\eta\to 0}\int_{\{(x,\tau)\in\mathbb{T}^d\times[0,t]|\vartheta\leq 2C_*c_\delta\}}(\vartheta_\eta\log\vartheta_\eta-\vartheta\log\vartheta)\vartheta dxd\tau\\&\quad\leq 2C_{*,\delta}C_*c_\delta\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}(\overline{\vartheta\log\vartheta}-\vartheta\log\vartheta)dxd\tau,\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

此处我们用到 (3.3.10), $P_{2,\delta}(sA,sB)\geq 0$, $P_{2,\delta}(sA,sB)$ 关于 s 的紧支集以及 $C_{*,\delta}s\log s-P_{2,\delta}(sA,sB)$ 的凸性. 由 (3.3.21)-(3.3.23), 我们得到

$$\int_{\mathbb{T}^d}(\overline{\vartheta\log\vartheta}-\vartheta\log\vartheta)dx\leq\frac{C_{*,\delta}(2C_*c_\delta+1)}{2\mu+\lambda}\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}(\overline{\vartheta\log\vartheta}-\vartheta\log\vartheta)dxd\tau.\tag{3.3.24}$$

结合 $(3.2.20)_4$、(3.3.4)、(3.3.24)、Grönwall 不等式以及 $s\log s$ 的凸性, (3.3.14) 得证. □

利用命题 3.2.2 及引理 3.3.1-3.3.4, 我们证明初值问题 (3.3.1) 整体弱解的存在性.

命题 3.3.5. *对任意 $p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$ 及 $\delta\in(0,1)$, 在定理 1.3.8 或者定理 1.3.10 的假设下, 初值问题 (3.3.1) 存在一个整体弱解 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$, 且对任意时间 $T>0$ 满足一致估计*

$$\begin{cases}\|\rho_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^\gamma)}+\|n_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^\alpha)}+\delta^{\frac{1}{p_0}}\|(\rho_\delta,n_\delta)\|_{L^\infty(0,T;L^{p_0})}\leq C,\\ \|\sqrt{\rho_\delta+n_\delta}u_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|u_\delta\|_{L^2(0,T;H^1)}\leq C,\\ \rho_\delta(x,t)\geq 0,\quad n_\delta(x,t)\geq 0,\quad (x,t)\in\mathbb{T}^d\times(0,T),\\ \underline{c}\rho_\delta(x,t)\leq n_\delta(x,t)\leq\bar{c}\rho_\delta(x,t),\ \text{若}\ \underline{c}\rho_0(x)\leq n_0(x)\leq\bar{c}\rho_0(x),\ (x,t)\in\mathbb{T}^d\times(0,T),\end{cases}\tag{3.3.25}$$

其中 $C>0$ 为一个与 δ 无关的常数.

进一步, 对几乎处处的 $t\in(0,T)$, 能量不等式成立:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^d}[\frac{1}{2}(\rho_\delta+n_\delta)|u_\delta|^2+H_\delta(\rho_\delta,n_\delta)]dx+\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}[\mu|\nabla u_\delta|^2+(\mu+\lambda)(\operatorname{div}u_\delta)^2]dxd\tau\\&\quad\leq\int_{\mathbb{T}^d}[\frac{1}{2}(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})|u_{0,\delta}|^2+H_\delta(\rho_{0,\delta},n_{0,\delta})]dx,\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

其中 $H_\delta(\rho,n)$ 由 (3.2.11) 给出.

3.4 人工压力消失极限

3.4.1 密度的可积性

在这节中, 我们对方程 (3.3.1) 取极限 $\delta \to 0$ 以证明定理 1.3.8 和 1.3.10. 由于一致估计 (3.3.25) 不足以证明 $P_\delta(\rho_\delta, n_\delta)$ 当 $\delta \to 0$ 时强收敛到 $P(\rho, n)$, 我们需要如下密度 ρ_δ 及 n_δ 更高的一致可积性.

引理 3.4.1. 对任意 $T > 0$、$\delta \in (0,1)$ 及 $p_0 > \gamma + \widetilde{\gamma} + \alpha + \widetilde{\alpha} + 1$, 若 $(\rho_\delta, n_\delta, (\rho_\delta + n_\delta)u_\delta)$ 为当 $t \in (0,T)$ 时初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, 则在定理 1.3.8 的假设下, $\vartheta_\delta := \rho_\delta + n_\delta$ 满足

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\vartheta_\delta^{\max\{\gamma,\alpha\}+\theta_0} + \delta \vartheta_\delta^{p_0+\theta_0}) dxdt \leq C, \tag{3.4.1}$$

这里 $C > 0$ 为一个与 δ 无关的常数, $\theta_0 := \frac{2}{d}\max\{\gamma, \alpha\} - 1 > 0$.

此外, 在定理 1.3.10 的假设下, ρ_δ 和 n_δ 满足

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\rho_\delta^{\gamma+\theta_1} + n_\delta^{\alpha+\theta_2} + \delta \vartheta_\delta^{p_0+\theta_1} + \delta \vartheta_\delta^{p_0+\theta_2}) dxdt \leq C, \tag{3.4.2}$$

其中 $\theta_1 := \frac{2}{d}\gamma - \frac{\gamma}{\min\{\gamma,\alpha\}} > 0$, $\theta_2 := \frac{2}{d}\alpha - \frac{\alpha}{\min\{\gamma,\alpha\}} > 0$.

注记 3.4.2. 在定理 1.3.8 的假设下, 由于 $\underline{c}n \leq \rho \leq \bar{c}\rho$ 成立, 我们只需要 γ 充分大, 而 α 可以放宽成任意大于或等于 1 的常数. 绝热常数 γ 满足的条件 (1.3.19) 是为了保证 $\max\{\gamma, \alpha\} + \theta_0 \geq 2$, 从而方程 $(1.3.15)_1$-$(1.3.15)_2$ 在重整化解的意义下成立.

注记 3.4.3. 在定理 1.3.10 的假设下, 由于 ρ 和 n 之间没有相互依赖的关系, 从而我们需要 γ, α 满足限制 (1.3.22) 以保证 $\gamma + \theta_1 \geq 2$ 和 $\alpha + \theta_2 \geq 2$.

证明. 我们只给出 (3.4.2) 的证明, 而 (3.4.1) 类似可证. 有效粘性通量 F_δ 由如下定义:

$$F_\delta := P_\delta(\rho_\delta, n_\delta) - \int_{\mathbb{T}^d} P_\delta(\rho_\delta, n_\delta) dx - (2\mu + \lambda)\mathrm{div} u_\delta. \tag{3.4.3}$$

我们从动量方程 $(3.3.1)_3$ 知

$$F_\delta = (-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\left((\vartheta_\delta u_\delta)_t + \mathrm{div}(\vartheta_\delta u_\delta \otimes u_\delta)\right), \tag{3.4.4}$$

此处算子 $(-\Delta)^{-1} : W^{k-2,p}(\mathbb{T}^d) \to W^{k,p}(\mathbb{T}^d)$ $(k \in \mathbb{R},\ p \in (1,\infty))$ 定义如下:

$$(-\Delta)^{-1} f = g, \quad g \text{ 满足椭圆问题 } -\Delta g = f, \quad \int_{\mathbb{T}^d} f = 0. \tag{3.4.5}$$

根据 (3.3.1) 及 (3.4.4), 我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\rho_\delta^{\theta_1}P_\delta(\rho_\delta,n_\delta)dxdt=&\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\rho_\delta^{\theta_1}\big(\int_{\mathbb{T}^d}P_\delta(\rho_\delta,n_\delta)dx+(2\mu+\lambda)\mathrm{div}\,u_\delta\big)dxd\tau\\&+\int_{\mathbb{T}^d}\rho_\delta^{\theta_1}(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)dx\Big|_0^T\\&+(\theta-1)\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\rho_\delta^{\theta_1}\mathrm{div}\,u_\delta(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)dxdt\\&+\sum_{i,j=1}^d\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\rho_\delta^{\theta_1}[R_iR_j,u_\delta^j](\vartheta_\delta u_\delta^i)dxdt,\end{aligned}\tag{3.4.6}$$

其中 $R_i:=(-\Delta)^{-\frac12}\partial_i\ (i=1,...,d)$ 为 Riesz 算子, $[A,B]=AB-BA$ 为交换子.

首先, 对待选取的小常数 $\varepsilon_0>0$, 由 (3.3.25) 及 $2\theta_1<\gamma+\theta_1$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\rho_\delta^{\theta_1}\big(\int_{\mathbb{T}^d}P_\delta(\rho_\delta,n_\delta)dx+(2\mu+\lambda)\mathrm{div}\,u_\delta\big)dxd\tau\\&\le T\|\rho_\delta^{\theta_1}\|_{L^\infty(0,T;L^1)}\|P_\delta(\rho_\delta,n_\delta)\|_{L^\infty(0,T;L^1)}+(2\mu+\lambda)T^{\frac12}\|\rho_\delta^{\theta_1}\|_{L^2(0,T;L^2)}\|\mathrm{div}\,u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)}\\&\le C(1+\frac{1}{\varepsilon_0})+\varepsilon_0\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}\rho_\delta^{\gamma+\theta_1}dxdt,\end{aligned}$$

注意到 (3.3.25) 意味着

$$\|\vartheta_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^{\gamma_0})}+\|\vartheta_\delta u_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0+1}})}\le C,\tag{3.4.7}$$

此处和下面的计算中我们使用记号

$$\gamma_0:=\min\{\gamma,\alpha\}.$$

通过 Sobolev 不等式及奇异积分算子 $\nabla(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}$ 的 $L^p(\mathbb{T}^d)$ $(p\in(1,\infty))$ 有界性, 我们有

$$\|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,f\|_{L^{\frac{pd}{d-p}}}\le C\|\nabla(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,f\|_{L^p}\le C\|f\|_{L^p},\quad p\in(1,d).\tag{3.4.8}$$

利用 (3.2.5)、(3.3.25)、(3.4.7)-(3.4.8) 及 $\frac1d+1-\frac{\theta_1}{\gamma}>\frac{\gamma_0+1}{2\gamma_0}$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^d}\rho_\delta^{\theta_1}(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)dx\Big|_0^T\\&\le\|\rho_\delta^{\theta_1}\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{\gamma}{\theta_1}})}\|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2\gamma_0 d}{(d-2)\gamma_0+d}})}\\&\quad+\|\rho_{0,\delta}\|_{L^{\frac{\gamma}{\theta_1}}}\|(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,\big((\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})u_{0,\delta}\big)\|_{L^{\frac{2\gamma_0 d}{(d-2)\gamma_0+d}}}\\&\le C\|\rho_\delta\|^{\theta_1}_{L^\infty(0,T;L^\gamma)}\|\vartheta_\delta u_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0+1}})}+C\|\rho_{0,\delta}\|^{\theta}_{L^\gamma}\|(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})u_{0,\delta}\|_{L^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0+1}}}\le C.\end{aligned}$$

与文献 [165] 类似, 我们分别从情形 $d \geq 3$ 及情形 $d = 2$ 分析项 I_i^2 $(i = 3,4)$.

- 情形 1: $d \geq 3$.

利用 $\frac{\theta_1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma_0} + \frac{d-2}{d} = 1$、(3.3.25)、(3.4.7)、Sobolev 嵌入 $H^1(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{T}^d)$ 及 Riesz 算子的有界性, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \rho_\delta^{\theta_1} \operatorname{div} u_\delta (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(\vartheta_\delta u_\delta) dxdt \\
&\quad \leq C \|\rho_\delta^{\theta_1}\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{\gamma}{\theta_1}})} \|\vartheta_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^{\gamma_0})} \|u_\delta\|^2_{L^2(0,T;L^{\frac{2d}{d-2}})} \leq C.
\end{aligned}
$$

类似地, 我们可证

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \rho_\delta^{\theta_1} [R_i R_j, u_\delta^j](\vartheta_\delta u_\delta^i) dxdt \\
&\quad \leq C \|\rho_\delta\|^{\theta_1}_{L^\infty(0,T;L^\gamma)} \|\operatorname{div} u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)} \|\vartheta_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^{\gamma_0})} \|u_\delta\|_{L^2(0,T;L^{\frac{2d}{d-2}})} \leq C.
\end{aligned}
$$

对 $d = 3$, 根据 (3.3.25)、(3.4.7)-(3.4.8) 及 Sobolev 嵌入 $H^1(\mathbb{T}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{T}^3)$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} \rho_\delta^{\theta_1} [R_i R_j, u_\delta^j](\vartheta_\delta u_\delta^i) dxdt \\
&\leq C \|\rho_\delta^{\theta_1}\|_{L^{\frac{\gamma+\theta_1}{\theta_1}}(0,T;L^{\frac{\gamma+\theta_1}{\theta_1}})} \|\operatorname{div} u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)} \|\vartheta_\delta\|^{\frac{\gamma_0+3}{5\gamma_0-3}}_{L^\infty(0,T;L^{\gamma_0})} \|u_\delta\|^{\frac{\gamma_0+3}{5\gamma_0-3}}_{L^2(0,T;L^6)} \|\vartheta_\delta u_\delta\|^{\frac{2(2\gamma_0-3)}{5\gamma_0-3}}_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0+1}})} \\
&\leq C(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}) + \varepsilon_0 \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} \rho_\delta^{\gamma+\theta_1} dxdt.
\end{aligned}
$$

- 情形 2: $d = 2$.

从 (3.3.25) 及 (3.4.8), 我们可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \rho_\delta^{\theta_1} \operatorname{div} u_\delta (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(\vartheta_\delta u_\delta) dxdt \\
&\quad \leq C \|\rho_\delta\|^{\theta_1}_{L^{\gamma+\theta_1}(0,T;L^{\gamma+\theta_1})} \|\operatorname{div} u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)} \|\sqrt{\vartheta_\delta}\|_{L^{2(2\gamma_0-1)}(0,T;L^{2(2\gamma_0-1)})} \|\sqrt{\vartheta_\delta} u_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \\
&\quad \leq C(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}) + \varepsilon_0 \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} (\rho_\delta^{\gamma+\theta_1} + n_\delta^{\alpha+\theta_2}) dxdt.
\end{aligned}
$$

此外, 由临界 Sobolev 不等式 $H^1(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow BMO(\mathbb{T}^2)$ 及交换子估计 (3.5.11), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \rho_\delta^{\theta_1} [R_i R_j, u_\delta^j](\vartheta_\delta u_\delta^i) dxdt \\
&\quad \leq C \|\rho_\delta\|^{\theta_1}_{L^{\gamma+\theta_1}(0,T;L^{\gamma+\theta_1})} \|u_\delta\|_{L^2(0,T;BMO)} \|\vartheta_\delta u_\delta\|_{L^{2(2\gamma_0-1)}(0,T;L^{\frac{2\gamma_0-1}{\gamma_0}})} \\
&\quad \leq C \|\rho_\delta\|^{\theta_1}_{L^{\gamma+\theta_1}(0,T;L^{\gamma+\theta_1})} \|\sqrt{\vartheta_\delta}\|_{L^{2(2\gamma_0-1)}(0,T;L^{2(2\gamma_0-1)})} \|u_\delta\|_{L^2(0,T;H^1)} \|\sqrt{\vartheta_\delta} u_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \\
&\quad \leq C(1 + \frac{1}{\varepsilon_0}) + \varepsilon_0 \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} (\rho_\delta^{\gamma+\theta_1} + n_\delta^{\alpha+\theta_2}) dxdt.
\end{aligned}
$$

将上述的估计代入 (3.4.6), 我们有

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \rho_\delta^{\theta_1} P_\delta(\rho_\delta, n_\delta) dxdt \leq \frac{C}{\varepsilon_0} + 3\varepsilon_0 \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\rho_\delta^{\gamma+\theta_1} + n_\delta^{\alpha+\theta_2}) dxdt. \tag{3.4.9}$$

类似地, 我们易证

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} n_\delta^{\theta_2} P_\delta(\rho_\delta, n_\delta) dxdt \leq \frac{C}{\varepsilon_0} + 3\varepsilon_0 \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} (\rho_\delta^{\gamma+\theta_1} + n_\delta^{\alpha+\theta_2}) dxdt. \tag{3.4.10}$$

我们从 (1.3.16) 及 (3.2.2) 可知

$$(\rho_\delta^{\theta_1} + n_\delta^{\theta_2}) P_\delta(\rho_\delta, n_\delta) \geq \frac{1}{2C}(\rho_\delta^{\gamma+\theta_1} + n_\delta^{\alpha+\theta_2}) + \delta(\rho_\delta^{p_0+\theta_1} + n_\delta^{p_0+\theta_2}) - C. \tag{3.4.11}$$

联立 (3.4.9)-(3.4.11) 并选择 $\varepsilon_0 = \frac{1}{24C}$, 我们得到 (3.4.2). 引理 3.4.1 证毕. □

根据 (3.3.25) 及 (3.4.1), 我们可证得如下逼近解序列 $(\rho_\delta, n_\delta, (\rho_\delta + n_\delta)u_\delta)$ 的收敛性.

引理 3.4.4. *对任意 $T > 0$、$\delta \in (0,1)$ 及 $p_0 > \gamma + \widetilde{\gamma} + \alpha + \widetilde{\alpha} + 1$, 如果 $(\rho_\delta, n_\delta, (\rho_\delta + n_\delta)u_\delta)$ 为当 $t \in (0,T)$ 时初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, 则在定理 1.3.8 或者定理 1.3.10 的假设下, 存在一个极限 $(\rho, n, (\rho+n)u)$ 使得当 $\delta \to 0$ 时, 在取子列的意义下, 如下收敛性成立:*

$$\begin{cases} (\rho_\delta, n_\delta) \overset{*}{\rightharpoonup} (\rho, n) & \text{于 } L^\infty(0,T;L^\gamma(\mathbb{T}^d)) \times L^\infty(0,T;L^\alpha(\mathbb{T}^d)), \\ \delta(\rho_\delta + n_\delta)^{p_0} \to 0 & \text{于 } L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)), \\ u_\delta \rightharpoonup u & \text{于 } L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}^d)), \\ (\rho_\delta, n_\delta) \to (\rho, n) & \text{于 } C([0,T];L^\gamma_{weak}(\mathbb{T}^d)) \times C([0,T];L^\alpha_{weak}(\mathbb{T}^d)), \\ (\rho_\delta, n_\delta) \to (\rho, n) & \text{于 } C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d)) \times C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d)), \\ (\rho_\delta + n_\delta)u_\delta \to (\rho+n)u & \text{于 } C([0,T];L_{weak}^{\frac{2\min\{\gamma,\alpha\}}{\min\{\gamma,\alpha\}+1}}(\mathbb{T}^d)) \cap C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}^d)). \end{cases} \tag{3.4.12}$$

3.4.2 密度的强收敛

类似于引理 3.3.2, 我们可以证明密度 (ρ_δ, n_δ) 的强收敛等价于 $\rho_\delta + n_\delta$ 的强收敛.

引理 3.4.5. *对任意 $T > 0$、$\delta \in (0,1)$ 及 $p_0 > \gamma + \widetilde{\gamma} + \alpha + \widetilde{\alpha} + 1$, 若 $(\rho_\delta, n_\delta, (\rho_\delta + n_\delta)u_\delta)$ 为当 $t \in (0,T)$ 时初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, 则在定理 1.3.8 或者定理 1.3.10 的假设下, 当 $\delta \to 0$ 时, 如下收敛性成立:*

$$\begin{cases} \rho_\delta - (\rho_\delta + n_\delta)A \to 0 & \text{于 } L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)), \\ n_\delta - (\rho_\delta + n_\delta)B \to 0 & \text{于 } L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)), \end{cases} \tag{3.4.13}$$

其中 (A,B) 由 (1.3.24) 定义.

进一步, 以下收敛等价性成立:

$$\begin{aligned} &(\rho_\delta, n_\delta) \to (\rho, n) \quad 于\ L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)) \times L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)) \\ \Longleftrightarrow\ &\rho_\delta + n_\delta \to \rho + n \quad 于\ L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)). \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

受到文献 [13,29,30] 启发, 我们引入周期对称核

$$K_h(x) := \begin{cases} \frac{1}{(h+|x|)^d}, & 若\quad 0 \le |x| \le \frac{1}{2}, \\ 光滑函数, & 若\quad \frac{1}{2} \le |x| \le \frac{2}{3}, \\ 与\ h\ 无关的光滑函数, & 若\quad \frac{2}{3} \le |x| \le \frac{3}{4}, \\ 0, & 若\quad \frac{3}{4} \le |x| \le 1. \end{cases} \tag{3.4.15}$$

易知存在一个与 h 无关的常数 $C > 1$ 以及充分小的常数 $h_0 \in (0,1)$ 满足

$$|x||\nabla K_h(x)| \le C K_h(x), \quad \frac{1}{C}|\log h| \le \|K_h\|_{L^1} \le C|\log h|, \quad h \in (0, h_0). \tag{3.4.16}$$

我们定义能量泛函

$$L_{h,p}(f) := \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)|\Lambda[f]|^p dxdy, \tag{3.4.17}$$

其中

$$\begin{cases} \Lambda[f] := f^x - f^y, \\ f^x := f(x,t), \\ \overline{K}_h := \dfrac{K_h}{\|K_h\|_{L^1}}. \end{cases} \tag{3.4.18}$$

根据引理 3.5.3, 为了证明 $\vartheta_\delta := \rho_\delta + n_\delta$ 的强收敛, 我们需要

$$\lim_{h\to 0} \limsup_{\delta\to 0} \operatorname*{ess\ sup}_{t\in(0,T)} L_{h,1}(\vartheta_\delta) = 0.$$

由下面的引理 3.4.6, 上述估计等价于

$$\lim_{h\to 0} \limsup_{\delta\to 0} \operatorname*{ess\ sup}_{t\in(0,T)} \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])(w_\delta^x + w_\delta^y) dxdy = 0,$$

其中 w_δ 为问题 (3.4.21) 的一个解, 光滑函数 ς 由如下给出:

$$\varsigma(s) := \begin{cases} |s|^2, & 若\quad |s| \le 1, \\ 光滑函数, & 若\quad 1 \le |s| \le 2, \\ |s|, & 若\quad |s| \ge 2. \end{cases} \tag{3.4.19}$$

我们易证 ς 满足

$$\begin{cases}|\varsigma(s)-\frac{1}{2}\varsigma'(s)s|\le\frac{1}{2}\varsigma'(s)s, \quad 0\le\varsigma'(s)s\le C\varsigma(s)\le C|s|, \quad s\in\mathbb{R},\\ \varsigma(s)\ge\frac{1}{C}|s|, \quad |s|\ge 1.\end{cases}\tag{3.4.20}$$

引理 3.4.6. 对任意 $T>0$、$\delta\in(0,1)$ 及 $p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$, 设 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, 且 $\vartheta_\delta:=\rho_\delta+n_\delta$ 为密度和. 如果 w_δ 为如下问题的解:

$$\begin{cases}(w_\delta)_t+u_\delta\cdot\nabla w_\delta+\lambda_0\Xi_\delta w_\delta=0, \quad x\in\mathbb{T}^d, \quad t\in(0,T),\\ \Xi_\delta:=\vartheta_\delta|\mathrm{div}\,u_\delta|+|\mathrm{div}\,u_\delta|+M|\nabla u_\delta|+\rho_\delta^\gamma+\rho_\delta^{\widetilde{\gamma}}+n_\delta^\alpha+n_\delta^{\widetilde{\alpha}}+1,\\ w_\delta(x,0)=e^{-\lambda_0(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})(x)}, \quad x\in\mathbb{T}^d,\end{cases}\tag{3.4.21}$$

其中 $\lambda_0\ge 1$ 为一待选取的常数, M 为由 (3.5.9) 定义的极大函数, 则在定理 1.3.8 或者定理 1.3.10 的假设下, w_δ 满足一致估计

$$\begin{cases}0\le w_\delta\le e^{-\lambda_0\vartheta_\delta}\le 1,\\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\int_{\mathbb{T}^d}\vartheta_\delta\log(1+|\log w_\delta|)dx\le C(1+\lambda_0),\end{cases}\tag{3.4.22}$$

以及

$$\begin{aligned}&\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\big(L_{h,1}(\vartheta_\delta)\big)^2\\ &\quad\le\frac{C(1+\lambda_0)}{\log(1+|\log\sigma_*|)}+\frac{1}{\sigma_*}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])(w_\delta^x+w_\delta^y)dxdy,\end{aligned}\tag{3.4.23}$$

其中 $L_{h,1}(f)$、$\Lambda[f]$、f^x、$\overline{K}_h$ 及 ς 分别由 (3.4.17)、$(3.4.18)_1$、$(3.4.18)_2$、$(3.4.18)_3$ 及 (3.4.19) 给出, $C>0$ 为一个与 δ、h 和 σ_* 无关的常数, $\sigma_*>0$ 为某一待选取的常数.

证明. 首先, 由输运方程 $(3.4.21)_1$ 的极值原理, 我们有

$$0\le w_\delta\le 1.\tag{3.4.24}$$

因为 ϑ_δ 在分布意义下满足

$$(\vartheta_\delta)_t+u_\delta\cdot\nabla\vartheta_\delta+\vartheta_\delta\mathrm{div}\,u_\delta=0,\tag{3.4.25}$$

我们利用 $(3.4.21)_2$ 及类似于 (3.3.15)-(3.3.17) 中重整化解技术证明

$$\begin{aligned}&(e^{-\lambda_0\vartheta_\delta})_t+u_\delta\cdot\nabla e^{-\lambda_0\vartheta_\delta}+\lambda_0\Xi_\delta e^{-\lambda_0\vartheta_\delta}\\&\quad=\lambda_0(\Xi_\delta+\vartheta_\delta\mathrm{div}u_\delta)e^{-\lambda_0\vartheta_\delta}\geq 0\quad\text{在分布意义下成立.}\end{aligned}\tag{3.4.26}$$

从而, 利用方程 $(3.4.21)_1$ 及 (3.4.26) 的比较原理, 我们得到 $(3.4.22)_1$.

下一步, 我们根据 $(3.4.22)_1$ 及重整化解技术 (形式上将 $-\vartheta_\delta(1+|\log w_\delta|)w_\delta^{-1}$ 乘以方程 $(3.4.21)_1$), 证明如下方程在分布意义下成立:

$$\big(\vartheta_\delta\log\left(1+|\log w_\delta|\right)\big)_t+\mathrm{div}\left(u_\delta\vartheta_\delta\log\left(1+|\log w_\delta|\right)\right)=\frac{\lambda_0\vartheta_\delta\Xi_\delta}{1+|\log w_\delta|}\leq\Xi_\delta.\tag{3.4.27}$$

注意到

$$\int_{\mathbb{T}^d}\vartheta_\delta\log\left(1+|\log w_\delta|\right)\big|_{t=0}dx\leq\frac{C}{\lambda_0},$$

从而我们利用 $(1.3.19)_2$、$(1.3.22)_2$-$(1.3.22)_3$、(3.3.25) 和 (3.4.1)-(3.4.2), 证明 (3.4.27) 等式右侧的项 Ξ_δ 在 $L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))$ 中一致有界. 因而, 对 (3.4.27) 在 $\mathbb{T}^d\times[0,t]$ 上积分, 我们证得 $(3.4.22)_2$.

最后, 利用 (3.4.19) 及 $(3.4.20)_2$, 我们有

$$\begin{aligned}L_{h,1}(\vartheta_\delta)&=\Big(\int_{\{(x,y)\in\mathbb{T}^{2d}||\Lambda[\vartheta_\delta]|\leq 1\}}+\int_{\{(x,y)\in\mathbb{T}^{2d}||\Lambda[\vartheta_\delta]|\geq 1\}}\Big)\overline{K}_h(x-y)|\Lambda[\vartheta_\delta]|dxdy\\&\leq C\Big(\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])dxdy\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{3.4.28}$$

注意到在 $w_\delta^x\geq\sigma_*$ 或者 $w_\delta^y\geq\sigma_*$ 时有 $w_\delta^x+w_\delta^y\geq\sigma_*$, 从而我们使用 $(3.4.19)_1$, 卷积型 Young 不等式得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])dxdy\\&\quad=\Big(\int_{\{(x,y)\in\mathbb{T}^{2d}|w_\delta^x\leq\sigma_*\text{ 且 }w_\delta^y\leq\sigma_*\}}+\int_{\{(x,y)\in\mathbb{T}^{2d}|w_\delta^x\geq\sigma\text{ 或 }w_\delta^y\geq\sigma_*\}}\Big)\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])dxdy\\&\quad\leq\frac{C}{\log\left(1+|\log\sigma_*|\right)}\int_{\mathbb{T}^d}\vartheta_\delta\log\left(1+|\log w_\delta|\right)dx\\&\qquad+\frac{1}{\sigma_*}\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])(w_\delta^x+w_\delta^y)dxdy.\end{aligned}$$

将上式与 $(3.4.22)_2$ 及 (3.4.28) 联立, 我们证得 (3.4.23). □

利用方程 (3.4.25) 的结构, 我们有关于 ϑ_δ 加权的正则性估计.

引理 3.4.7. 对任意 $T>0$、$\delta\in(0,1)$ 及 $p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$, 设 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$ 为初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, $\vartheta_\delta:=\rho_\delta+n_\delta$ 为密度和, 且 w_δ 为当 $t\in(0,T)$ 时问题

(3.4.21) 的解. 那么在定理 1.3.8 或者 1.3.10 的假设下, 以下估计成立:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])(w_\delta^x+w_\delta^y)dxdy\\&\quad\le L_{h,1}(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})+\frac{C}{|\log h|^{\frac12}}+(C-2\lambda_0)\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\Xi_\delta^x w_\delta^x dxdyd\tau\\&\qquad-2\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda[\operatorname{div}u_\delta]\big(\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y+\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big)w_\delta^x dxdyd\tau,\ \ t\in(0,T),\end{aligned}\tag{3.4.29}$$

其中 $L_{h,1}(f)$、$\Lambda[f]$、f^x、$\overline{K}_h$、ς 及 Ξ_δ 由 (3.4.17)、$(3.4.18)_1$、$(3.4.18)_2$、$(3.4.18)_3$、(3.4.19) 以及 $(3.4.21)_2$ 给出, $C>0$ 为一个与 δ、h 和 λ_0 无关的常数.

证明. 从 (3.4.25) 可推出在分布意义下成立

$$\begin{aligned}&\Lambda[\vartheta_\delta]_t+\operatorname{div}_x(\Lambda[\vartheta_\delta]u_\delta^x)+\operatorname{div}_y(\Lambda[\vartheta_\delta]u_\delta^y)\\&\quad=\frac12\Lambda[\vartheta_\delta](\operatorname{div}_x u_\delta^x+\operatorname{div}_y u_\delta^y)-\frac12(\vartheta_\delta^x+\vartheta_\delta^y)\Lambda[\operatorname{div}u_\delta].\end{aligned}\tag{3.4.30}$$

根据 (3.4.21), (3.4.30) 及类似于 (3.3.15)-(3.3.17) 的重整化解技术 (形式上, 将乘以 $\overline{K}_h(x-y)\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])(w_\delta^x+w_\delta^y)$ 后在 $\mathbb{T}^{2d}\times[0,t]$ 上积分) 并利用对称性, 我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])(w_\delta^x+w_\delta^y)dxdy\Big|_0^t\\&\quad=2\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\nabla\overline{K}_h(x-y)\cdot\Lambda[u_\delta]\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])w_\delta^x dxdyd\tau\\&\qquad+2\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])((w_\delta^x)_t+u_\delta^x\cdot\nabla_x w_\delta^x)dxdyd\tau\\&\qquad+\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\big(2\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])-\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\vartheta_\delta]\big)(\operatorname{div}_x u_\delta^x+\operatorname{div}_y u_\delta^y)w_\delta^x dxdyd\tau\\&\qquad-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)(\vartheta_\delta^x+\vartheta_\delta^y)\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\operatorname{div}u_\delta]w_\delta^x dxdyd\tau.\end{aligned}\tag{3.4.31}$$

我们利用 (3.4.16)、$(3.4.20)_1$、$(3.4.22)_1$、(3.5.6) 及 (3.5.10) 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\nabla\overline{K}_h(x-y)\cdot\Lambda[u_\delta]\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])w_\delta^x dxdyd\tau\\&\quad\le C\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\big(|\Lambda[D_{|x-y|}u_\delta]|+2D_{|x-y|}u_\delta^x\big)(\vartheta_\delta^x+\vartheta_\delta^y)w_\delta^x dxdyd\tau\\&\quad\le\frac{C\|\vartheta_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)}\|u_\delta\|_{L^2(0,T;H^1)}}{|\log h|^{\frac12}}+C\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])M|\nabla_x u_\delta^x|w_\delta^x dxdyd\tau,\end{aligned}$$

其中 $D_{|x|}f$ 及 Mf 分别由 (3.5.7) 及 (3.5.9) 定义.

对 (3.4.31) 等式右侧第二项, 我们从方程 $(3.4.21)_1$ 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])((w_\delta^x)_t + u_\delta^x \cdot \nabla_x w_\delta^x) dxdyd\tau \\
&\quad = -2\lambda_0 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\Xi_\delta^x w_\delta^x dxdyd\tau.
\end{aligned}
$$

此外, 注意到 $(3.4.20)_1$ 及事实

$$
\begin{aligned}
&\big(2\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta]) - \varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\vartheta_\delta]\big)(\mathrm{div}_x u_\delta^x + \mathrm{div}_y u_\delta^y) \\
&\quad + (\vartheta_\delta^x + \vartheta_\delta^y)\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\mathrm{div}\, u_\delta] \\
&\quad = 2\big(2\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta]) - \varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\vartheta_\delta]\big)\mathrm{div}_x u_\delta^x \\
&\qquad - 2\big(\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y + \varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big)\Lambda[\mathrm{div}\, u_\delta],
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \Big(\overline{K}_h(x-y)\big(2\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta]) - \varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\vartheta_\delta]\big)(\mathrm{div}_x u_\delta^x + \mathrm{div}_y u_\delta^y) w_\delta^x \\
&\qquad - \overline{K}_h(x-y)(\vartheta_\delta^x + \vartheta_\delta^y)\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\mathrm{div}\, u_\delta] w_\delta^x\Big) dxdyd\tau \\
&\quad \le C\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])|\mathrm{div}_x u_\delta^x| w_\delta^x dxdyd\tau \\
&\qquad - 2\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda[\mathrm{div}\, u_\delta]\big(\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y + \varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big) w_\delta^x dxdyd\tau.
\end{aligned}
$$

将上述估计带入 (3.4.31), 我们证得 (3.4.29). □

对应散度差 $\Lambda[\mathrm{div}\, u_\delta]$ 的部分可分解为压力函数的先验估计和有效粘性通量的先验估计如下:

引理 3.4.8. 对任意 $T>0$、$\delta \in (0,1)$ 及 $p_0 > \gamma + \widetilde{\gamma} + \alpha + \widetilde{\alpha} + 1$, 设 $(\rho_\delta, n_\delta, (\rho_\delta + n_\delta)u_\delta)$ 为当 $t \in (0,T)$ 时初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, $\vartheta_\delta := \rho_\delta + n_\delta$ 为密度和, 且 w_δ 为当 $t \in (0,T)$ 时问题 (3.4.21) 的解. 那么在定理 1.3.8 或者 1.3.10 的假设下, 对一个待选取的常数 $k \ge 1$, 以下估计成立:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda[\mathrm{div}\, u_\delta]\big(\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y + \varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big) w_\delta^x dxdyd\tau \\
&\quad \le \frac{C}{k} - \frac{1}{2\mu+\lambda}\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda(P_\delta(\rho_\delta, n_\delta))\Psi_{\delta,k} dxdyd\tau \\
&\qquad + \frac{1}{2\mu+\lambda}\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda(F_\delta)\Psi_{\delta,k} dxdyd\tau, \quad t \in (0,T),
\end{aligned}
\tag{3.4.32}
$$

其中

$$\Psi_{\delta,k} := \big(\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y + \varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big)\mathbf{1}_{\vartheta_\delta^x\le k}\mathbf{1}_{\vartheta_\delta^y\le k}w_\delta^x, \tag{3.4.33}$$

P_δ、F_δ、$L_{h,1}(f)$、$\Lambda[f]$、f^x、$\overline{K}_h$ 以及 ς 各自由 (3.2.2)、(3.4.3)、(3.4.17)、(3.4.18)$_1$、(3.4.18)$_2$、(3.4.18)$_3$ 和 (3.4.19) 给出, $C>0$ 为一个与 δ、h、k 及 λ_0 无关的常数.

证明. 根据 (3.3.25)、(3.4.1)-(3.4.2)、(3.4.19)$_1$ 及 (3.4.22)$_1$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda[\operatorname{div}u_\delta]\big(\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y+\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big)(1-\mathbf{1}_{\vartheta_\delta^x\le k}\mathbf{1}_{\vartheta_\delta^y\le k})w_\delta^x dxdyd\tau\\
&\le C\int_{\{(x,y,\tau)\in\mathbb{T}^{2d}|\vartheta_\delta^x\ge k\ \text{或}\ \vartheta_\delta^y\ge k\}}\overline{K}_h(x-y)(|\operatorname{div}_x u_\delta^x|+|\operatorname{div}_y u_\delta^y|)(\vartheta_\delta^x w_\delta^x+1)dxdyd\tau\\
&\le \frac{C}{k}\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)(|\operatorname{div}_x u_\delta^x|+|\operatorname{div}_y u_\delta^y|)(\vartheta_\delta^x+\vartheta_\delta^y)dxdyd\tau\\
&\le \frac{C}{k}\|\operatorname{div}u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)}\|\vartheta_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)}\le\frac{C}{k},
\end{aligned}\tag{3.4.34}$$

其中我们使用了如下事实:

$$\begin{cases}
|\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])|\vartheta_\delta^y\le C(\vartheta_\delta^x+1), & \text{若 } |\Lambda[\vartheta_\delta]|\le 2,\\
\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y+\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])=\vartheta_\delta^x\operatorname{sign}\Lambda[\vartheta_\delta], & \text{若 } |\Lambda[\vartheta_\delta]|\ge 2,\\
\vartheta_\delta^x+\vartheta_\delta^y\ge k, & \text{若 } \vartheta_\delta^x\ge k \text{ 或者 } \vartheta_\delta^y\ge k,\\
\vartheta_\delta w_\delta\le\vartheta_\delta e^{-\lambda_0\vartheta_\delta}\le\dfrac{1}{\lambda_0}\le 1.
\end{cases}$$

联立有效粘性通量的定义 (3.4.3) 及估计 (3.4.34), (3.4.32) 成立. □

关键的压力函数先验估计由如下建立.

引理 3.4.9. 对任意 $T>0$、$\delta\in(0,1)$ 及 $p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$, 设 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, $\vartheta_\delta:=\rho_\delta+n_\delta$ 为密度和, 且 w_δ 为当 $t\in(0,T)$ 时问题 (3.4.21) 的解. 那么在定理 1.3.8 或者 1.3.10 的假设下, 对 $\zeta>0$, 存在一个充分小的常数 $\delta_1(\zeta)\in(0,1)$ 使得对 $t\in(0,T)$, $\delta\in(0,\delta_1(\zeta))$ 和一个待选取的 $k\ge1$, 以下估计成立:

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda(P_\delta(\rho_\delta,n_\delta))\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\\
&\le Ck^{p_0}\Big(\zeta+\int_0^t\big(L_{h,1}(A)+L_{h,1}(B)\big)d\tau\Big)\\
&\quad+C\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big((\rho_\delta^x)^\gamma+(\rho_\delta^x)^{\widetilde{\gamma}}+(n_\delta^x)^\alpha+(n_\delta^x)^{\widetilde{\alpha}}+1\big)w_\delta^x dxdyd\tau,
\end{aligned}\tag{3.4.35}$$

其中 (A,B)、$L_{h,1}(f)$、$\Lambda[f]$、f^x、$\overline{K}_h$、ς 以及 $\Psi_{\delta,k}$ 分别由 (1.3.24)、(3.4.17)、(3.4.18)$_1$、(3.4.18)$_2$、(3.4.18)$_3$、(3.4.19) 和 (3.4.33) 给出, $C>0$ 为一个与 δ、h、k 及 λ_0 无关的常数.

证明. 首先, 当 $\delta\to 0$ 时, 我们由 (3.4.13) 易知

$$\begin{cases}\rho_\delta - A\vartheta_\delta \to 0 \quad \text{a.e. } \mathbb{T}^d\times(0,T),\\ n_\delta - B\vartheta_\delta \to 0 \quad \text{a.e. } \mathbb{T}^d\times(0,T).\end{cases}$$

因而, 我们应用 Egorov 定理推断对任意常数 $\zeta>0$, 存在 $\delta_1(\zeta)\in(0,1)$ 以及 $\mathrm{Q}_{\zeta,T}\subset\mathbb{T}^d\times(0,T)$ 使得如下成立:

$$\begin{cases}|\mathbb{T}^d\times(0,T)/\mathrm{Q}_{\zeta,T}|\le\zeta,\\ |\rho_\delta - A\vartheta_\delta|+|n_\delta-B\vartheta_\delta|\le\zeta, \quad (x,t)\in\mathrm{Q}_{\zeta,T}, \quad \delta\in(0,\delta_1(\zeta)).\end{cases} \tag{3.4.36}$$

引入

$$\mathbb{Q}_{\zeta,t}=\big\{(x,y,\tau)\in\mathbb{T}^{2d}\times(0,t)\mid(x,\tau)\in\mathrm{Q}_{\zeta,t}\text{ 且 }(y,\tau)\in\mathrm{Q}_{\zeta,t}\big\}, \quad t\in[0,T].$$

由 (3.2.2)、(3.4.22)$_1$ 及 (3.4.36), 我们有

$$-\int_{\mathbb{T}^{2d}\times(0,t)/\mathbb{Q}_{\zeta,t}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda(P_\delta(\rho_\delta,n_\delta))\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\le Ck^{p_0}\zeta.$$

根据 (1.3.23), 压力部分可分解为

$$\begin{aligned}\Lambda(P_\delta(\rho_\delta,n_\delta))=&\,\delta(\vartheta_\delta^x)^{p_0}-\delta(\vartheta_\delta^y)^{p_0}\\ &+\mathbf{I}_{\vartheta_\delta^x\le\delta}P(\rho_\delta^x,n_\delta^x)-\mathbf{I}_{\vartheta_\delta^y\le\delta}P(\rho_\delta^y,n_\delta^y)\\ &+P(\rho_\delta^x,n_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)\\ &+P(A^y\vartheta_\delta^y,B^y\vartheta_\delta^y)-P(\rho_\delta^y,n_\delta^y)\\ &+P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)-P(A^y\vartheta_\delta^y,B^y\vartheta_\delta^y)\\ &+P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y).\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

等式 (3.4.37) 右侧逐项估计如下. 首先, 由 (3.4.20)$_1$ 以及 s^{p_0} 关于 $s\ge 0$ 的单调性, $(\vartheta_\delta^x)^{p_0}-(\vartheta_\delta^y)^{p_0}$ 和 $\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])$ 有相同的正负性. 将该事实与 (3.4.20)$_1$ 结合, 我们易证

$$\begin{aligned}&-\delta\int_{\mathbb{Q}_{\zeta,t}}\overline{K}_h(x-y)\big((\vartheta_\delta^x)^{p_0}-(\vartheta_\delta^y)^{p_0}\big)\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\\ &\le\delta\int_{\mathbb{Q}_{\zeta,t}}\overline{K}_h(x-y)\big|(\vartheta_\delta^x)^{p_0}-(\vartheta_\delta^y)^{p_0}\big|\big(-\frac{1}{2}\big|\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\big|(\vartheta_\delta^x+\vartheta_\delta^y)\\ &\quad+\big|\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])-\frac{1}{2}\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\vartheta_\delta]\big|\big)\mathbf{1}_{\vartheta_\delta^x\le k}\mathbf{1}_{\vartheta_\delta^y\le k}w_\delta^x dxdyd\tau\le 0.\end{aligned}$$

其次, 根据 (1.3.16)、(3.3.10)-(3.3.11)、(3.3.20)、(3.4.22)$_1$ 以及 (3.4.36), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{Q}_{\zeta,t}}\overline{K}_h(x-y)\big(\mathbf{I}_{\vartheta_\delta^x\le\delta}P(\rho_\delta^x,n_\delta^x)-\mathbf{I}_{\vartheta_\delta^y\le\delta}P(\rho_\delta^y,n_\delta^y)\big)Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\\
&\quad\le C\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])w_\delta^x dxdyd\tau,
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{Q}_{\zeta,t}}\overline{K}_h(x-y)\big(&P(\rho_\delta^x,n_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)\\
&+P(A^y\vartheta_\delta^y,B^y\vartheta_\delta^y)-P(\rho_\delta^y,n_\delta^y)\big)\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\le C(1+k^{p_0})\zeta.
\end{aligned}
$$

类似地, 我们有

$$
-\int_{\mathbb{Q}_{\zeta,t}}\overline{K}_h(x-y)P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)-P(A^y\vartheta_\delta^y,B^y\vartheta_\delta^y)\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\le Ck^{p_0}\big(L_{h,1}(A)+L_{h,1}(B)\big).
$$

为了控制 (3.4.37) 等式右侧关键的最后两项, 我们需要利用关于变量 x 方程 (3.4.21)$_1$ 中的阻尼形式, 其中关键在于消除变量 y 所带来的影响. 为此, 我们将分三个情形讨论:

- 情形 1: $\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big)\Lambda[\vartheta_\delta]\ge 0$.

若 $P(\rho,n)$ 关于密度 ρ 及 n 都是单调递增的, 则所有情形可归结为情形 1. 因为 $P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)$, $\Lambda[\vartheta_\delta]$ 和 $\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])$ 有相同的正负性, 我们利用 (3.4.20)$_1$ 可得

$$
\begin{aligned}
&-\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big)\Psi_{\delta,k}\\
&\quad\le\big|P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big|\Big(-\frac{1}{2}\big|\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\big|(\vartheta_\delta^x+\vartheta_\delta^y)\\
&\qquad+\big|\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])-\frac{1}{2}\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\Lambda[\vartheta_\delta]\big|\Big)\le 0,\quad (x,y,\tau)\in\mathbb{Q}_{\zeta,t}.
\end{aligned}
$$

- 情形 2: $\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big)\Lambda[\vartheta_\delta]<0$ 且 $\vartheta_\delta^y\le 2\vartheta_\delta^x$.

根据 (1.3.16)、(3.3.11)、(3.3.20) 及 (3.4.36)$_2$, 我们通过计算可证

$$
\begin{aligned}
&-\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big)\Psi_{\delta,k}\\
&\quad\le C\big((A^x\vartheta_\delta^x+A^x\vartheta_\delta^y)^{\widetilde{\gamma}-1}+1\big)A^x|\Lambda[\vartheta_\delta]|\big(\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y+\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big)w_\delta^x\\
&\qquad+C\big((B^x\vartheta_\delta^x+B^x\vartheta_\delta^y)^{\widetilde{\alpha}-1}+1\big)B^x|\Lambda[\vartheta_\delta]|\big(\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\vartheta_\delta^y+\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big)w_\delta^x\\
&\quad\le C\big((\rho_\delta^x+\zeta)^{\widetilde{\gamma}}+\rho_\delta^x+\zeta+(n_\delta^x+\zeta)^{\widetilde{\alpha}}+n_\delta^x+\zeta\big)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])w_\delta^x,\quad (x,y,\tau)\in\mathbb{Q}_{\zeta,t}.
\end{aligned}
$$

- 情形 3: $\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big)\Lambda[\vartheta_\delta]<0$ 且 $\vartheta_\delta^y>2\vartheta_\delta^x$.

在此情形下, 我们易证以下事实:

$$\begin{cases}|\Lambda[\vartheta_\delta]|=\vartheta_\delta^y-\vartheta_\delta^x>\vartheta_\delta^x\geq 0, & \varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])<0,\\ \vartheta_\delta^y=|\Lambda[\vartheta_\delta]|+\vartheta_\delta^x<2|\Lambda[\vartheta_\delta]|, & P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)>P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y).\end{cases}$$

从而, 我们有

$$\begin{aligned}&-\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big)\Psi_{\delta,k}\\ &\quad=\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big)\big(\big|\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\big|\vartheta_\delta^y-\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big)w_\delta^x\\ &\quad\leq\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)+C\big)\big(2\big|\varsigma'(\Lambda[\vartheta_\delta])\big|\big|\Lambda[\vartheta_\delta]\big|+\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])\big)w_\delta^x\\ &\quad\leq C\big((\rho_\delta^x+\zeta)^\gamma+(n_\delta^x+\zeta)^\alpha+1\big)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])w_\delta^x,\quad (x,y,\tau)\in\mathbb{Q}_{\zeta,t}.\end{aligned}$$

我们联立上述三个情形得到

$$\begin{aligned}&-\int_{\mathbb{Q}_{\zeta,t}}\overline{K}_h(x-y)\big(P(A^x\vartheta_\delta^x,B^x\vartheta_\delta^x)-P(A^x\vartheta_\delta^y,B^x\vartheta_\delta^y)\big)\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\\ &\quad\leq C\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\big((\rho_\delta^x)^\gamma+(\rho_\delta^x)^{\widetilde{\gamma}}+(n_\delta^x)^\alpha+(n_\delta^x)^{\widetilde{\alpha}}+1\big)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])w_\delta^xdxdyd\tau.\end{aligned}$$

将上面的估计代入 (3.4.37), 我们证得 (3.4.35). 引理 3.4.9 证毕. □

最后, 我们利用动量方程 (3.3.1) 的结构以及 Riesz 算子 $R_i=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\partial_i$ 的交换子估计 (3.5.11)-(3.5.12) 来估计有效粘性通量部分.

引理 3.4.10. 对任意 $T>0$、$\delta\in(0,1)$ 及 $p_0>\gamma+\widetilde{\gamma}+\alpha+\widetilde{\alpha}+1$, 设 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, $\vartheta_\delta:=\rho_\delta+n_\delta$ 为密度和, 且 w_δ 为当 $t\in(0,T)$ 时问题 (3.4.21) 的解. 那么在定理 1.3.8 或者 1.3.10 的假设下, 对 $t\in(0,T)$ 以及待定的常数 $k\geq 1$, 以下估计成立:

$$\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda(F_\delta)\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\leq\frac{C\lambda_0k^{p_0}}{|\log h|^{\frac{1}{2}\min\{\frac{1}{2},\frac{2\gamma_0-d}{\gamma_0+d}\}}},\tag{3.4.38}$$

其中 $\gamma_0:=\min\{\gamma,\alpha\}$, F_δ、$\Lambda[f]$、f^x、$\overline{K}_h$ 及 $\Psi_{\delta,k}$ 分别由 (3.4.3)、$(3.4.18)_1$、$(3.4.18)_2$、$(3.4.18)_3$ 及 (3.4.33) 给出, $C>0$ 为一个与 δ、h、k 及 λ_0 无关的常数.

证明. 我们对 $(3.4.21)_1$ 及 (3.4.25) 使用重整化解技术可知

$$(\Psi_{\delta,k})_t+\operatorname{div}_x(\Psi_{\delta,k}u_\delta^x)+\operatorname{div}_y(\Psi_{\delta,k}u_\delta^y)=R_{\delta,k}\quad\text{在分布意义下成立,}\tag{3.4.39}$$

此处

$$R_{\delta,k}:=(\Psi_{\delta,k}-\partial_{\vartheta_\delta^x}\Psi_{\delta,k})\operatorname{div}_xu_\delta^x+(\Psi_{\delta,k}-\partial_{\vartheta_\delta^y}\Psi_{\delta,k})\operatorname{div}_yu_\delta^y-\lambda_0\partial_{w_\delta^x}\Psi_{\delta,k}\Xi_\delta^xw_\delta^x.$$

根据 $(3.4.21)_2$ 及 $(3.4.22)_1$, $\Psi_{\delta,k}$ 及 $R_{\delta,k}$ 满足

$$\begin{cases}\|\Psi_{\delta,k}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{T}^{2d}))}\le Ck,\\ \|R_{\delta,k}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{T}^{2d}))}\le C\lambda_0 k^{p_0}\big(|\mathrm{div}_x u_\delta^x|+|\mathrm{div}_y u_\delta^y|+M|\nabla_x u_\delta^x|+1\big),\end{cases}\tag{3.4.40}$$

其中 $C>0$ 与 δ,k 及 λ_0 无关, 极大函数算子 $M:L^p(\mathbb{T}^d)\to L^p(\mathbb{T}^d)$ $(p\in[1,\infty))$ 由 (3.5.7) 定义. 从 (3.4.4), 我们可知

$$\Lambda(F_\delta)=\Lambda((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)_t+\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta\otimes u_\delta)).\tag{3.4.41}$$

利用 (3.4.39) 和 (3.4.41) 并且在 $\mathbb{T}^{2d}\times[0,t]$ 上分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda(F_\delta)\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\\ &\quad=\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]\Psi_{\delta,k}dxdy\Big|_0^t\\ &\qquad-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]R_{\delta,k}dxdyd\tau\\ &\qquad-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\nabla\overline{K}_h(x-y)\Lambda[u_\delta]\cdot\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\\ &\qquad-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j,R_iR_j](\vartheta_\delta u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau,\end{aligned}\tag{3.4.42}$$

其中 $R_i:=(-\Delta)^{-\frac12}\partial_i$ 为 Riesz 算子, $[A,B]=AB-BA$ 为交换子.

我们首先估计 (3.4.42) 等式右侧第一项. 我们从 (3.4.7)、(3.5.3) 及算子 $\nabla(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}$ 的有界性可知

$$\begin{aligned}&L_{h,p}\big((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)\big)\\ &\quad\le C\Big(\frac{1}{|\log h|^{\frac12}}+\frac{1}{|\log h|^{pd\min\{0,\frac1p-\frac{\gamma_0+1}{2\gamma_0}\}+p}}\Big),\quad p\in[1,\frac{2\gamma_0 d(\gamma_0+1)}{d(\gamma_0+1)-2\gamma_0}).\end{aligned}\tag{3.4.43}$$

结合 (3.2.5)、(3.4.7)、$(3.4.40)_2$ 以及 (3.4.43) 可以推断

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]\Psi_{\delta,k}dxdy\Big|_0^t\\ &\quad\le Ck\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}L_{h,1}\big((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)\big)\\ &\qquad+Ck\,L_{h,1}\big((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,((\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})u_{0,\delta})\big)\le\frac{Ck}{|\log h|^{\frac12}}.\end{aligned}\tag{3.4.44}$$

进一步, 我们利用 (3.3.25)、(3.4.7)、(3.4.40)$_2$ 及 (3.4.43) 以证明

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]R_{\delta,k}dxdyd\tau\\
&\leq Ck^{p_0}\lambda_0\Big(\|\nabla u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}L_{h,2}\big((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)\big)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}L_{h,1}\big((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)\big)\Big)\leq\frac{Ck^{p_0}\lambda_0}{|\log h|^{\min\{\frac{1}{4},\frac{2\gamma_0-d}{2\gamma_0}\}}}.
\end{aligned}\tag{3.4.45}$$

类似地, 由于 $\gamma_0>\frac{d}{2}$, $(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)$ 在 $L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^d))$ 中是关于 $\delta\in(0,1)$ 一致有界的, 我们可证

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\nabla\overline{K}_h(x-y)\Lambda[u_\delta]\cdot\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\\
&\leq Ck\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)|\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]|M|\nabla_x u_\delta^x|dxdyd\tau+\frac{Ck}{|\log h|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}\tag{3.4.46}$$

又由 (3.3.25)、(3.4.7) 及 (3.4.43), 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)|\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]|M|\nabla_x u_\delta^x|dxdyd\tau\\
&\leq C\|M|\nabla u_\delta|\|_{L^2(0,T;L^2)}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}L_{h,2}\big((-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)\big)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{C}{|\log h|^{\min\{\frac{1}{4},\frac{2\gamma_0-d}{2\gamma_0}\}}}.
\end{aligned}\tag{3.4.47}$$

联立 (3.4.46)-(3.4.47), 我们证得

$$\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\nabla\overline{K}_h(x-y)\Lambda[u_\delta]\cdot\Lambda[(-\Delta)^{-1}\mathrm{div}\,(\vartheta_\delta u_\delta)]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\leq\frac{Ck}{|\log h|^{\min\{\frac{1}{4},\frac{2\gamma_0-d}{2\gamma_0}\}}}.\tag{3.4.48}$$

我们估计等式 (3.4.42) 右侧的最后一项. 受到文献 [165] 的启发, 注意到交换自估计 (3.5.12) 可以给出

$$\|\nabla[u_\delta^j,R_iR_j](\vartheta_\delta u_\delta^i)(t)\|_{L^p}\leq C\|\nabla u_\delta^j(t)\|_{L^2}\|\vartheta_\delta u_\delta^i(t)\|_{L^q},\ \ \text{a.e. } t\in(0,T),\ \ 1\leq i,j\leq d,\tag{3.4.49}$$

这里 $p\in(1,\infty)$ 及 $q\in(2,\infty)$ 满足 $\frac{1}{2}+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}<1$. 值得强调的是, (3.4.49) 无法直接对情形 $\gamma_0\leq d$ 使用. 例如, 对三维时, $\vartheta_\delta u_\delta$ 在 $L^2(0,T;L^{\frac{6\gamma_0}{6+\gamma_0}}(\mathbb{T}^d))$ 中一致有界, 但当 $\gamma_0\leq 3$ 时 $\frac{1}{2}+\frac{6+\gamma_0}{6\gamma_0}\geq 1$.

为此, 对待选取的 $L \geq 1$, 我们将 (3.4.42) 作如下分解:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j, R_iR_j](\vartheta_\delta u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau \\
&\quad = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j, R_iR_j](\vartheta_\delta \mathbf{1}_{\vartheta_\delta \leq L} u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau \\
&\qquad + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j, R_iR_j](\vartheta_\delta \mathbf{1}_{\vartheta_\delta \geq L} u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau.
\end{aligned} \tag{3.4.50}
$$

对 (3.4.50), 我们分别讨论情形 $d \geq 3$ 及情形 $d = 2$.

- 情形 1: $d \geq 3$.

使用 $(3.4.40)_1$、(3.5.3)、(3.5.12) 及 $H^1(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{T}^d)$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j, R_iR_j](\vartheta_\delta \mathbf{1}_{\vartheta_\delta \leq L} u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau \\
&\quad \leq \frac{Ck}{|\log h|^{\frac{1}{2}}}\big(1+\|\nabla u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)}\|\vartheta_\delta \mathbf{1}_{\vartheta_\delta \leq L} u_\delta\|_{L^2(0,T;L^{\frac{2d}{d-2}})}\big) \leq \frac{CkL}{|\log h|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

同时, 我们可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{T}^{2d}} \overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j, R_iR_j](\vartheta_\delta \mathbf{1}_{\vartheta_\delta \geq L} u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau \\
&\quad \leq Ck\|\vartheta_\delta \mathbf{1}_{\vartheta_\delta \geq L}\|_{L^\infty(0,T;L^{p_3})}\|u_\delta\|^2_{L^2(0,T;L^{\frac{2d}{d-2}})} \\
&\quad \leq \frac{Ck\|\vartheta_\delta\|^{\frac{\gamma_0}{p_3}}_{L^\infty(0,T;L^{\gamma_0})}\|u_\delta\|^2_{L^2(0,T;H^1)}}{L^{\frac{1}{d}(\gamma_0-\frac{d}{2})}} \leq \frac{Ck}{L^{\frac{1}{d}(\gamma_0-\frac{d}{2})}},
\end{aligned}
$$

其中常数 $p_2 \in (1,\infty)$ 及 $p_3 \in (\frac{d}{2}, \gamma_0)$ 由如下关系给出:

$$
\frac{1}{p_2} + \frac{d-2}{d} = \frac{1}{p_2}, \qquad \frac{\gamma_0 - p_3}{p_3} = \frac{1}{d}(\gamma_0 - \frac{d}{2}).
$$

- 情形 2: $d = 2$.

由 $(3.4.40)_1$、(3.5.3)、(3.5.12) 及 $H^1(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^2)$ $(p \in [1,\infty))$, 我们有如下估计:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbb{T}^4} \overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j, R_iR_j](\vartheta_\delta \mathbf{1}_{\vartheta_\delta \leq L} u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau \\
&\quad \leq \frac{Ck}{|\log h|^{\frac{1}{2}}}\big(1+\|\nabla u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2)}\|\vartheta_\delta \mathbf{1}_{\vartheta_\delta \leq L} u_\delta\|_{L^2(0,T;L^4)}\big) \\
&\quad \leq \frac{Ck(1+L\|u_\delta\|^2_{L^2(0,T;H^1)})}{|\log h|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{CkL}{|\log h|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

对(3.4.50) 等式右侧第二项, 我们利用 $(3.4.40)_1$、(3.5.3)、(3.5.11) 及 $H^1(\mathbb{T}^2)\hookrightarrow BMO(\mathbb{T}^2)\hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^2)$ $(p\in[1,\infty))$ 得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\mathbb{T}^4}\overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j,R_iR_j](\vartheta_\delta\mathbf{1}_{\vartheta_\delta\geq L}u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\\&\quad\leq Ck\|R_iR_j(\vartheta_\delta\mathbf{1}_{\vartheta_\delta\leq L}u_\delta^iu_\delta^j)-u_\delta^jR_iR_j(\mathbf{1}_{\vartheta_\delta\leq L}\vartheta_\delta u_\delta^i)\|_{L^1(0,T;L^{\frac{4\gamma_0}{3\gamma_0+1}})}\\&\quad\leq Ck\|u_\delta\|_{L^2(0,T;H^1)}\|\vartheta_\delta\mathbf{1}_{\vartheta_\delta\geq L}\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2\gamma_0}{\gamma_0+1}})}\|u_\delta\|_{L^2(0,T;L^{\frac{4\gamma_0}{\gamma_0-1}})}\\&\quad\leq\frac{Ck}{L^{\frac{\gamma_0-1}{2}}}\|u_\delta\|_{L^2(0,T;H^1)}^2\|\vartheta_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^{\gamma_0})}^{\frac{\gamma_0+1}{2}}\leq\frac{Ck}{L^{\frac{\gamma_0-1}{2}}}\end{aligned}$$

将上述两个情形联立后代入 (3.4.50), 对 $d\geq 2$, 我们有

$$\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j,R_iR_j](\vartheta_\delta u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\leq Ck\Big(\frac{L}{|\log h|^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{L^{\frac{1}{d}(\gamma_0-\frac{d}{2})}}\Big).\tag{3.4.51}$$

在 (3.4.51) 中选取 $L=|\log h|^{\frac{1}{2(\frac{\gamma_0}{d}+\frac{1}{2})}}$, 我们证明

$$\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\Lambda\big[[u_\delta^j,R_iR_j](\vartheta_\delta u_\delta^i)\big]\Psi_{\delta,k}dxdyd\tau\leq\frac{Ck}{|\log h|^{\frac{1}{2}\min\{1,\frac{2\gamma_0-d}{2\gamma_0+d}\}}}.\tag{3.4.52}$$

我们将上述估计 (3.4.44)-(3.4.45)、(3.4.48) 及 (3.4.52) 代入 (3.4.42), 我们得到 (3.4.38). 引理 3.4.10 证毕. □

注记 3.4.11. 引理 3.4.10 关于有效粘性通量的紧性估计对所有大于 $\frac{d}{2}$ 的绝热常数都成立.

3.4.3 定理 1.3.8 和1.3.10 的证明

对任意 $\delta\in(0,1)$ 及时间 $T>0$, 设 $(\rho_\delta,n_\delta,(\rho_\delta+n_\delta)u_\delta)$ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (3.3.1) 由命题 3.3.5 给出的弱解, $\vartheta_\delta:=\rho_\delta+n_\delta$ 为密度和, w_δ 为当 $t\in(0,T)$ 时初值问题 (3.4.21) 的弱解, 且 $(\rho,u,(\rho+n)u)$ 为由引理 3.4.4 得到的极限. 基于引理 3.4.7-3.4.10 中的估计, 对任意 $\zeta>0$, 存在一个常数 $\delta_1(\zeta)\in(0,1)$ 使得对 $\delta\in(0,\delta_1(\zeta))$、$h\in(0,h_0)$、$k\geq 1$ 及 $\lambda_0\geq 1$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])(w_\delta^x+w_\delta^y)dxdy\\&\quad\leq\frac{C}{k}+C\lambda_0k^{p_0}h_1(\delta,\zeta,h)+(C-2\lambda_0)\int_0^t\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)|\Lambda[\vartheta_\delta]|\Xi_\delta^xw_\delta^xdxdyd\tau,\end{aligned}$$

其中 $C>0$ 为一个与 δ、h、ζ 及 λ_0 无关的常数, $h_1(\delta,\zeta,h)\in(0,1)$ 由如下给出:

$$\begin{aligned}h_1(\delta,\zeta,h):=L_{h,1}(\rho_{0,\delta}+n_{0,\delta})+\frac{1}{|\log h|^{\frac{1}{2}\min\{\frac{1}{2},\frac{2\gamma_0-d}{\gamma_0+d}\}}}+\zeta\\ +\int_0^T\big(L_{h,1}(A)+L_{h,1}(B)\big)dt,\quad \gamma_0:=\min\{\gamma,\alpha\}.\end{aligned}$$

选取

$$\lambda_0=\frac{C}{2}+1,\qquad k=h_1(\delta,\zeta,h)^{-\frac{1}{p_0+1}},$$

我们有

$$\int_{\mathbb{T}^{2d}}\overline{K}_h(x-y)\varsigma(\Lambda[\vartheta_\delta])(w_\delta^x+w_\delta^y)dxdy\le Ch_1(\delta,\zeta,h)^{\frac{1}{p_0+1}}.$$

我们将上式和 (3.4.23) 合并后证明

$$\big(L_{h,1}(\vartheta_\delta)\big)^2\le\frac{C}{\log(1+|\log\sigma_*|)}+\frac{Ch_1(\delta,\zeta,h)^{\frac{1}{p_0+1}}}{\sigma_*}.$$

因而, 我们在上式中选取 $\sigma_*=h_1(\delta,\zeta,h)^{\frac{1}{2(p_0+1)}}$ 得到

$$\big(L_{h,1}(\vartheta_\delta)\big)^2\le\frac{C}{\log(1+|\log h_1(\delta,\zeta,h)|)}+h_1(\delta,\zeta,h)^{\frac{1}{2(p_0+1)}}.$$

由于 $\zeta>0$ 是任意小的, 我们证得

$$\lim_{h\to0}\limsup_{\delta\to0}\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}L_{h,1}(\vartheta_\delta)=0. \tag{3.4.53}$$

根据 (3.4.14)、(3.4.53) 以及引理 3.5.3 并注意到 $(\vartheta_\delta)_t$ 在 $L^\infty(0,T;W^{-1,\frac{2\gamma_0}{\gamma_0+1}}(\mathbb{T}^d))$ 中关于 $\delta\in(0,1)$ 一致有界, 在取子列的意义下, 我们得到

$$(\rho_\delta,n_\delta)\to(\rho,n)\quad 于\ L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d))\times L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)),\quad \delta\to0. \tag{3.4.54}$$

将 (3.4.54) 和引理 3.4.1 及 Egorov 定理联立, 可证当 $\delta\to0$ 时, 我们有

$$P(\rho_\delta,n_\delta)\to P(\rho,n)\quad 于\ L^1(0,T;L^1(\mathbb{T}^d)). \tag{3.4.55}$$

由 (3.4.12) 及 (3.4.55), 易证 $(\rho,n,(\rho+n)u)$ 满足定义 1.3.7 中的特性 (1)-(4). 定理 1.3.8 和 1.3.10 证毕.

3.5 附录

在该附录中, 我们给出一些密度紧性估计所需的技术性引理.

引理 3.5.1. 假设 f_δ $(\delta > 0)$ 在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ $(p \in [1,\infty))$ 中一致有界. 则对 $h \in (0,h_0)$, 以下估计成立:

$$\sup_{|z|<h} \int_{\mathbb{T}^d} |f_\delta(x+z) - f_\delta(x)|^p dx \le C\Big(\frac{\|f_\delta\|_{L^1}^p}{|\log h|^p} + L_{h^{\frac{1}{d+1}},p}(f_\delta) \Big), \tag{3.5.1}$$

$$L_{h,p}(f_\delta) \le C\Big(\frac{\|f_\delta\|_{L^p}^p}{|\log h|^{\frac{1}{2}}} + \sup_{|z|<\frac{1}{|\log h|}} \int_{\mathbb{T}^d} |f_\delta(x+z) - f_\delta(x)|^p dx \Big), \tag{3.5.2}$$

其中 $L_{h,p}(f)$ 由 (3.4.17) 定义, $C > 0$ 为与 h 及 δ 无关的常数.

进一步, 若 f_δ 在 $W^{1,q}(\mathbb{T}^d)$ $(q \in [1,d))$ 中一致有界, 则 $L_{h,p}(f_\delta)$ 满足

$$L_{h,p}(f_\delta) \le C\Big(\frac{\|f_\delta\|_{L^p}^p}{|\log h|^{\frac{1}{2}}} + \frac{\|\nabla f_\delta\|_{L^q}^p}{|\log h|^{pd\min\{0,\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\}+p}} \Big), \quad p \in [1, \frac{qd}{d-q}). \tag{3.5.3}$$

证明. 首先, 对 $|z| < h$ 及 $\sigma \in (0,1)$, 由 (3.4.16) 及 $\|\nabla K_\sigma\|_{L^\infty} \le \frac{C}{\sigma^{d+1}}$, 我们得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d} |f_\delta(x+z) - f_\delta(x)|^p dx \\
&\quad \le C \int_{\mathbb{T}^d} \Big| \frac{K_\sigma}{\|K_h\|_{L^1}} * f_\delta(x+z) - \frac{K_\sigma}{\|K_h\|_{L^1}} * f_\delta(x) \Big|^p dx + C \int_{\mathbb{T}^d} \Big| f_\delta(x) - \frac{K_\sigma}{\|K_h\|_{L^1}} * f_\delta(x) \Big|^p dx \\
&\quad \le \frac{Ch^p \|f_\delta\|_{L^1}^p}{\sigma^{p(d+1)} |\log \sigma|^p} + L_{\sigma,p}(f_\delta).
\end{aligned}$$

选取 $\sigma = h^{\frac{1}{d+1}}$, 我们得到 (3.5.1).

为了证明 (3.5.2), 我们分解 $L_{h,p}(f_\delta)$ 为如下三部分:

$$L_{h,p}(f_\delta) = \Big(\int_{\{|x-y|\ge\frac{1}{2}\}} + \int_{\{\frac{1}{|\log h|}\le|x-y|<\frac{1}{2}\}} + \int_{\{0\le|x-y|<\frac{1}{|\log h|}\}} \Big) \overline{K}_h(x-y) |f_\delta(x) - f_\delta(y)|^p dxdy.$$

由于 (3.4.16) 及当 $|x| \ge \frac{1}{2}$ 时 $K_h(x) \le C$, 我们有

$$\int_{\{|x-y|\ge\frac{1}{2}\}} \overline{K}_h(x-y) |f_\delta(x) - f_\delta(y)|^p dxdy \le \frac{C\|f_\delta\|_{L^p}^p}{|\log h|}.$$

利用 $K_h(z) \le \frac{C}{|z|^d}$ 及 $|\log h|^{-\frac{1}{2}} \le e^{-\frac{1}{2}(n+1)}$ $(0 \le n \le \log|\log h| - 1)$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\{\frac{1}{|\log h|} \le |x-y| < \frac{1}{2}\}} \overline{K}_h(x-y)|f_\delta(x) - f_\delta(y)|^p dxdy \\
&\le C \sum_{n=0}^{\log|\log h|-1} \frac{1}{|\log h|} \int_{\{\frac{1}{2}e^{-n-1} \le |z| \le \frac{1}{2}e^{-n}\}} e^{nd} \int_{\mathbb{T}^d} |f_\delta(x) - f_\delta(x-z)|^p dxdz \\
&\le \frac{C\|f_\delta\|_{L^p}^p}{|\log h|^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}} \le \frac{C\|f_\delta\|_{L^p}^p}{|\log h|^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

此外, 我们易知

$$\int_{\{0 \le |x-y| < \frac{1}{|\log h|}\}} \overline{K}_h(x-y)|f_\delta(x) - f_\delta(y)|^p dxdy \le \sup_{|z| < \frac{1}{|\log h|}} \int_{\mathbb{T}^d} |f_\delta(x+z) - f_\delta(x)|^p dx.$$

联立上述估计, 我们证明 (3.5.2).

最后, 对 $|z| < h$, 由 Sobolev 不等式及

$$f_\delta(x+z) - f_\delta(x) = \int_0^1 z \cdot \nabla f_\delta(x + \bar{\tau} z) d\bar{\tau},$$

成立

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^d} |f_\delta(x+z) - f_\delta(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le |z| \|\nabla f_\delta\|_{L^q}, \quad p \in [1, q],$$

和

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_{\mathbb{T}^d} |f_\delta(x+z) - f_\delta(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C|z|^{1-\theta} \|f_\delta - \int_{\mathbb{T}^d} f dx\|_{L^{\frac{qd}{d-q}}}^{\theta} \|\nabla f_\delta\|_{L^q}^{1-\theta} \le C|z|^{1-\theta} \|\nabla f_\delta\|_{L^q}, \quad p \in (q, \frac{qd}{d-q}),
\end{aligned}$$

其中常数 $\theta \in (0,1)$ 满足 $\frac{1}{p} = \frac{d-q}{qd}\theta + \frac{1}{q}(1-\theta)$. 从而, (3.5.3) 可由 (3.5.2) 及上面两个估计得到. 引理 3.5.1 证毕. □

根据引理 3.5.1 及 Riesz-Fréchet-Kolmogorov 紧性标准 (参见 [22, 111 页]), 我们有如下紧性标准.

引理 3.5.2. *假设 f_δ $(\delta > 0)$ 在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ $(p \in [1, \infty))$ 中一致有界. 则 f_δ 在 $L^p(\mathbb{T}^d)$ 中是强紧的当且仅当*

$$\lim_{h \to 0} \limsup_{\delta \to 0} L_{h,p}(f_\delta) = 0, \tag{3.5.4}$$

其中 $L_{h,p}(f_\delta)$ 由 (3.4.17) 定义.

进一步, 我们证明如下 Lions-Aubin 型时-空紧性标准.

引理 3.5.3. *对时间 $T>0$, 假设 f_δ $(\delta>0)$ 在 $L^p(0,T;L^p(\mathbb{T}^d))$ $(p\in[1,\infty))$ 中一致有界, $(f_\delta)_t$ 在 $L^q(0,T;W^{-m,1}(\mathbb{T}^d))$ $(q>1,\ m\geq 0)$ 中一致有界. 则 f_δ 在 $L^p(0,T;L^p(\mathbb{T}^d))$ 中是强紧的当且仅当*

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{\delta\to 0}\int_0^T L_{h,p}(f_\delta)dt=0, \tag{3.5.5}$$

其中 $L_{h,p}(f_\delta)$ 由 (3.4.17) 定义.

证明. 对 $|z|<h<\frac{T}{2}$, 我们有如下分解:

$$\begin{aligned}
&\|f_\delta(x+z,t+h)-f_\delta(x,t)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)}\\
&\quad\leq \|f_\delta(x+z,t+h)-f_\delta(x,t+h)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)}\\
&\qquad+\|f_\delta * J_{\delta'}(x,t+h)-f_\delta * J_{\delta'}(x,t)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)}\\
&\qquad+\|f_\delta(x,t+h)-f_\delta * J_{\delta'}(x,t+h)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)}+\|f_\delta(x,t)-f_\delta * J_{\delta'}(x,t)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)},
\end{aligned}$$

其中 $J_{\delta'}\in C_c^\infty(\mathbb{T}^d)$ 为 the Friedrichs 磨光核. 由 (3.5.1) 及 (3.5.4), 我们得

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{\delta\to 0}\|f_\delta(x+z,t+h)-f_\delta(x,t+h)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)}=0,$$

此外, 我们易证

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\limsup_{\delta\to 0}\|f_\delta * J_{\delta'}(x,t+h)-f_\delta * J_{\delta'}(x,t)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)}\\
&\quad\leq \lim_{h\to 0}\limsup_{\delta\to 0}h^{1-\frac{1}{q}}\|(f_\delta * J_{\delta'})_t\|_{L^q(0,T;L^p)}=0,
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta'\to 0}\lim_{h\to 0}\limsup_{\delta\to 0}(\|f_\delta(x,t+h)-f_\delta * J_{\delta'}(x,t+h)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)}+\|f_\delta(x,t)-f_\delta * J_{\delta'}(x,t)\|_{L^p(0,\frac{T}{2};L^p)})\\
&\quad\leq 2\lim_{\delta'\to 0}\limsup_{\delta\to 0}\sup_{|z|<\delta'}\|f_\delta(x+z,t)-f_\delta(x,t)\|_{L^p(0,T;L^p)}=0.
\end{aligned}$$

上述估计以及 Riesz-Fréchet-Kolmogorov 紧性标准可推出 f_δ 在 $L^p(0,\frac{T}{2};L^p(\mathbb{T}^d))$ 中是强紧的. 我们对 $\tilde{f}_\delta(x,t):=f_\delta(x,T-t)$ 重复以上过程, 可证 f_δ 在 $L^p(\frac{T}{2},T;L^p(\mathbb{T}^d))$ 中的强紧性. 从而, (3.5.5) 成立. □

如下特性用于证明引理 3.4.8 及 3.4.10.

引理 3.5.4 ([13, 30]). *对 $f\in H^1(\mathbb{T}^d)$, 以下不等式成立:*

$$|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|\big(D_{|x-y|}f(x)+D_{|x-y|}f(y)\big), \tag{3.5.6}$$

其中 $C>0$ 为一个仅依赖于 d 的函数, $D_r f$ 为

$$D_r f(x) := \frac{1}{r}\int_{|z|\le r}\frac{|\nabla f(x+z)|}{|z|^{d-1}}dz. \tag{3.5.7}$$

并且, D_r 满足

$$D_r f(x) \le CM|\nabla f|(x), \tag{3.5.8}$$

其中 $M: L^p(\mathbb{T}^d)\to L^p(\mathbb{T}^d)$ $(p\in[1,\infty))$ 为极大函数算子:

$$Mf(x) := \sup_{r\in(0,1)}\frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} f(x+z)dz. \tag{3.5.9}$$

此外, 以下估计成立:

$$\int_{\mathbb{T}^d} K_h(z)\|D_{|z|}f - D_{|z|}f(\cdot+z)\|_{L^2}dz \le C\|f\|_{H^1}|\log h|^{\frac{1}{2}}, \tag{3.5.10}$$

其中周期对称核 K_h 由 (3.4.15) 给出.

我们介绍 Riesz 算子 $R_i := (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\partial_i$ 的交换子估计. 该估计首先由 Coifman-Rochberg-Weiss [57] 及 Coifman-Meyer [56] 证得, 并且被 Lions [165] 应用于证明等熵可压缩 NS 方程组 (1.1.2) 弱解的整体存在性.

引理 3.5.5 ([56,57])**.** 对 $f\in BMO(\mathbb{T}^d)$ 及 $g\in L^p(\mathbb{T}^d)$ $(p\in(1,\infty))$, 以下交换子估计成立:

$$\|[R_iR_j, f]g\|_{L^p} \le C\|f\|_{BMO}\|g\|_{L^p}, \quad f\in BMO(\mathbb{T}^d), \tag{3.5.11}$$

其中 $[A,B]=AB-BA$ 为交换子, $BMO(\mathbb{T}^d)$ 为有界平均振荡空间, $C>0$ 为一个仅依赖于 p 及 d 的常数.

进一步, 设 $q_i\in(1,\infty)$ $(i=1,2,3)$ 满足 $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}$. 则对 $f\in W^{1,q_2}(\mathbb{T}^d)$ 及 $g\in L^{q_3}(\mathbb{T}^d)$, 以下交换子估计成立:

$$\|\nabla[R_iR_j, f]g]\|_{L^{q_1}} \le C_{q_1,q_2}\|\nabla f\|_{L^{q_2}}\|g\|_{L^{q_3}}, \tag{3.5.12}$$

其中常数 $C_{q_1,q_2}>0$ 仅依赖于 q_i $(i=1,2)$ 及 d.

第四章 高维 Navier-Stokes-Euler 方程组在临界 Besov 空间中的整体强解

4.1 引言

在本章, 我们证明高维可压缩 NS-Euler 方程组柯西问题 (1.3.25) 整体强解在临界 Besov 空间中的存在性和唯一性, 并建立该整体解到其平衡态的最优时间收敛速率, 即定理 1.3.14、1.3.16 和 1.3.18. 引入扰动变量

$$a := \rho - \bar{\rho}, \quad a_0 := \rho_0 - \bar{\rho}, \quad b := \log n - \log \bar{n}, \quad b_0 := \log n_0 - \log \bar{n},$$

我们改写柯西问题 (1.3.25) 如下:

$$\begin{cases} a_t + \operatorname{div} u = -\operatorname{div}(au), \\ u_t + \dfrac{P'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}} \nabla a - \dfrac{\mu}{\bar{\rho}} \Delta u - \dfrac{\mu+\lambda}{\bar{\rho}} \nabla \operatorname{div} u + \dfrac{\kappa \bar{n}}{\bar{\rho}}(u-w) = -u \cdot \nabla u + h, \\ b_t + \operatorname{div} w = -w \cdot \nabla b, \\ w_t + \nabla b + \kappa(w-u) = -w \cdot \nabla w, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ (a,u,b,w)(x,0) = (a_0,u_0,b_0,w_0)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ (a_0,u_0,b_0,w_0)(x) \to (0,0,0,0), \qquad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

其中

$$\begin{cases} h = h(a,u,b,w) := h_1 \nabla a + h_2(\mu \Delta u + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u) + h_3(u-w), \\ h_1 = h_1(a) := -\dfrac{P'(\bar{\rho}+a)}{\bar{\rho}+a} + \dfrac{P'(\bar{\rho})}{\bar{\rho}}, \quad h_2 = h_2(a) := -\dfrac{1}{\bar{\rho}} \dfrac{a}{a+\bar{\rho}}, \\ h_3 = h_3(a,b) := \dfrac{\kappa}{\bar{\rho}}(e^b - \bar{n}) \dfrac{a}{a+\bar{\rho}} + \dfrac{\kappa \bar{n}}{\bar{\rho}} \dfrac{a}{a+\bar{\rho}} - \dfrac{\kappa}{\bar{\rho}}(e^b - \bar{n}). \end{cases} \tag{4.1.2}$$

为了阅读方便, 我们将定理 1.3.14、1.3.16 和 1.3.18 以扰动变量 (a,u,b,w) 的形式重新叙述如下.

定理 1.3.14. 对维数 $d\geq 2$, 如果初值 (a_0,u_0,b_0,w_0) 满足 $(a_0,u_0,b_0,w_0)\in \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}}\times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}\times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}+1}\times \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}+1}$ 以及

$$\hat{\delta}_1:=\|(a_0,u_0,b_0,w_0)^{\ell}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+\|(\nabla a_0,u_0)^h\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+\|(b_0,w_0)^h\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}\leq \delta_1, \tag{1.3.26}$$

其中 $\delta_1>0$ 为一个充分小的常数, 则柯西问题 (4.1.1) 存在唯一的强解 (a,u,b,w), 且 (a,u,b,w) 满足

$$\begin{cases} a\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}}),\\ u\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}-1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}+1}),\\ b\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}+1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}+1}),\\ w\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}+1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1,\frac{d}{2}+1}), \end{cases} \tag{1.3.27}$$

以及

$$\begin{aligned} &\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\|(\nabla a,u)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}+\|(b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\\ &\quad+\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}+\|a\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}+\|(u,b,w)\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\\ &\quad+\|u-w\|^{\ell}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\|u-w\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\leq C\hat{\delta}_1,\quad t>0, \end{aligned} \tag{1.3.28}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1, 4.5.2 和 4.5.4, $C>0$ 为一个与时间无关的常数.

定理 1.3.16. 对维数 $d\geq 2$, 在定理 1.3.14 的假设下, 令 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体强解. 若对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 初值 (a_0,u_0,b_0,w_0) 还满足 $(a_0,u_0,b_0,w_0)^{\ell}\in \dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$, 则对任意 $t\geq 1$, 该整体解 (a,u,b,w) 有如下最优衰减估计:

$$\begin{cases} \|(a,u,b,w)(t)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}, \qquad \sigma\in(\sigma_0,\dfrac{d}{2}-1],\\ \|a(t)\|^{h}_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}+\|(u,b,w)(t)\|^{h}_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)}, \end{cases} \tag{1.3.29}$$

并且相对速度 $u-w$ 满足

$$\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\leq C(1+t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)\}}. \tag{1.3.30}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1 和 4.5.4, $C>0$ 为一个与时间无关的常数.

若 $d\geq 3$ 及 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-2)$, 则相对速度 $u-w$ 进一步满足

$$\|(u-w)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)},\quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}-2]. \tag{1.3.31}$$

定理 1.3.18. 对维数 $d\geq 2$, 在定理 1.3.14 的假设下, 令 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体强解. 对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 存在一个充分小常数 $\delta_1^*>0$ 使得如果初值 (a_0,u_0,b_0,w_0) 还满足

$$\|(a_0,u_0,b_0,w_0)^{\ell}\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\leq\delta_1^*, \tag{1.3.32}$$

则对任意 $t\geq 1$, 该整体解 (a,u,b,w) 满足:

$$\begin{cases}\|(a,u,b,w)(t)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)},\quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}+1],\\ \|a(t)\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|(u,b,w)(t)\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-2\sigma_0-2\varepsilon_1)},\\ \|(u-w)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}},\\ \|(u-w)(t)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)},\quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}],\end{cases} \tag{1.3.33}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1 和 4.5.4, $\varepsilon_1\in(0,1)$ 为任意小的常数, $C>0$ 为一个与时间无关的常数.

我们回顾上述定理证明的主要困难和想法. 可压缩 NS-Euler 方程组 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 可看做带外力项 $-\kappa n(u-w)$ 的可压缩 NS 方程组 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 和带外力项 $\kappa n(u-w)$ 的可压缩 Euler 方程组 $(1.3.25)_3$-$(1.3.25)_4$ 相互耦合而成. 然而, 根据文献 [64] 中可压缩 Navier-Stokes 方程组在临界 Besov 空间中的整体存在性结果, 为了建立 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 中速度 u 的临界正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})$, 我们需要外力项 $-\kappa n(u-w)$ 中 w 的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$; 同时类似于文献 [61] 中关于带阻尼可压缩 Euler 方程组在临界 Besov 空间中的证明方法, 为了建立 $(1.3.25)_3$-$(1.3.25)_4$ 中速度 w 的临界正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1})$, 我们需要外力项 $\kappa n(u-w)$ 中 u 的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1,\frac{d}{2}+1}_{2,1})$. 然而, 上述对速度 w 在 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 中所要求的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 与其在 $(1.3.25)_1$-$(1.3.25)_2$ 中临界的正则性 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+1}_{2,1})$ 不匹配, 并且 u 也有类似的问题, 这造成了建立解一致先验估计的本质困难.

为了克服这些困难, 对于线性部分, 我们在频率截断意义下观察到 $u-w$ 的估计 (由拉力 (drag-force) 项给出) 和 u 的估计 (由粘性项给出) 揭示了

$$2^{2j}\|\dot{\Delta}_j u\|^2_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}\gtrsim\begin{cases}2^{2j}\|\dot{\Delta}_j w\|^2_{L^2}, & 若\ j\leq 0,\\ \|\dot{\Delta}_j w\|^2_{L^2}. & 若\ j\geq -1.\end{cases}$$

因而, 我们能够将 $(4.1.1)_1$-$(4.1.1)_2$ 和 $(4.1.1)_3$-$(4.1.1)_4$ 的耗散结构联立, 进而对 $(a,\nabla a,u,b,w)$ 建立低阶 $\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}$-估计. 然后, 利用粘性项给出 u 的高阶正则性, 我们在高频单独分析 $(4.1.1)_3$-$(4.1.1)_4$ 以得到 (b,w) 的高阶 $\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}$-估计. 值得强调的是, 我们建立了速度 u, w 的 $L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})$ 正则性而非其作为外力项一部分所需的 $L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 正则性.

然而, 对于非线性估计, $(4.1.1)_2$ 中的非线性项 $h_3(u-w)$ 会导致额外的困难. 事实上, 与其他非线性项不同的是, $h_3(u-w)$ 在空间 $L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 中不是尺度不变的. 为此, 我们观察到相对速度 $u-w$ 满足一个带阻尼的方程 (4.2.29), 并以此建立了相对速度 $u-w$ 在低频相比解更优的 $\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})$ 估计, 并将其结合解 (a,u,b,w) 的先验估计来控制 $h_3(u-w)$ 的 $L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})$ 范数, 最终封闭了解的一致先验估计 (参见小节 4.2.1-4.2.2).

当 $(a_0,u_0,b_0,w_0)^\ell$ 还在 Besov 空间 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 中有界时, 受到文献 [96,224] 的启发, 我们利用一个新的时间加权能量方法证明定理 1.3.16 中柯西问题 (1.3.25) 解的最优收敛速率 (1.3.29), 即对带时间权 t^θ 的能量作类似于整体存在性部分的先验估计, 并在加权能量和解的 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 正则性之间建立时-空插值不等式, 最终证明了该时间加权能量泛函由 $t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)}$ 所控制, 进而得到了解 (a,u,b,w) 在 (1.3.29) 中的最优时间衰减速率. 然后, 利用已得解的衰减估计和带阻尼方程 (4.2.29), 我们可知 $u-w$ 在低频对应于 $\nabla(a,u,b)$ 的衰减, 因而其中的一阶导数蕴含了 $u-w$ 比解的时间收敛速率快 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ (参见小节 4.3.2).

当 $(a_0,u_0,b_0,w_0)^\ell$ 还在 Besov 空间 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 中充分小时, 通过线性化方程组的半群估计、Duhamel 原理以及非线性项的二次时间加权估计, 我们证明定理 1.3.18 中柯西问题 (4.1.1) 解 (a,u,b,w) 和相对速度 $u-w$ 在 (1.3.33) 中的时间收敛速率. 值得强调的是, 相对速度 $u-w$ 在空间 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 中的衰减速率 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 用于控制非线性项 $\|h_3(u-w)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}$, 而这对封闭能量估计起到了关键作用 (参见节 4.4).

本章其余部分的安排如下: 在节 4.2, 我们建立柯西问题 (4.1.1) 解关于时间一致的先验估计, 并给出定理 1.3.14 关于整体强解的存在性和唯一性的证明. 在节 4.3, 我们证明定理 1.3.16 关于整体强解的最优衰减速率. 在节 4.4, 我们证明定理 1.3.18 关于整体强解的最优衰减速率. 附录 4.5 包含 Besov 空间和 Littlewood-Paly 分解的一些性质.

4.2 定理 1.3.14 的证明

不失一般性, 在节 4.2-4.4 中, 设

$$P'(\bar{\rho})=\bar{\rho}=\bar{n}=\kappa=\mu=1, \quad \lambda=-1. \tag{4.2.1}$$

我们建立可压缩 NS-Euler 方程组柯西问题 (4.1.1) 解关于时间一致的先验估计, 用以证明定理 1.3.14 关于柯西问题 (4.1.1) 强解的整体存在性. 为此, 我们引入

$$\begin{aligned} X_1(t):=&\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\ &+\|u-w\|^{\ell}_{\widetilde{L}^{2}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|u-w\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\ &+\|(\nabla a,u)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|a\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(u,b,w)\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

假设柯西问题 (4.1.1) 的解 (a,u,b,w) 对一个待选取的常数 $C_0>0$ 以及时间 $t>0$ 满足

$$X_1(t)\leq C_0X_1(0). \tag{4.2.3}$$

那么, 我们将在小节 4.2.1-4.2.2 中证明 $X_1(t)\leq \frac{1}{2}C_0X_1(0)$. 因而, 我们能够将局部逼近解延拓成整体逼近解, 然后利用该一致估计证明逼近解收敛到柯西问题 (4.1.1) 的整体强解 (参见小节 4.2.3). 注意到当初始能量 $X_1(0)$ 充分小时, 根据 (4.2.3), a 满足

$$|a(x,t)|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\rho(x,t)=1+a(x,t)\leq\frac{3}{2}, \qquad x\in\mathbb{R}^d, \quad t>0. \tag{4.2.4}$$

性质 (4.2.4) 用于非线性函数 h_i $(i=1,2,3)$ 的仿线性化估计.

我们将对柯西问题 (4.1.1) 的解对高频和低频分别估计.

4.2.1 低频估计

首先, 关于柯西问题 (4.1.1) 的解, 在作用局部化算子 $\dot{\Delta}_j$ 的意义下, 我们对 $j\leq 0$ 建立基本能量估计.

引理 4.2.1. *若 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 的整体解, 则对任意 $j\in\mathbb{Z}$, (a,u,b,w) 满足不等式*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|^2_{L^2}+\|\nabla\dot{\Delta}_ju\|^2_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}\\ &\leq\|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j(au)\|_{L^2}\|\dot{\Delta}_ja\|_{L^2}+\big(\|\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jh\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(u,b,w)\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

证明. 对 $(4.1.1)_1$-$(4.1.1)_2$ 作用算子 $\dot\Delta_j$, 我们得到

$$\begin{cases}(\dot\Delta_j a)_t+\mathrm{div}\,\dot\Delta_j u=-\mathrm{div}\,\dot\Delta_j(au),\\ (\dot\Delta_j u)_t+\nabla\dot\Delta_j a-\Delta\dot\Delta_j u+\dot\Delta_j(u-w)=-\dot\Delta_j(u\cdot\nabla u)+\dot\Delta_j G.\end{cases}\tag{4.2.6}$$

对方程 $(4.2.6)_1$ 及 $(4.2.6)_2$ L^2 各自和 $\dot\Delta_j a$ 及 $\dot\Delta_j u$ 作用 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 内积, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot\Delta_j(a,u)\|_{L^2}^2+\|\nabla\dot\Delta_j u\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^d}\dot\Delta_j(u-w)\cdot\dot\Delta_j u dx\\ &\le-\int_{\mathbb{R}^d}\big(\mathrm{div}\,\dot\Delta_j(au)\dot\Delta_j a+\dot\Delta_j(u\cdot\nabla u+G)\cdot\dot\Delta_j u\big)dx.\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

此外, 由 $(4.1.1)_3$-$(4.1.1)_4$, $\dot\Delta_j b$ 和 $\dot\Delta_j w$ 满足以下方程:

$$\begin{cases}(\dot\Delta_j b)_t+\mathrm{div}\,\dot\Delta_j w=-\dot\Delta_j(w\cdot\nabla b),\\ (\dot\Delta_j w)_t+\nabla\dot\Delta_j b+\dot\Delta_j(w-u)=-\dot\Delta_j(w\cdot\nabla w).\end{cases}\tag{4.2.8}$$

对 (4.2.8) 经简单的计算后, 我们可证

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot\Delta_j(b,w)\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^d}\dot\Delta_j(w-u)\cdot\dot\Delta_j w dx\\ &=-\int_{\mathbb{R}^d}\big(\dot\Delta_j(w\cdot\nabla b)\dot\Delta_j b+\dot\Delta_j(w\cdot\nabla w)\cdot\dot\Delta_j w\big)dx.\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

根据 (4.2.7) 及 (4.2.9), (5.2.27) 成立. □

为了得到 a 和 b 的耗散结构, 通过对方程组 (4.2.6) 和 (4.2.8) 直接计算, 我们可得如下引理.

引理 4.2.2. *若 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 的整体解, 则对任意 $j\in\mathbb{Z}$, (a,u,b,w) 满足不等式*

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\dot\Delta_j u\cdot\nabla\dot\Delta_j a dx+\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\dot\Delta_j a|^2-|\mathrm{div}\,\dot\Delta_j u|^2-\Delta\dot\Delta_j u\cdot\nabla\dot\Delta_j a+\dot\Delta_j(u-w)\cdot\nabla\dot\Delta_j a\big)dx\\ &\le\big(\|\mathrm{div}\,\dot\Delta_j(u\cdot\nabla u)\|_{L^2}+\|\nabla\mathrm{div}\,\dot\Delta_j(au)\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,\dot\Delta_j h\|_{L^2}\big)\|\dot\Delta_j(a,u)\|_{L^2},\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

以及

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\dot\Delta_j w\cdot\nabla\dot\Delta_j b dx+\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\dot\Delta_j b|^2-|\mathrm{div}\,\dot\Delta_j w|^2+\dot\Delta_j(w-u)\cdot\dot\Delta_j b\big)dx\\ &\le\|\mathrm{div}\,\dot\Delta_j(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}\|\dot\Delta_j(b,w)\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

柯西问题 (4.1.1) 在低频的估计如下:

命题 4.2.3. 对给定的时间 $T>0$, 若 (a,u,b,w) 为当 $t\in(0,T)$ 时柯西问题 (4.1.1) 满足 (4.2.3) 的一个解, 则成立

$$\begin{aligned}&\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|u-w\|^{\ell}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|u-w\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\quad\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+X_1^2(t),\quad 0<t<T,\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

其中 $X_1(t)$ 由 (4.2.2) 定义.

证明. 我们引入低频 Lyapunov 能量泛函

$$L^L_{NSE,j}(t):=\frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|^2_{L^2}+\eta_1\int_{\mathbb{R}^d}\big(\dot{\Delta}_ju\cdot\nabla\dot{\Delta}_ja+\dot{\Delta}_jw\cdot\nabla\dot{\Delta}_jb\big)dx,\tag{4.2.13}$$

及相应的耗散

$$\begin{aligned}D^L_{NSE,j}(t):=\ &\|\nabla\dot{\Delta}_ju\|^2_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}\\&+\eta_1\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\dot{\Delta}_ja|^2-|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_ju|^2-\Delta\dot{\Delta}_ju\cdot\nabla\dot{\Delta}_ja+\dot{\Delta}_j(u-w)\cdot\nabla\dot{\Delta}_ja\big)dx\\&+\eta_1\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\dot{\Delta}_jb|^2-|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_jw|^2+\dot{\Delta}_j(w-u)\cdot\dot{\Delta}_jb\big)dx,\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

其中 $\eta_1\in(0,1)$ 为一个待选取的常数. 对 $j\le 0$, 利用 (4.2.5)、(4.2.10)-(4.2.11) 及 $2^j\le 1$, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}L^L_{NSE,j}(t)+D^L_{NSE,j}(t)\\&\lesssim\big(\|\dot{\Delta}_j(\mathrm{div}\,(au),u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jh\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{4.2.15}$$

其次, 注意到

$$\frac{1}{2}(1-C\eta_1)\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|^2_{L^2}\le L^L_{NSE,j}(t)\le\frac{1}{2}(1+C\eta_1)\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|^2_{L^2},\quad j\le 0,\tag{4.2.16}$$

并且

$$\begin{aligned}D^L_{NSE,j}(t)\ge\ &c2^{2j}\Big((1-C\eta_1)\|\dot{\Delta}_ju\|^2_{L^2}-\eta_1\|\dot{\Delta}_jw\|^2_{L^2}+\frac{\eta_1}{2}\|\dot{\Delta}_j(a,b)\|^2_{L^2}\Big)\\&+(1-C\eta_1)\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2},\quad j\le 0,\end{aligned}\tag{4.2.17}$$

此处 $C>0$ 及 $c>0$ 为两个与时间无关的常数.

选取

$$\eta_1:=\min\Big\{\frac{1}{2C},\frac{1}{16},\frac{1}{8c}\Big\},$$

我们从 (4.2.16)-(4.2.17) 可知对 $j \le 0$,

$$\frac{1}{4}\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|_{L^2}^2 \le L_{NSE,j}^L(t) \le \frac{3}{4}\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|_{L^2}^2, \tag{4.2.18}$$

以及

$$\begin{aligned} D_{NSE,j}^L(t) &\ge 2^{2j}\big(\frac{c}{2}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}^2 - c\eta_1\|\dot{\Delta}_j w\|_{L^2}^2 + \frac{c\eta_1}{2}\|\dot{\Delta}_j(a,b)\|_{L^2}^2\big) \\ &\ge 2^{2j}\big(\frac{c}{4}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2 + \min\{\frac{c}{4},\frac{1}{2}\}(\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2 + \|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}^2) \\ &\quad - c\eta_1\|\dot{\Delta}_j w\|_{L^2}^2 + \frac{c\eta_1}{2}\|\dot{\Delta}_j(a,b)\|_{L^2}^2\big) \\ &\ge 2^{2j}\big(\frac{c}{4}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2 + \min\{\frac{c}{16},\frac{1}{8}\}\|\dot{\Delta}_j w\|_{L^2}^2 + \frac{c\eta_1}{2}\|\dot{\Delta}_j(a,b)\|_{L^2}^2\big), \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

此处我们用到如下关键事实:

$$\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2 + \|\dot{\Delta}(u-w)\|_{L^2}^2 \ge \frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_j w\|_{L^2}^2. \tag{4.2.20}$$

由 (4.2.15) 及 (4.2.18)-(4.2.19), 对 $j \le 0$, 以下能量-耗散不等式成立:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}L_{NSE,j}^L(t) + 2^{2j}L_{NSE,j}^L(t) + \|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}^2 \\ &\lesssim \big(\|\dot{\Delta}_j(\operatorname{div}(au), u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla b, w\cdot\nabla w)\|_{L^2} + \|\dot{\Delta}_j h\|_{L^2}\big)\sqrt{L_{NSE,j}^L(t)}. \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

对任意常数 $\eta > 0$, 将不等式 (4.2.21) 除以 $\big(L_{NSE,j}^L(t) + \eta^2\big)^{\frac{1}{2}}$, 在 $[0,t]$ 上积分并取极限 $\eta \to 0$, 我们得到

$$\begin{aligned} &\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|_{L^2} + 2^{2j}\int_0^t \|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|_{L^2} ds \\ &\lesssim \|\dot{\Delta}_j(a_0,u_0,b_0,w_0)\|_{L^2} + \int_0^t \big(\|\dot{\Delta}(\operatorname{div}(au), u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla b, w\cdot\nabla w)\|_{L^2} + \|\dot{\Delta}_j h\|_{L^2}\big)d\tau. \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

将 (4.2.22) 乘以 $2^{j(\frac{d}{2}-1)}$, 在 $[0,t]$ 上取上界并在 $j \le 0$ 上求和, 我们有

$$\begin{aligned} &\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} + \|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} \\ &\lesssim \|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}} \\ &\quad + \|au\|^{\ell}_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} + \|(u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla b, w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} + \|h\|^{\ell}_{\widetilde{L}_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}. \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

下面, 我们逐项估计不等式 (4.2.23) 右侧的非线性项. 根据 (4.5.1) 及 $X_1(t)$ 的定义 (4.2.2), 我

们易证

$$
\begin{cases}
\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(b,w)\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_1(t),\\
\|(u,b,w)\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|(a,u,b,w)\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|u-w\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\lesssim X_1(t).
\end{cases}
\tag{4.2.24}
$$

为了简化非线性项的计算, 下面我们将频繁使用估计 (4.2.24). 首先, 我们利用 $(4.2.24)_2$ 及 (4.5.4) 得到

$$
\|au\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|a\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t). \tag{4.2.25}
$$

基于 $(4.2.24)_2$ 及 (4.5.5), 我们也有

$$
\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\lesssim\|(u,b,w)\|^2_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t). \tag{4.2.26}
$$

由 (4.2.4) 及仿线性化估计 (4.5.9), 我们证得

$$
\|(h_1,h_2)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\lesssim\|a\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}},\qquad \|h_3\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\lesssim(1+\|a\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}})\|(a,b)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}.
$$

我们将上式与 (4.2.24) 及乘积估计 (4.5.4)-(4.5.5) 结合推出

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\lesssim{}&\|h_1\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|a\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|h_2\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&+\|h_3\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u-w\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t).
\end{aligned}
\tag{4.2.27}
$$

将 (4.2.25)-(4.2.27) 代入 (4.2.23), 我们得到

$$
\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+X_1^2(t). \tag{4.2.28}
$$

此外, 我们证明相对速度 $u-w$ 的 $L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})$ 估计. 注意到 $u-w$ 满足以下阻尼方程:

$$
(u-w)_t+2(u-w)=-\nabla a+\Delta u+\nabla b-u\cdot\nabla u+w\cdot\nabla w+h. \tag{4.2.29}
$$

对方程 (4.2.29) 作用算子 $\dot{\Delta}_j$ 后将其与 $\dot{\Delta}_j(u-w)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中作内积, 我们由 Bernstein 不等式证得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}\\
&\lesssim\big(2^j\|\dot{\Delta}_j(a,u,b)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jh\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2},\quad j\leq 0.
\end{aligned}
\tag{4.2.30}
$$

从而存在一个与时间无关的常数 $C>0$ 使得以下估计成立:

$$\begin{aligned}
&\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}^2d\tau\\
&\quad\leq C\|\dot{\Delta}_j(u_0-w_0)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\int_0^t\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}^2d\tau+C\int_0^t 2^{2j}\|\dot{\Delta}_j(a,u,b)\|_{L^2}^2d\tau\\
&\qquad+C\int_0^t\big(\|\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jh\|_{L^2}\big)d\tau\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L_t^\infty(L^2)},\quad j\leq 0.
\end{aligned}\tag{4.2.31}$$

将 (4.2.31) 乘以 $2^{j(\frac{d}{2}-1)}$ 并关于 $j\leq 0$ 求和, 我们利用 (4.2.26)-(4.2.28) 可得

$$\begin{aligned}
\|u-w\|^{\ell}_{\widetilde{L}_t^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}&\lesssim\|(u_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+\|(a,u,b)\|^{\ell}_{\widetilde{L}_t^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}+\|(u,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\qquad+\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\|h\|^{\ell}_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\lesssim\|(u_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+X_1^2(t).
\end{aligned}\tag{4.2.32}$$

进一步, 注意到不等式 (4.2.30) 也给出

$$\begin{aligned}
&\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}+\int_0^t\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|_{L^2}d\tau\\
&\quad\lesssim 2^{-j}\|\dot{\Delta}_j(u_0-w_0)\|_{L^2}\\
&\qquad+\int_0^t\big(2^j\|\dot{\Delta}_j(a,u,b)\|_{L^2}+2^{-j}\|\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+2^{-j}\|\dot{\Delta}_jh\|_{L^2}\big)d\tau,\quad j\leq 0.
\end{aligned}$$

因而, 我们利用 (4.2.26)-(4.2.28) 得到

$$\begin{aligned}
&\|u-w\|^{\ell}_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\\
&\lesssim\|(u_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+\|(a,u,b)\|^{\ell}_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}+\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\|h\|^{\ell}_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}\\
&\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+X_1^2(t).
\end{aligned}\tag{4.2.33}$$

我们联立 (4.2.28) 及 (4.2.32)-(4.2.33) 推得 (4.2.12). 命题 4.2.3 证毕. □

4.2.2 高频估计

在该小节中, 我们对柯西问题 (4.1.1) 作用局部化算子 $\dot{\Delta}_j$ 后关于 $j\geq -1$ 建立相应的高频估计.

事实上, 在已知 u 的估计后, 我们可以将 $(4.1.1)_3$-$(4.1.1)_4$ 看成一个带阻尼的可压缩 Euler 方程组考虑. 如下引理是带阻尼的可压缩 Euler 方程组 $(4.1.1)_3$-$(4.1.1)_4$ 的基本能量估

计.

引理 4.2.4. 设 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 的一个解, 则对任意 $j\in\mathbb{Z}$, (a,u,b,w) 满足以下不等式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}^2+\|\dot{\Delta}_j w\|_{L^2}^2\\
&\quad\le\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}\\
&\qquad+\big(\frac{1}{2}\|\mathrm{div}\,w\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}+\|[w\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j](b,w)\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{4.2.34}
$$

在高频研究 a 的耗散结构时, 我们需要将一些非线性项写成交换子估计的形式以避免导数损失.

引理 4.2.5. 设 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 的一个解. 则对任意 $j\in\mathbb{Z}$, (a,u,b,w) 满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}(\frac{1}{2}|\nabla\dot{\Delta}_j a|^2+\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a\big)dx+\|\nabla\dot{\Delta}_j a\|_{L^2}^2-\|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j(u-w)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a dx\\
&\lesssim\big(\|\dot{\Delta}_j h\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\nabla\dot{\Delta}_j a\|_{L^2}+\|\nabla\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u)\|_{L^2}\\
&\quad+\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla u\|_{L^2}+\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla^2 a\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(u,\nabla a)\|_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{4.2.35}
$$

证明. 根据方程 $(4.2.6)_1$-$(4.2.6)_2$, 我们易证

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}(\frac{1}{2}|\nabla\dot{\Delta}_j a|^2+\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a\big)dx+\|\nabla\dot{\Delta}_j a\|_{L^2}^2-\|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2+\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j(u-w)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a dx\\
&=-\int_{\mathbb{R}^d}(\nabla\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j(au)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a+\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a+\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j(au)+\dot{\Delta}_j h\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a\big)dx.
\end{aligned}
\tag{4.2.36}
$$

根据分部积分及事实

$$
\begin{cases}
\partial_k\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j(au)=-[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla a+u\cdot\nabla\partial_k\dot{\Delta}_j a+\partial_k\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u),\ \ k=1,...,d,\\
\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u)=-[u,\dot{\Delta}_j]\nabla u+u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j u,
\end{cases}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\nabla\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j(au)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a dx\Big|\\
&\quad=\Big|-\int_{\mathbb{R}^d}\big(\sum_{k=1}^d[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla a\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a+\frac{1}{2}\mathrm{div}\,u\nabla\Delta_j a\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a+\nabla\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a\big)dx\Big|\\
&\quad\le\big(\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla^2 a\|_{L^2}+\frac{1}{2}\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\nabla\dot{\Delta}_j a\|_{L^2}+\|\nabla\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u)\|_{L^2}\big)\|\nabla\dot{\Delta}_j a\|_{L^2},
\end{aligned}
\tag{4.2.37}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\big(\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a+\nabla\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j(au)\cdot\dot{\Delta}_j u\big)dx\Big|\\
&\quad=\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\big(u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a+u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\nabla a\cdot\dot{\Delta}_j u+\nabla\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u)\cdot\dot{\Delta}_j u\\
&\qquad-[u,\dot{\Delta}_j]\nabla u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a-\sum_{k=1}^{d}[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla a\cdot\dot{\Delta}_j u\big)dx\Big|\\
&\quad\le\big(\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}+\|\nabla\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u)\|_{L^2}\\
&\qquad+\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\dot{\Delta}_j a\|_{L^2}+\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla^2 a\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(\nabla a,u)\|_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{4.2.38}
$$

由 (4.2.36)-(4.2.38), (4.2.35) 成立. □

下面, 我们建立柯西问题 (4.1.1) 解的高频估计.

命题 4.2.6. 对给定的时间 $T>0$, 若 (a,u,b,w) 为当 $t\in(0,T)$ 时柯西问题 (4.1.1) 满足特性 (4.2.3) 的一个解, 则有

$$
\begin{aligned}
&\|(\nabla a,u)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|a\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(u,b,w)\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\quad\lesssim\|(\nabla a_0,u_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|(b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+X_1^2(t),\quad 0<t<T,
\end{aligned}
\tag{4.2.39}
$$

其中 $X_1(t)$ 由 (4.2.2) 给出.

证明. 首先, 对一个待选取的小常数 $\eta_2\in(0,1)$, 我们引入高频 Lyapunov 能量泛函

$$
\begin{aligned}
E^H_{NSE,j}(t):=&\frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|^2_{L^2}\\
&+\eta_2\int_{\mathbb{R}^d}\big(\frac{1}{2}|\nabla\dot{\Delta}_j a|^2+\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a\big)dx+2^{-2j}\eta_2\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j w\cdot\nabla\dot{\Delta}_j b\,dx,
\end{aligned}
\tag{4.2.40}
$$

以及对应的耗散

$$
\begin{aligned}
D^H_{NSE,j}(t):=&\|\nabla\dot{\Delta}_j u\|^2_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}\\
&+\eta_2\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\dot{\Delta}_j a|^2-|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u|^2+\dot{\Delta}_j(u-w)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j a\big)dx\\
&+\eta_2 2^{-2j}\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\dot{\Delta}_j b|^2+\dot{\Delta}_j(w-u)\cdot\nabla\dot{\Delta}_j b\big)dx.
\end{aligned}
\tag{4.2.41}
$$

对 $j\geq -1$, 由 (4.2.5)、(4.2.11)、(4.2.35)、Bernstein 不等式及 $2^{-j}\leq 2$, 我们可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E^H_{NSE,j}(t)+D^H_{NSE,j}(t)\\
&\lesssim \big(2^j\|\dot{\Delta}_j(au)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jh\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\nabla\dot{\Delta}_ja\|_{L^2}\\
&\quad+\|\nabla\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u)\|_{L^2}+\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla u\|_{L^2}+\sum_{k=1}^{d}\|[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla a\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(a,\nabla a,u,b,w)\|_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{4.2.42}
$$

此外, 对 $j\geq -1$, 我们易证

$$
\begin{cases}
E^H_{NSE,j}(t)\leq \frac{1}{2}(1+C\eta_2)\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_ja\|^2_{L^2}+\frac{\eta_2}{2}\|\nabla\dot{\Delta}_ja\|^2_{L^2},\\
E^H_{NSE,j}(t)\geq \frac{1}{2}(1-C\eta_2)\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_ja\|^2_{L^2}+\frac{\eta_2}{2}\|\nabla\dot{\Delta}_ja\|^2_{L^2},
\end{cases}
\tag{4.2.43}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
D^H_{NSE,j}(t)&\geq c2^{2j}\|\dot{\Delta}_ju\|^2_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}\\
&\quad+\eta_2\big(\frac{1}{2}\|\nabla\dot{\Delta}_ja\|^2_{L^2}-c2^{2j}\|\dot{\Delta}_ju\|^2_{L^2}-\frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}\big)\\
&\quad+\eta_2 2^{-2j}\big(\frac{c}{2}2^{2j}\|\dot{\Delta}_jb\|^2_{L^2}-c2^{2j}\|\dot{\Delta}_jw\|^2_{L^2}-\frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_j(w-u)\|^2_{L^2}\big)\\
&\geq \frac{c(1-\eta_2)}{4}\|\dot{\Delta}_ju\|^2_{L^2}+(1-\eta_2)\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}-c\eta_2\|\dot{\Delta}_jw\|^2_{L^2}\\
&\quad+\frac{\eta_2}{2}\|\nabla\dot{\Delta}_ja\|^2_{L^2}+\frac{c\eta_2}{2}\|\dot{\Delta}_jb\|^2_{L^2},
\end{aligned}
\tag{4.2.44}
$$

其中 $c>0$ 及 $C>0$ 为两个与时间无关的常数.

选取

$$
\eta_2=\min\{\frac{1}{2C},\frac{1}{64},\frac{1}{8c}\},
$$

由 (4.2.20) 及 (4.2.43)-(4.2.44), 对任意 $j\geq -1$, 我们推得

$$
\frac{1}{4}\|\dot{\Delta}_j(a,\nabla a,u,b,w)\|^2_{L^2}\leq E^H_{NSE,j}(t)\leq \frac{3}{4}\|\dot{\Delta}_j(a,\nabla a,u,b,w)\|^2_{L^2},
\tag{4.2.45}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
D^H_{NSE,j}(t)&\geq \frac{c}{8}\|\dot{\Delta}_ju\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\dot{\Delta}_j(u-w)\|^2_{L^2}-c\eta_2\|\dot{\Delta}_jw\|^2_{L^2}+\frac{\eta_2}{2}\|\nabla\dot{\Delta}_ja\|^2_{L^2}+\frac{c\eta_2}{2}\|\dot{\Delta}_jb\|^2_{L^2}\\
&\geq \frac{c}{16}\|\dot{\Delta}_ju\|^2_{L^2}+\min\{\frac{c}{64},\frac{1}{8}\}\|\dot{\Delta}_jw\|^2_{L^2}+\frac{\eta_2}{16}\|\dot{\Delta}_j(a,\nabla a)\|^2_{L^2}+\frac{c\eta_2}{2}\|\dot{\Delta}_jb\|^2_{L^2},
\end{aligned}
\tag{4.2.46}
$$

结合 (4.2.42) 及 (4.2.45)-(4.2.46), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E^H_{NSE,j}(t)+E^H_{NSE,j}(t)\\
&\lesssim \big(2^j\|\dot{\Delta}_j(au)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jh\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\nabla\dot{\Delta}_ja\|_{L^2}\\
&\quad+\|\nabla\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u)\|_{L^2}+\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla u\|_{L^2}+\sum_{k=1}^d\|[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla a\|_{L^2}\big)\sqrt{E^H_{NSE,j}(t)},\quad j\geq -1.
\end{aligned}\tag{4.2.47}
$$

类似 (4.2.22)-(4.2.23) 的讨论, 我们由上式 (4.2.47) 可证

$$
\begin{aligned}
&\|(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(\nabla a_0,b_0,u_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|au\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\quad+\|h\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\mathrm{div}\,u\|_{L^1_t(L^\infty)}\|a\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|a\mathrm{div}\,u\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\quad+\sum_{j\geq-1}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\big(\|[u\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j]u\|_{L^1_t(L^2)}+\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla^2a\|_{L^1_t(L^2)}\big).
\end{aligned}\tag{4.2.48}
$$

根据 (4.2.24), 以下非线性估计成立:

$$
\begin{cases}
\|a\mathrm{div}\,u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t),\\
\|\mathrm{div}\,u\|_{L^1_t(L^\infty)}\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t),
\end{cases}\tag{4.2.49}
$$

此外, 利用交换子估计 (4.5.7)-(4.5.8), 我们有

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\|[u\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j]u\|_{L^1_t(L^2)}\lesssim\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t),\\
\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\sum_{k=1}^d\|[u\cdot\nabla,\partial_k\dot{\Delta}_j]a\|_{L^1_t(L^2)}\lesssim\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t).
\end{cases}\tag{4.2.50}
$$

联立 (4.2.25)-(4.2.27) 及 (4.2.48)-(4.2.50), 我们得到如下高频估计:

$$
\begin{aligned}
&\|a\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|a\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(\nabla a_0,u_0,b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+X_1^2(t).
\end{aligned}\tag{4.2.51}
$$

其次, 由 (4.2.1), 动量方程 $(4.1.1)_2$ 可改写为

$$u_t-\Delta u=-\nabla a+w-u-u\cdot\nabla u+h. \tag{4.2.52}$$

对 (4.2.52) 应用扩散方程的最优正则性估计 (4.5.12) 并且利用已知的估计 (4.2.26)-(4.2.27) 和 (4.2.51), 我们有

$$\begin{aligned}
&\|u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|u\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim\|u_0\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|a\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(u,w)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|u\cdot\nabla u\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|h\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(\nabla a_0,u_0,b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+X_1^2(t).
\end{aligned} \tag{4.2.53}$$

最后, 我们证明 (b,w) 在高频的 $\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})\cap L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})$ 估计. 对一个待选择的常数 $\eta_3\in(0,1)$, 我们引入

$$\begin{cases}
E^H_{Euler,j}(t):=\dfrac{1}{2}\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|^2_{L^2}+2^{-2j}\eta_3\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_jw\cdot\nabla\dot{\Delta}_jb\,dx,\\
D^H_{Euler,j}(t):=\|\dot{\Delta}_jw\|^2_{L^2}+2^{-2j}\eta_3\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\dot{\Delta}_jb|^2-|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_jw|^2+\dot{\Delta}_j(w-u)\cdot\dot{\Delta}_jb\big)dx.
\end{cases}$$

对 $j\geq-1$, 我们易证

$$\frac{1}{2}(1-C\eta_3)\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|^2_{L^2}\leq E^H_{Euler,j}(t)\leq\frac{1}{2}(1+C\eta_3)\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|^2_{L^2}, \tag{4.2.54}$$

以及

$$D^H_{Euler,j}(t)\geq(1-C\eta_3)\|\dot{\Delta}_jw\|^2_{L^2}+c\eta_3\|\dot{\Delta}_jb\|^2_{L^2}-C\eta_3\|\dot{\Delta}_ju\|_{L^2}\|\dot{\Delta}_jb\|_{L^2}, \tag{4.2.55}$$

其中 $C>0$ 及 $c>0$ 为与时间无关的常数.

选取

$$\eta_3=\min\{1,\frac{1}{2C}\},$$

由 (4.2.11)、(4.2.34) 及 (4.2.55), 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E^H_{Euler,j}(t)+E^H_{Euler,j}(t)\\
&\lesssim\big(\|\dot{\Delta}_ju\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,w\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}+2^{-j}\|\dot{\Delta}_j(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}\\
&\quad+\|[w\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j](b,w)\|_{L^2}\big)\sqrt{E^H_{Euler,j}(t)},\quad j\geq-1.
\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

从而, 我们对 (4.2.56) 经计算后可证

$$
\begin{aligned}
&\|(b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|(b,w)\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\quad\lesssim\|(b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\|u\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\mathrm{div}\,w\|_{L^\infty_t(L^\infty)}\|(b,w)\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\qquad+\|(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\sum_{j\geq-1}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|[w\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j](b,w)\|_{L^2}\\
&\quad\lesssim\|(\nabla a_0,u_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|(b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+X_1^2(t),
\end{aligned}
\tag{4.2.57}
$$

此处我们用到估计 (4.2.24)、(4.2.53)、(4.5.7) 以及

$$
\|(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|w\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|(w,b)\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t).
$$

结合 (4.2.51)、(4.2.53) 以及 (4.2.57), 我们得到 (4.2.39). 命题 4.2.6 证毕.

□

4.2.3　整体存在性

我们利用 Friedrichs 逼近方法以及在小节 4.2.1-4.2.2 中建立的先验估计来严格证明柯西问题 4.1.1 强解的整体存在性. 设 L^2_q 为满足其傅立叶变换支集在环 $C_q:=\{\xi\in\mathbb{R}^d\mid\frac{1}{n}\leq|\xi|\leq n\}$ 上的 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 函数所组成的空间, $\dot{\mathbb{E}}_q$ 为由如下定义的 Friedrichs 投影:

$$
\dot{\mathbb{E}}_q g:=\mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_{C_q}\mathscr{F}g),\quad\forall g\in L^2(\mathbb{R}^d),
\tag{4.2.58}
$$

其中 $\mathbf{1}_{C_q}$ 为在环 C_q 上定义的特征函数.

我们回顾柯西问题 (4.1.1) 对系数的简化 (4.2.1). 对 $q\geq1$, 我们求解如下柯西问题 (4.1.1) 的逼近问题:

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}n\\u\\b\\w\end{pmatrix}=\mathbf{M}_q(n,u,b,w),\qquad\begin{pmatrix}n(x,0)\\u(x,0)\\b(x,0)\\w(x,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\mathbb{E}}_q n_0(x)\\\dot{\mathbb{E}}_q u_0(x)\\\dot{\mathbb{E}}_q b_0(x)\\\dot{\mathbb{E}}_q w_0(x)\end{pmatrix},
\tag{4.2.59}
$$

其中

$$
\mathbf{M}_q(n,u,b,w):=\begin{pmatrix}-\mathrm{div}\,u-\dot{\mathbb{E}}_q\mathrm{div}\,(au)\\-\nabla a+\Delta u-u+w-\dot{\mathbb{E}}_q(u\cdot\nabla u)-\dot{\mathbb{E}}_q h\\-\mathrm{div}\,w-\dot{\mathbb{E}}_q(w\cdot\nabla b)\\-\nabla b+u-w-\dot{\mathbb{E}}_q(w\cdot\nabla w)\end{pmatrix}.
$$

由 Bernstein 不等式, 矩阵 $\mathbf{M}_q(n,u,b,w)$ 中所有出现的高阶导数的范数都和其本身的 L^2 范数等价, 从而易证对每一个 $q\geq 1$, $\mathbf{M}_q(n,u,b,w)$ 的每一行在 L^2_q 中关于变量 (n,u,b,w) 是局部 Lipschitz 的. 因而, 由 Cauchy-Lipschitz 定理 (参见 [8][124 页]), 存在一个最大时间 $T^q_*>0$ 使得常微分方程组 (4.2.59) 存在唯一的解 $(n^q,u^q,b^q,w^q)\in C([0,T^q_*);L^2_q)$.

对一个待选取的常数 $C_0>0$, 我们定义最大时间

$$\begin{aligned} T^q=\sup\big\{t>0 \mid \text{问题 (4.2.59) 在 } [0,t] \text{ 上存在解 } (n^q,u^q,b^q,w^q),\\ \text{且 } X_1(n^q,u^q,b^q,w^q)(t)\leq C_0X_1(0) \text{ 成立}\big\}. \end{aligned} \tag{4.2.60}$$

其中 $X_{NSE}(n,u,b,w)(t)$ 由 (4.2.2) 给出.

易知 $0<T^q<T^q_*$. 我们断言 $T^q=T^q_*$. 利用反正法, 我们假设 $T^q<T^q_*$. 由于算子 $\dot{\mathbb{E}}_q$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 为自伴的并且 $\dot{\mathbb{E}}_q(n^q,u^q,b^q,w^q)=(n^q,u^q,b^q,w^q)$ 成立, 问题 (4.2.59) 的解 (n^q,u^q,b^q,w^q) 满足在小节 4.2.1-4.2.2 中建立的先验估计. 注意到存在一个与时间及 q 无关的常数 $C_1>0$ 使得

$$\sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d}|n^q|\leq C_1X_1(n^q,u^q,b^q,w^q)(t)\leq C_1C_0X_1(0), \quad 0<t<T^q,$$

从而 n^q 满足

$$\sup_{[0,t]\times\mathbb{R}^d}|n^q|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\rho^q=1+n^q\leq\frac{3}{2}, \qquad \text{若} \quad X_1(0)\leq\frac{1}{2C_1C_0}. \tag{4.2.61}$$

根据 (4.2.60)-(4.2.61) 以及命题 4.2.3-4.2.6 中的先验估计, 我们有

$$X_1(n^q,u^q,b^q,w^q)(t)\leq C_2X_1(0)+C_2X_1^2(n^q,u^q,b^q,w^q)(t), \quad 0<t<T^q. \tag{4.2.62}$$

其中 $C_2>0$ 为一个和时间及 q 无关的常数.

由 (4.2.60)-(4.2.62), 若我们选取

$$C_0=4C_2, \quad X_1(0)\leq\min\{\frac{1}{8C_1C_2},\frac{1}{16C_2^2}\},$$

那么有

$$X_1(n^q,u^q,b^q,w^q)(t)\leq C_2(X_1(0)+C_0^2X_1^2(0))\leq\frac{1}{2}C_0X_1(0) \quad 0\leq t<T^q.$$

这与 T^q 的定义 (4.2.60) 矛盾. 因而, $T^q=T^q_*$ 成立.

若 $T^q_*=T^q<\infty$, 则根据 Cauchy-Lipschitz 定理, 对充分接近 T^q_* 的时间 t, 我们可以将 $(n^q,u^q,b^q,w^q)(t)$ 作为新的初值来得到问题 (4.2.59) 在 $[t,t+\eta]$ (对充分小的 $\eta>0$ 满足 $t+\eta>T^q_*$) 上的局部存在性, 从而和 T^q 的定义 (4.2.60) 矛盾. 由此, 我们证明 $T^q_*=T^q=\infty$, 即

$(n^q,u^q,b^q,w^q)(t)$ 为问题 (4.2.59) 的整体解, 且满足一致估计

$$X_1(n^q,u^q,b^q,w^q)(t)\le C_0X_1(0),\quad t>0. \tag{4.2.63}$$

最后, 对任意给定的时间 $T>0$, 根据 (4.2.63), 我们易证时间导数 $(n^q_t,u^q_t,b^q_t,w^q_t)$ 相应与 q 无关的估计, 从而由 Aubin-Lions 定理 (参见 [1,202]) 及 Cantor 对角线法则, 存在一个极限 (n,u,b,w) 使得在抽子列意义下 (为简单起见仍记为 (n^q,u^q,b^q,w^q)), 当 $q\to\infty$ 时, 对任意 $\varphi_*\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d\times(0,T))$, 我们有

$$\varphi_*(n^q,u^q,b^q,w^q)\to\varphi_*(n,u,b,w)\quad 于\ L^2(0,T;\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}). \tag{4.2.64}$$

基于 (4.2.64), 我们易证极限 (n,u,b,w) 在分布意义下满足柯西问题 (4.1.1). 根据一致估计 (4.2.63) 及 Fatou 特性, (n,u,b,w) 满足特性 (1.3.28), 从而其为柯西问题 (4.1.1) 的一个整体强解.

4.2.4 唯一性

我们证明在小节 4.2.3 中构造的柯西问题 (4.1.1) 整体强解的唯一性. 设 (n_0,u_0,b_0,w_0) 满足假设 (1.3.26). 对任意给定的时间 $T>0$, 设 (n_1,u_1,b_1,w_1) 及 (n_2,u_2,b_2,w_2) 为在 $t\in(0,T)$ 带有相同初值 (n_0,u_0,b_0,w_0) 的柯西问题 (4.1.1) 满足特性 (1.3.28) 的强解. 由 (4.1.1) 和 (4.2.1), 我们易知

$$(\widetilde{n},\widetilde{u},\widetilde{b},\widetilde{w}):=(n_2-n_1,u_2-u_1,b_2-b_1,w_2-w_1)$$

满足方程组

$$\begin{cases}\widetilde{a}_t+u_2\cdot\nabla\widetilde{a}=\widetilde{H}_1,\\ \widetilde{u}_t+u_2\cdot\nabla\widetilde{u}-\Delta\widetilde{u}=\widetilde{H}_2,\\ \widetilde{b}_t+w_2\cdot\nabla\widetilde{b}+\operatorname{div}\widetilde{b}=\widetilde{H}_3,\\ \widetilde{w}_t+w_2\cdot\nabla\widetilde{w}+\nabla\widetilde{b}+\widetilde{w}=\widetilde{H}_4,\end{cases} \tag{4.2.65}$$

其中

$$\begin{cases}\widetilde{H}_1:=-\widetilde{u}\cdot\nabla a_1-\widetilde{a}\operatorname{div}u_2-(1+a_1)\operatorname{div}\widetilde{u},\\ \widetilde{H}_2:=-\widetilde{u}\cdot\nabla u_1-\dfrac{a_1}{a_1+1}\Delta\widetilde{u}-\dfrac{\widetilde{a}}{(a_1+1)(a_2+1)}\Delta u_2+\nabla\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}\frac{P'(1+s)}{1+s}ds\\ \qquad\qquad+(\dfrac{e^{b_2}}{a_2+1}-\dfrac{e^{b_1}}{a_1+1})(w_2-u_2)+\dfrac{e^{b_1}}{a_1+1}(\widetilde{w}-\widetilde{u}),\\ \widetilde{H}_3:=-\widetilde{w}\cdot\nabla b_1,\qquad \widetilde{H}_4:=-\widetilde{w}\cdot\nabla w_1+\widetilde{u}.\end{cases}$$

我们将对情形 $d\ge3$ 和情形 $d=2$ 分别讨论.

- 情形 1: $d \geq 3$.

首先, 我们利用 Morser 型乘积估计 (4.5.5) 得到

$$\|\widetilde{H}_1\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} \lesssim (1+\|a_1\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}})\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|u_2\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|\widetilde{a}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}.$$

从而, 根据 (1.3.28) 和输运方程 $(4.2.65)_1$ 最优正则性估计 (4.5.12), $\widetilde{a}$ 满足

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{a}\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} &\lesssim e^{\|u_2\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}}\|\widetilde{H}_1\|_{L^1_T(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\lesssim \int_0^t \|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\,d\tau + \int_0^t \|u_2\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|\widetilde{a}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau.
\end{aligned}$$

对上式应用 Grönwall 不等式及正则性 (1.3.28), 我们有

$$\|\widetilde{a}\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim \int_0^t \|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\,d\tau, \quad t\in[0,T]. \tag{4.2.66}$$

下一步, 借助于 (4.5.5) 中的乘积映射 $\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}\times\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\to\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}$ $(d\geq 3)$, 我们得到

$$\|(\widetilde{H}_3,\widetilde{H}_4)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}} \lesssim \|(b_1,w_1)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|\widetilde{w}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}} + C\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}}. \tag{4.2.67}$$

对 $(3.4.5)_3$ 和 $(3.4.5)_4$ 应用算子 $\dot{\Delta}_j$ 并对得到的方程分别与 $\dot{\Delta}_j\widetilde{b}$ 及 $\dot{\Delta}_j\widetilde{w}$ 作 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 内积, 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{\Delta}_j(\widetilde{b},\widetilde{w})\|_{L^2}^2+\|\dot{\Delta}_j\widetilde{w}\|_{L^2}^2\\
&\quad\leq \Big(\frac{1}{2}\|\mathrm{div}\,w_2\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(\widetilde{b},\widetilde{w})\|_{L^2}+\|[w_2\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j](\widetilde{b},\widetilde{w})\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j(\widetilde{H}_3,\widetilde{H}_4)\|_{L^2}\Big)\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

我们结合上式、(1.3.28)、(4.2.67) 及 (4.5.7) 可得

$$\|(\widetilde{b},\widetilde{w})\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1})} \lesssim \int_0^t \|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}}d\tau, \quad t\in[0,T]. \tag{4.2.68}$$

为了估计不等式 $(4.2.65)_2$ 的右侧, 根据 (1.3.28)、(4.5.9) 以及 (4.5.5) 给出的映射 $\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}\times\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\to\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}$, 以下估计成立:

$$\|\frac{a_1}{1+a_1}\Delta\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-2}_{2,1}} \lesssim \|a_1\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim X_1(0)\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}. \tag{4.2.69}$$

类似地, 我们有

$$\|\widetilde{u}\cdot\nabla u_2\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}\lesssim\|u_2\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}. \tag{4.2.70}$$

又根据 (1.3.28)、(4.5.5)、仿线性化估计 (4.5.9)-(4.5.10) 以及嵌入 $\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}\cap\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}\hookrightarrow\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}$, 我们得到

$$\|(\frac{e^{b_2}}{a_2+1}-\frac{e^{b_1}}{a_1+1})(w_2-u_2)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}\lesssim(1+\|u_2\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}})\|\widetilde{b}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}+\|\widetilde{a}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}. \tag{4.2.71}$$

类似的计算可以给出

$$\begin{cases}\|\dfrac{\widetilde{a}}{(a_1+1)(a_2+1)}\Delta u_1\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}\lesssim\|\widetilde{a}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}},\\ \|\nabla\displaystyle\int_{a_1}^{a_2}P'(1+s)(1+s)^{-1}ds\big)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}\lesssim\|\widetilde{a}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}},\\ \|\dfrac{e^{b_1}}{a_1+1}(\widetilde{w}-\widetilde{u})\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}\lesssim\|(\widetilde{w},\widetilde{u})\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}.\end{cases} \tag{4.2.72}$$

从而, 我们利用 (4.2.66)、(4.2.68)-(4.2.72) 以及输运扩散方程 $(4.2.65)_2$ 的正则性估计 (4.5.12) 得到

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2})}+\|\widetilde{u}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\\ &\lesssim e^{\|u_2\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}}\int_0^t\|\widetilde{H}_2\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2}}d\tau\\ &\lesssim X_1(0)\|\widetilde{u}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}+\int_0^t\big(1+\|(u_1,u_2)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}\big)\big(\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1}}+\|\widetilde{u}\|_{L_\tau^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\big)d\tau.\end{aligned}$$

对上式应用 $X_1(0)$ 的小性和 Grönwall 不等式, 并结合 (4.2.66) 及 (4.2.68), 我们有

$$\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2})}+\|\widetilde{u}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}+\|a\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\|(b,w)\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-2})}=0,\quad t\in[0,T].$$

情形 $d\geq 3$ 的唯一性证毕.

- 情形 2: $d=2$.

在 $d=2$ 时, 我们需要用 Morser 型乘积估计 (4.5.6) 代替 (4.5.5). 根据 (4.5.6) 给出的乘积映射 $\dot{B}_{2,\infty}^0\times\dot{B}_{2,1}^1\to\dot{B}_{2,\infty}^0$ 以及 (4.5.12), $\widetilde{a}$ 满足

$$\|\widetilde{a}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,\infty}^0)}\lesssim\int_0^t\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}_{2,1}^1}d\tau,\quad t\in[0,T]. \tag{4.2.73}$$

类似于 (4.2.67)-(4.2.68), 我们可证

$$\|(\widetilde{b},\widetilde{w})\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{-1})}\lesssim\int_0^t\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{-1}}d\tau,\quad t\in[0,T].\tag{4.2.74}$$

根据 (4.5.9), (4.5.10) 及 (4.2.73)-(4.2.74), 我们有

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{u}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,\infty}^{-1})}+\|\widetilde{u}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{1})}\\&\lesssim X_1(0)\|\widetilde{u}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{1})}+\int_0^t\big(1+\|(u_1,u_2)\|_{\dot{B}_{2,1}^{1}}\big)\big(\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{-1}}+\|\widetilde{u}\|_{L_\tau^1(\dot{B}_{2,1}^{1})}\big)d\tau.\end{aligned}\tag{4.2.75}$$

对 (4.2.75) 应用 (1.3.28)、$X_1(0)$ 的小性、Grönwall 不等式以及 log 型不等式 (4.5.3), 我们推得

$$\|\widetilde{u}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{1})}\lesssim\int_0^t(1+\|(u_1,u_2)\|_{\dot{B}_{2,1}^{2}})\|\widetilde{u}\|_{L_\tau^1(\dot{B}_{2,\infty}^{1})}\log\Big\{e+\frac{1}{\|\widetilde{u}\|_{L_\tau^1(\dot{B}_{2,\infty}^{1})}}\Big\}d\tau.$$

因而, 对上式应用 Osgood 引理 (参见 [8][125 页]) 并结合 (4.2.73)-(4.2.74), 我们证明情形 $d=2$ 的唯一性.

4.3 定理 1.3.16 的证明

4.3.1 低频 $\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}$ 估计

在本节中, 我们证明如果初始扰动的低频部分还在 Besov 空间 $\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}$ ($\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$) 中有界, 由定理 1.3.14 给出的柯西问题 (4.1.1) 整体解将以最优时间速率收敛到平衡态.

首先, 我们建立解进一步在低频满足先验估计.

命题 4.3.1. *在定理 1.3.16 的假设下, 对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 若 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体解, 则成立*

$$X_{1,\sigma_0}(t)\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}}^{\ell}+X_1(0),\quad t>0,\tag{4.3.1}$$

其中 $X_1(0)$ 由 (4.2.2) 给出, $X_{1,\sigma_0}(t)$ 定义为

$$X_{1,\sigma_0}(t):=\|(a,u,b,w)\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0})}^{\ell}+\|(a,u,b,w)\|_{\widetilde{L}_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0+2})}^{\ell}+\|u-w\|_{\widetilde{L}_t^2(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0})}^{\ell}+\|u-w\|_{\widetilde{L}_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0+1})}^{\ell}.\tag{4.3.2}$$

证明. 对不等式 (4.2.22) 左右两边乘以 $2^{\sigma_0 j}$ 并关于 $[0,t]$ 和 $j\le 0$ 取上界, 我们得到

$$\begin{aligned}&\|(a,u,b,w)\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0})}^{\ell}+\|(a,u,b,w)\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0+2})}^{\ell}\\&\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}}^{\ell}+\|au\|_{\widetilde{L}_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0+1})}^{\ell}+\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{\widetilde{L}_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0})}^{\ell}+\|h\|_{\widetilde{L}_t^1(\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0})}^{\ell}.\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

类似于命题 4.2.3 在 $\frac{d}{2}-1$ 正则性指标下的低频估计, 我们可以根据 (1.3.28)、(4.5.1)、(4.5.6) 和 (4.5.9) 得到

$$\begin{aligned}\|(u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla b, w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})} &\lesssim \|(u,w)\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|(u,b,w)\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}\\ &\lesssim X_1(t)\big(X_{1,\sigma_0}(t)+X_1(t)\big).\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

以及

$$\begin{aligned}\|h\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})} &\lesssim \|h_1\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|a\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}+\|h_2\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}\\ &\quad+\|h_3\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u-w\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\ &\lesssim X_1(t)\big(X_{1,\sigma_0}(t)+X_1(t)\big).\end{aligned}$$

将 (4.3.4)-(4.3.5) 代入 (4.3.3), 我们有

$$\begin{aligned}&\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}\\ &\quad\lesssim \|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1(t)\big(X_{1,\sigma_0}(t)+X_1(t)\big).\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

进一步, 类似于 (4.2.21)-(4.2.33) 的计算过程, 我们可以得到

$$\begin{aligned}&\|u-w\|^{\ell}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|u-w\|^{\ell}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}\\ &\quad\lesssim \|(u_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|(a,u,b)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}+\|(u,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|(a,u,b)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}\\ &\quad+\|(u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|h\|^{\ell}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}.\end{aligned}$$

将上式与 (4.3.4)-(4.3.5) 联立并利用事实

$$\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} \lesssim \|(a_0,u_0,b_0,w_0)^{\ell}\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1(0), \tag{4.3.6}$$

我们得

$$X_{1,\sigma_0}(t)\lesssim \|(a_0,u_0,b_0,w_0)^{\ell}\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1(0)+X_1(t)\big(X_{1,\sigma_0}(t)+X_1(t)\big).$$

根据 $X_1(t)\lesssim X_1(0)<<1$, (4.3.1) 得证. □

4.3.2 时间加权能量估计

在该小节中, 我们利用一个新的时间加权方法证明最优衰减速率 (1.3.29)-(1.3.31). 时间加权能量泛函 $D_{1,\theta}(t)$ 由如下定义:

$$\begin{aligned} D_{1,\theta}(t) := &\|\tau^\theta(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \|\tau^\theta(\nabla a,u)\|^{h}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\tau^\theta(b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\ &+ \|\tau^\theta(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|\tau^\theta a\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\tau^\theta(u,b,w)\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\ &+ \|\tau^\theta(u-w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \|\tau^\theta(u-w)\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

我们先处理低频时间加权估计.

引理 4.3.2. *在定理 1.3.16 的假设下, 对 $\sigma_0 \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}-1)$ 及 $\theta > 1 + \frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0) > 1$, 若 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体解, 则对一个待选取的小常数 $\eta > 0$, (a,u,b,w) 满足以下估计:*

$$\begin{aligned} &\|\tau^\theta(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \|\tau^\theta(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\ &\quad + \|\tau^\theta(u-w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \|\tau^\theta(u-w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \\ &\lesssim \frac{X_1(t)+X_{1,\sigma_0}(t)}{\eta} t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)} + \big(\eta + X_1(t)\big) D_{1,\theta}(t), \quad t>0, \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

其中 $X_1(t)$、$X_{1,\sigma_0}(t)$ 及 $D_{1,\theta}(t)$ 各自由 (4.2.2)、(4.3.2) 及 (4.3.7) 给出.

证明. 对 $j \le 0$, 对微分不等式 (4.2.21) 两边同乘以 t^θ, 我们有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(t^\theta L^L_{NSE,j}(t)\Big) + t^\theta 2^{2j} L^L_{NSE,j}(t) \\ &\lesssim t^{\theta-1} L^L_{NSE,j}(t) + t^\theta \big(\|\dot{\Delta}_j(\operatorname{div}(au), u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla b, w\cdot\nabla w)\|_{L^2} + \|\dot{\Delta}_j h\|_{L^2}\big)\sqrt{L^L_{NSE,j}(t)}. \end{aligned}$$

我们将上式与 (4.2.18)-(4.2.19) 联立并结合事实 $t^{\theta-1}\sqrt{L^L_{NSE,j}(t)}\Big|_{t=0} = 0$ 得到

$$\begin{aligned} &t^\theta \|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|_{L^2} + 2^{2j}\int_0^t \tau^\theta \|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|_{L^2} d\tau \\ &\lesssim \int_0^t \tau^{\theta-1}\|\dot{\Delta}_j(a,u,b,w)\|_{L^2} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \tau^\theta \big(\|\dot{\Delta}_j(\operatorname{div}(au), u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla b, w\cdot\nabla w)\|_{L^2} + \|\dot{\Delta}_j h\|_{L^2}\big) d\tau. \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

将 (4.3.9) 乘以 $2^{j(\frac{d}{2}-1)}$, 在 $[0,t]$ 上关于时间取上界然后再对 $j\le 0$ 求和, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\tau^{\theta}(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau+\|\tau^{\theta}au\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\quad+\|\tau^{\theta}(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}h\|^{\ell}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}.
\end{aligned}\tag{4.3.10}$$

值得强调的是, 不等式 (4.3.10) 右侧第一个形式的估计是建立最优时间衰减估计的关键. 由 (4.5.1) 以及 (4.5.2), 如下时-空插值不等式成立:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(a,u,b,w)^{\ell}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau\\
&\lesssim\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(a,u,b,w)^{\ell}\|^{\frac{2}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\|(a,u,b,w)^{\ell}\|^{\frac{\frac{d}{2}-1-\sigma_0}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,\infty}}d\tau\\
&\lesssim\Big(t^{\theta-\frac12(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)}\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\Big)^{\frac{2}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}\Big(\|\tau^{\theta}(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)^{\frac{\frac{d}{2}-1-\sigma_0}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}.
\end{aligned}\tag{4.3.11}$$

又由 (4.5.1), 我们易证

$$\begin{aligned}
\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(a^h,u^h)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau&\lesssim\Big(t^{\theta-\theta_0}\|a\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\Big)^{\frac{2}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}\Big(\|\tau^{\theta}a\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\Big)^{\frac{\frac{d}{2}-1-\sigma_0}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}\\
&\quad+\Big(t^{\theta-\theta_0}\|u\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\Big)^{\frac{2}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}\Big(\|\tau^{\theta}u\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)^{\frac{\frac{d}{2}-1-\sigma_0}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}.
\end{aligned}\tag{4.3.12}$$

类似地, 我们有

$$\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(b,w)^h\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau\lesssim\Big(t^{\theta-\theta_0}\|(b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)^{\frac{2}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}\Big(\|\tau^{\theta}(b,w)\|^{h}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)^{\frac{\frac{d}{2}-1-\sigma_0}{\frac{d}{2}+1-\sigma_0}}.\tag{4.3.13}$$

结合 (4.3.11)-(4.3.13) 以及 Young 不等式, 对一个待选取的小常数 $\eta>0$, 我们得到

$$\begin{aligned}
\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau&\lesssim\int_0^t\tau^{\theta-1}\big(\|(a,u,b,w)^{\ell}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|(a,u,b,w)^{h}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\big)d\tau\\
&\lesssim\frac{X_1(t)+X_{1,\sigma_0}(t)}{\eta}t^{\theta-\theta_0}+\eta D_{1,\theta}(t).
\end{aligned}\tag{4.3.14}$$

类似于命题 4.2.3 的证明, 不等式 (4.3.9) 右侧的非线性形式可由如下估计:

$$\begin{aligned}&\|\tau^\theta au\|_{L^1_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\|\tau^\theta(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}\\&\lesssim\|(a,u,w)\|_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}\|\tau^\theta(u,b,w)\|_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}\lesssim X_1(t)D_{1,\theta}(t),\end{aligned}\tag{4.3.15}$$

以及

$$\begin{aligned}\|\tau^\theta h\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}&\lesssim\|h_1\|_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}\|\tau^\theta a\|_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\|h_2\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}\|\tau^\theta u\|_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}\\&\quad+\|h_3\|_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}\|\tau^\theta(u-w)\|_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}\lesssim X_1(t)D_{1,\theta}(t).\end{aligned}\tag{4.3.16}$$

结合 (4.3.10)-(4.3.16), 我们有

$$\begin{aligned}&\|\tau^\theta(a,u,b,w)\|^\ell_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|\tau^\theta(a,u,b,w)\|^\ell_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}\\&\lesssim\frac{X_1(t)+X_{1,\sigma_0}(t)}{\eta}t^{\theta-\theta_0}+\big(\eta+X_1(t)\big)D_{1,\theta}(t)\end{aligned}\tag{4.3.17}$$

最后, 我们将不等式 (4.2.21) 乘以 $t^{2\theta}$ 得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(t^{2\theta}\|\dot\Delta_j(u-w)\|^2_{L^2}\big)+t^{2\theta}\|\dot\Delta_j(u-w)\|^2_{L^2}\\&\lesssim t^{2\theta-1}\|\dot\Delta_j(u-w)\|^2_{L^2}\\&\quad+t^\theta\big(2^j\|\dot\Delta_j(a,u,b)\|_{L^2}+\|\dot\Delta_j(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot\Delta_jh\|_{L^2}\big)t^\theta\|\dot\Delta_j(u-w)\|_{L^2},\end{aligned}\tag{4.3.18}$$

类似于 (4.2.31)-(4.2.33) 的计算过程, 我们由 (4.3.14)-(4.3.18) 易证得

$$\begin{aligned}&\|\tau^\theta(u-w)\|^\ell_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|\tau^\theta(u-w)\|^\ell_{L^1_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}\\&\lesssim\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(u,w)\|^\ell_{\dot B^{\frac d2-1}_{2,1}}d\tau+\|\tau^\theta(a,u,b)\|^\ell_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}+\|\tau^\theta(u,w)\|^\ell_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\&\quad+\|\tau^\theta(a,u,b)\|^\ell_{\widetilde L^1_t(\dot B^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\|\tau^\theta(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|^\ell_{\widetilde L^1_t(\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|\tau^\theta h\|^\ell_{\widetilde L^1_t(\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}\\&\lesssim\frac{X_1(t)+X_{1,\sigma_0}(t)}{\eta}t^{\theta-\frac12(\frac d2-1-\sigma_0)}+\big(\eta+X_1(t)\big)D_{1,\theta}(t).\end{aligned}\tag{4.3.19}$$

由 (4.3.17) 和 (4.3.19), (4.3.8) 成立. 引理 4.3.2 证毕. □

关于高频时间加权估计, 我们有如下引理.

引理 4.3.3. 在定理 1.3.16 的假设下, 对 $\sigma_0\in[-\frac d2,\frac d2-1)$ 及 $\theta>1+\frac12(\frac d2-1-\sigma_0)>1$, 若

(a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体解, 则 (a,u,b,w) 满足以下估计:

$$\begin{aligned}&\|\tau^\theta(\nabla a,u)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\tau^\theta(b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^\theta a\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\tau^\theta(u,b,w)\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\quad\lesssim\frac{X_1(t)+X_{1,\sigma_0}(t)}{\eta}t^{\theta-\frac12(\frac d2-1-\sigma_0)}+\big(\eta+X_1(t)\big)D_{1,\theta}(t),\quad t>0,\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

其中 $X_1(t)$、$X_{1,\sigma_0}(t)$ 以及 $D_{1,\theta}(t)$ 分别由 (4.2.2)、(4.3.2) 及 (4.3.7) 给出, $\eta>0$ 为待选取的小常数.

证明. 对 $j\geq-1$, 我们将 (4.2.47) 乘以 t^θ 得到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(t^\theta E^H_{NSE,j}(t)\big)+t^\theta E^H_{NSE,j}(t)\\&\lesssim t^{\theta-1}E^H_{NSE,j}(t)+t^\theta\big(\|\dot{\Delta}_j(\mathrm{div}\,(au),u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jh\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\nabla\dot{\Delta}_ja\|_{L^2}\\&\quad+\|\nabla\dot{\Delta}_j(a\mathrm{div}\,u)\|_{L^2}+\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla u\|_{L^2}+\sum_{k=1}^d\|[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla a\|_{L^2}\big)\sqrt{E^H_{NSE,j}(t)}.\end{aligned}$$

我们对上式直接计算后有

$$\begin{aligned}&\|\tau^\theta(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|\tau^\theta(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac d2-1}_{2,1})}\\&\lesssim\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\dot{B}^{\frac d2-1}_{2,1}}d\tau+\|\tau^\theta(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|\tau^\theta au\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac d2}_{2,1})}\\&\quad+\|\mathrm{div}\,u\|_{L^1_t(L^\infty)}\|\tau^\theta a\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac d2}_{2,1})}+\|\tau^\theta a\mathrm{div}\,u\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac d2}_{2,1})}+\|\tau^\theta h\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac d2-1}_{2,1})}\\&\quad+\sum_{j\geq-1}2^{j(\frac d2-1)}\big(\|[u\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j]\tau^\theta u\|_{L^1_t(L^2)}+\sum_{k=1}^d\|[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla\tau^\theta a\|_{L^1_t(L^2)}\big).\end{aligned}\tag{4.3.21}$$

类似于 (4.3.11)-(4.3.13) 的论证过程, 对待选取的小常数 $\eta>0$, 我们可证

$$\begin{aligned}&\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\dot{B}^{\frac d2-1}_{2,1}}d\tau\\&\lesssim\Big(t^{\theta-\frac12(\frac d2-1-\sigma_0)}\big(\|(\nabla a,u)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|(b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac d2+1}_{2,1})}\big)\Big)^{\frac{2}{\frac d2+1-\sigma_0}}\\&\quad\times\Big(\|\tau^\theta a\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac d2}_{2,1})}+\|\tau^\theta(u,b,w)\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac d2+1}_{2,1})}\Big)^{\frac{\frac d2-1-\sigma_0}{\frac d2+1-\sigma_0}}\\&\lesssim\frac{X_1(t)}{\eta}t^{\theta-\theta_0}+\eta D_{1,\theta}(t).\end{aligned}\tag{4.3.22}$$

与 (4.2.49)-(4.2.50) 类似, 下述估计成立:

$$\begin{cases}\|\tau^{\theta}a\mathrm{div}\,u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\tau^{\theta}u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_1(t)D_{1,\theta}(t),\\ \|\mathrm{div}\,u\|_{L^1_t(L^\infty)}\|\tau^{\theta}a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\tau^{\theta}a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim X_1(t)D_{1,\theta}(t),\\ \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\|[u\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j]\tau^{\theta}u\|_{L^1_t(L^2)}\lesssim\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\tau^{\theta}u\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\lesssim X_1(t)D_{1,\theta}(t),\\ \sum\limits_{k=1}^{d}\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\|[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla\tau^{\theta}a\|_{L^1_t(L^2)}\lesssim\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\tau^{\theta}a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim X_1(t)D_{1,\theta}(t).\end{cases}\tag{4.3.23}$$

将 (4.3.15)-(4.3.16) 以及 (4.3.22)-(4.3.23) 代入 (4.3.21), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|\tau^{\theta}(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&\lesssim\frac{X_1(t)}{\eta}t^{\theta-\theta_0}+\big(\eta+X_1(t)\big)D_{1,\theta}(t).\end{aligned}\tag{4.3.24}$$

下面, 将 (4.2.52) 乘以 t^{θ}, 我们得到

$$(t^{\theta}u)_t-\Delta(t^{\theta}u)=\theta t^{\theta-1}u-\nabla(t^{\theta}a)+t^{\theta}w-t^{\theta}u-t^{\theta}u\cdot\nabla u+t^{\theta}h.\tag{4.3.25}$$

由扩散方程 (4.3.25) 的最优正则性估计 (4.5.12) 以及事实 $t^{\theta}u|_{t=0}=0$, 我们有

$$\begin{aligned}\|\tau^{\theta}u\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim&\int_0^t\tau^{\theta-1}\|u\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}d\tau+\|\tau^{\theta}a\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}(w,u)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\&+\|\tau^{\theta}(u\cdot\nabla u)\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}G\|^h_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})},\end{aligned}$$

从而, 我们结合上式、(4.3.12)、(4.3.15)-(4.3.16)、(4.3.22) 以及 (4.3.24) 推断出

$$\|\tau^{\theta}u\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim\frac{X_1(t)}{\eta}t^{\theta-\theta_0}+\eta D_{1,\theta}(t)+X_1(t)D_{1,\theta}(t).\tag{4.3.26}$$

最后, 对 $j\geq-1$, 我们将 (4.2.34) 乘以 t^{θ} 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(t^{\theta}E^H_{Euler,j}(t)\big)+t^{\theta}E^H_{Euler,j}(t)\\&\lesssim t^{\theta-1}E^H_{Euler,j}(t)+t^{\theta}\big(\|\dot{\Delta}_ju\|_{L^2}+\|\mathrm{div}\,w\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}\\&\quad+2^{-j}\|\dot{\Delta}_j(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|[w\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j](b,w)\|_{L^2}\big)\sqrt{E^H_{Euler,j}(t)}.\end{aligned}$$

根据上式以及 (4.2.54), 以下估计成立:

$$
\begin{aligned}
&\|\tau^{\theta}(b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}(b,w)\|^{h}_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim\int_{0}^{t}\tau^{\theta-1}\|(b,w)\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau+\|\tau^{\theta}u\|^{h}_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\operatorname{div}w\|_{L^{\infty}_{t}(L^{\infty})}\|\tau^{\theta}(b,w)\|^{h}_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\quad+\|\tau^{\theta}(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|^{h}_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\int_{0}^{t}\sum_{j\geq-1}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|[w\cdot\nabla,\dot{\Delta}_{j}]\tau^{\theta}(b,w)\|_{L^{2}}d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.27}
$$

与 (4.3.11) 的计算类似, 我们易证

$$
\int_{0}^{t}\tau^{\theta-1}\|(b,w)\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau\lesssim\frac{X_{1}(t)}{\eta}t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_{0})}+\eta D_{1,\theta}(t).
\tag{4.3.28}
$$

又由 (4.5.5), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\|\operatorname{div}w\|_{L^{\infty}_{t}(L^{\infty})}\|\tau^{\theta}(b,w)\|_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\lesssim\|w\|_{\widetilde{L}^{\infty}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\tau^{\theta}(b,w)\|_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_{1}(t)D_{1,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{4.3.29}
$$

我们从 $(4.5.7)_1$ 可知

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{t}\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|[w\cdot\nabla,\dot{\Delta}_{j}]\tau^{\theta}(b,w)\|_{L^{2}}d\tau\\
&\lesssim\|w\|_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|\tau^{\theta}(b,w)\|_{\widetilde{L}^{\infty}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_{1}(t)D_{1,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{4.3.30}
$$

因而, 根据 (4.3.26)-(4.3.30), 下述估计成立:

$$
\begin{aligned}
&\|\tau^{\theta}(b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}(b,w)\|^{h}_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim\frac{X_{1}(t)+X_{1,\sigma_{0}}(t)}{\eta}t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_{0})}+\big(\eta+X_{1}(t)\big)D_{1,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{4.3.31}
$$

将 (4.3.24)、(4.3.26)-(4.3.27) 及 (4.3.31) 联立, 我们有 (4.3.20). 引理 4.3.3 证毕. □

定理 1.3.16 的证明: 在定理 1.3.16 的假设下, 如果 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的一个整体解, 则根据引理 4.3.2-4.3.3, 对任意 $\theta>1+\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_{0})>1$ 及 $\eta>0$, 如下时间加权能量估计成立:

$$
D_{1,\theta}(t)\lesssim\frac{X_{1}(t)+X_{1,\sigma_{0}}(t)}{\eta}t^{\theta-\theta_{0}}+\big(\eta+X_{1}(t)\big)D_{1,\theta}(t),\quad t>0.
\tag{4.3.32}
$$

从而, 我们选取一个充分小的常数 $\eta>0$, 并利用 (4.3.32)、$X_1(t)\lesssim X_1(0)<<1$ 及 (4.3.1) 得到

$$\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\dot B^{\frac d2-1}_{2,1}}+\|a\|^{h}_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}+\|u\|^{h}_{\dot B^{\frac d2-1}_{2,1}}+\|(b,w)\|^{h}_{\dot B^{\frac d2+1}_{2,1}}\lesssim t^{-\frac12(\frac d2-1-\sigma_0)},\quad t\geq 1.$$

上式与 $X_1(t)\lesssim X_1(0)$ $(t\in[0,1])$ 联立, 我们有

$$\begin{aligned}\|(a,u,b,w)(t)\|_{\dot B^{\frac d2-1}_{2,1}}&\lesssim\|(a,u,b,w)(t)\|^{\ell}_{\dot B^{\frac d2-1}_{2,1}}+\|a(t)\|^{h}_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}+\|u(t)\|^{h}_{\dot B^{\frac d2-1}_{2,1}}+\|(b,w)(t)\|^{h}_{\dot B^{\frac d2+1}_{2,1}}\\&\lesssim(1+t)^{\theta-\frac12(\frac d2-1-\sigma_0)},\quad t>0.\end{aligned}\tag{4.3.33}$$

对方程 (4.3.25) 应用最优正则性估计 (4.5.12) 并结合 (4.3.15)-(4.3.16) 和 (5.3.24), 我们有以下估计:

$$\begin{aligned}\|\tau^{\theta}u\|^{h}_{\widetilde L^{\infty}_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}&\lesssim\|u(1)\|^{h}_{\dot B^{\frac d2-1}_{2,1}}+\|\tau^{\theta-1}u\|^{h}_{\widetilde L^{\infty}(1,t;\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|\nabla(\tau^{\theta}a)\|^{h}_{\widetilde L^{\infty}(1,t;\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}\\&\quad+\|\tau^{\theta}(w,u)\|^{h}_{\widetilde L^{\infty}(1,t;\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}u\cdot\nabla u\|^{h}_{\widetilde L^{\infty}(1,t;\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}G\|^{h}_{\widetilde L^{\infty}(1,t;\dot B^{\frac d2-1}_{2,1})}\\&\lesssim X_1(t)+D_{1,\theta}(t)+X_1(t)D_{1,\theta}(t)\lesssim t^{\theta-\frac12(\frac d2-1-\sigma_0)},\end{aligned}$$

从而, 我们得到

$$\|u(t)\|^{h}_{\dot B^{\frac d2+1}_{2,1}}\lesssim(1+t)^{\frac12(\frac d2-1-\sigma_0)},\quad t\geq 1.\tag{4.3.34}$$

此外, 利用 (4.5.2)、(4.3.1) 及 (4.3.33), 我们对 $\sigma\in(\sigma_0,\frac d2-1)$ 可证

$$\begin{aligned}&\|(a,u,b,w)^{\ell}(t)\|_{\dot B^{\sigma}_{2,1}}\\&\lesssim\|(a,u,b,w)^{\ell}(t)\|_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}^{\frac{\frac d2-1-\sigma}{\frac d2-1-\sigma_0}}\|(a,u,b,w)^{\ell}(t)\|_{\dot B^{\frac d2-1}_{2,1}}^{\frac{\sigma-\sigma_0}{\frac d2-1-\sigma_0}}\lesssim(1+t)^{-\frac12(\sigma-\sigma_0)}.\end{aligned}\tag{4.3.35}$$

根据 (4.3.33)-(4.3.35), 最优时间衰减速率 (1.3.29) 成立.

下面, 我们证明相对速度 $u-w$ 最优时间衰减估计 (1.3.30). 注意到方程 (4.2.29) 可改写为

$$u-w=e^{-2t}(u_0-w_0)+\int_0^t e^{-2(\tau-t)}\big(-\nabla a+\Delta u+-u\cdot\nabla u+w\cdot\nabla w+h\big)d\tau.\tag{4.3.36}$$

对 (4.3.36) 取 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 范数并利用 (1.3.29), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\|u-w\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} \lesssim\, & e^{-2t}\|(u_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} \\
& + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\big(\|(a,u,b)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}} + \|(u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} + \|h\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\big)d\tau.
\end{aligned} \tag{4.3.37}
$$

根据 (4.2.24)、(4.3.1)、(4.3.33) 和 (4.5.6), 我们有

$$
\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\|(a,u,b)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}} d\tau \lesssim (1+t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)\}}, \tag{4.3.38}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\|(u\cdot\nabla u, w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} + \|h\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\big)d\tau \\
&\lesssim \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\big(\|(a,u,w)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|(a,u,w)\|_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,1}} + \|(a,b)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u-w\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\big)d\tau \\
&\lesssim \Big(\int_0^t e^{-4(t-\tau)}\|(a,u,w)\|^2_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,1}}d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}\|(a,u,w)\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \\
&\quad + \big(\int_0^t e^{-4(t-\tau)}\big(\|(a,b)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + \|a\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|b\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\big)^2 d\tau\big)^{\frac{1}{2}}\|u-w\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})} \\
&\lesssim (1+t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-1-\sigma_0)\}}.
\end{aligned} \tag{4.3.39}
$$

从而, 我们由 (4.3.37)-(4.3.39) 得到 (1.3.30). 对 $d\geq 3$ 和 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-2)$ 时, 我们可以通过类似的计算证明 (1.3.31). 该证明从略. 定理 1.3.16 证毕.

4.4 定理 1.3.18 的证明

在本节, 受到 [70,229] 的启发, 我们证明柯西问题 4.1.1 整体解的最优衰减估计 (1.3.33). 对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$ 及任意小的 $\varepsilon_1\in(0,1)$, 我们引入时间加权能量泛函

$$
\begin{aligned}
Z_1(t) :=& \sup_{\sigma\in[\sigma_0+\varepsilon_1,\frac{d}{2}+1]}\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\sigma}_{2,1})} \\
& + \|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}(\nabla a,u)\|^{h}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\tau^{\sigma_h}u\|^{h}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}(b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
& + \|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}}(u-w)\|^{\ell}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})} + \sup_{\sigma\in[\sigma_0+\varepsilon_1,\frac{d}{2}]}\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}(u-w)\|^{\ell}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\sigma}_{2,1})}.
\end{aligned} \tag{4.4.1}
$$

如下不等式将在非线性估计中频繁使用:

$$\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\langle\tau\rangle^{-\theta}d\tau \lesssim \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}, \quad 0\le \frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\le\theta, \quad \theta>1. \tag{4.4.2}$$

我们首先对解 (a,u,b,w) 建立高频时间加权估计.

引理 4.4.1. 设 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体解, 则在定理 1.3.18 的假设下, 对任意小的 $\varepsilon_1\in(0,1)$, (a,u,b,w) 有以下时间加权估计:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\sigma\in[\sigma_0+\varepsilon_1,\frac{d}{2}+1]}\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}(a,u,b,w)\|^{\ell}_{L^\infty_t(\dot B^{\sigma}_{2,1})}\\
&\qquad\lesssim \|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1(0)+X_1^2(t)+Z^2(t), \quad t>0,
\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

其中 $X_1(t)$ 及 $Z_1(t)$ 由 (4.2.2) 及 (4.4.1) 给出.

证明. 对 (4.2.21) 用 Grönwall 不等式, 我们得

$$\begin{aligned}
&\|\dot\Delta_j(a,u,b,w)\|_{L^2}\\
&\quad\lesssim e^{-2^{2j}t}\|\dot\Delta_j(a_0,u_0,b_0,w_0)\|_{L^2}\\
&\qquad+\int_0^t e^{-2^{2j}(t-\tau)}\big(\|\dot\Delta_j(\mathrm{div}\,(au),u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|\dot\Delta_j h\|_{L^2}\big)d\tau.
\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

上式揭示了对任意 $\sigma>\sigma_0$, (a,u,b,w) 满足

$$\begin{aligned}
&\|(a,u,b,w)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma}_{2,1}}\\
&\lesssim \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\int_0^t\langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\big(\|au\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}\\
&\quad+\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|h_1\nabla a\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma}_{2,\infty}}+\|h_2\Delta u\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma}_{2,\infty}}+\|h_3(u-w)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma}_{2,\infty}}\big)d\tau.
\end{aligned}\tag{4.4.5}$$

为了控制不等式 (4.4.5) 右侧的第一个非线性项, 我们对情形 $t\le 2$ 及 $t\ge 2$ 分别讨论. 对情形 $t\le 2$, 我们利用 (4.5.1)、(4.5.6) 及 $\langle t\rangle\sim 1$ 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|au\|_{\dot B^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}d\tau\\
&\quad\lesssim\|a\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\big(\|u\|^{\ell}_{L^\infty_t(\dot B^{\sigma_0+1}_{2,1})}+\|u\|^{h}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)\lesssim\big(X_1(t)Z_1(t)+X_1^2(t)\big)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}.
\end{aligned}\tag{4.4.6}$$

对情形 $t\ge 2$, 我们作如下分解:

$$\int_0^t\langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|au\|_{\dot B^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}d\tau=\Big(\int_0^1+\int_1^t\Big)\langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|au\|_{\dot B^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}d\tau.$$

利用 (4.5.6) 及事实 $\langle t-\tau\rangle \sim \langle t\rangle$ ($\tau\in[0,1]$), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|au\|_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}d\tau\\&\quad\lesssim \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\int_0^1 \|a\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u\|_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}d\tau \lesssim \big(X_1(t)Z_1(t)+X_1^2(t)\big)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}.\end{aligned}\tag{4.4.7}$$

此外, 注意到对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$ 及 $\sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}+1]$, 以下事实成立:

$$\frac{1}{2}(\frac{d}{2}+1-\sigma_0)>1,\quad 0\le \frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\le \frac{1}{2}(\frac{d}{2}+1-\sigma_0),$$

从而我们用 $au=a^\ell u^\ell+a^h u^\ell+a^\ell u^h+a^h u^h$、(4.4.2)、(4.5.1)、(4.5.6) 及 $\tau^{-1}\lesssim\langle\tau\rangle^{-1}$ ($\tau\ge1$) 得到

$$\begin{aligned}&\int_1^t \langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|au\|_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}d\tau\\&\quad\lesssim \int_1^t \langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\big(\|a\|^\ell_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u\|^\ell_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,1}}+\|a\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u\|^\ell_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,1}}+\|a\|^\ell_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\\&\qquad+\|a\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\big)d\tau\\&\quad\lesssim Z^2(t)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}.\end{aligned}\tag{4.4.8}$$

将上式与 (4.4.6)-(4.4.7) 结合, 对 $\sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}+1]$, 我们有

$$\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|au\|_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}d\tau\lesssim\big(Z^2(t)+X_1^2(t)\big)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)},\quad t>0.\tag{4.4.9}$$

类似地, 以下估计成立:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\big(\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|h_1\nabla a\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,\infty}}+\|h_2\Delta u\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,\infty}}\big)d\tau\\&\quad\lesssim\big(Z^2(t)+X_1^2(t)\big)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)},\quad t>0.\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

值得强调的是, 不等式 (4.4.5) 中最后一个非线性形式与其他非线性形式相比缺少一阶导数, 因而若我们利用解 (a,u,b,w) 的衰减速率控制该非线性项, 则其衰减速率会下降 $\langle t\rangle^{\frac{1}{2}}$. 为此, 根据 (4.5.6)、(4.5.9) 及 $X_1(t)\lesssim X_1(0)<<1$, 以下估计成立:

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|h_3(u-w)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,\infty}}d\tau\\&\quad\lesssim\int_0^t \langle t-\tau\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}\|(a,b)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u-w\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}d\tau\lesssim Z^2(t)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)},\quad t>0,\end{aligned}\tag{4.4.11}$$

此处我们用到了关键事实

$$
\begin{aligned}
&\|(a,b)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u-w\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\\
&\lesssim \big(\|(a,b)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|a\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|b\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\big)\big(\|u-w\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|u\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|w\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\big)\\
&\lesssim Z^2(t)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}+1-\sigma_0)}.
\end{aligned}
$$

将 (4.4.9)-(4.4.11) 联立, 我们得到 (4.4.3). □

其次, 我们对解 (a,u,b,w) 建立高频时间加权估计.

引理 4.4.2. 对任意小的常数 $\varepsilon_1\in(0,1)$, 设 $\sigma_h:=\frac{1}{2}(d+1-2\sigma_0-2\varepsilon_1)$. 若 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体解, 那么在定理 1.3.18 的假设下, 以下估计成立:

$$
\begin{aligned}
&\|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}a\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}u\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\tau^{\sigma_h}u\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}(b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1(0)+X_1^2(t)+Z^2(t),\quad t>0,
\end{aligned}
\tag{4.4.12}
$$

其中 $X_1(t)$ 及 $Z_1(t)$ 分别由 (4.2.2) 及 (4.4.1) 给出.

证明. 首先, 对 $j\geq -1$, 对 (4.2.47) 应用 Grönwall 不等式, 我们得到

$$
\|\dot{\Delta}_j(\nabla a,u,b,w)\|_{L^2}\lesssim e^{-t}\|\dot{\Delta}_j(\nabla a_0,u_0,b_0,w_0)\|_{L^2}+\int_0^t e^{-(t-\bar{\tau})}\sum_{i=1}^{6}S_{i,j}d\bar{\tau},
$$

其中

$$
\begin{cases}
S_{1,j}:=2^j\|\dot{\Delta}_j(au)\|_{L^2}, & S_{2,j}:=\|\dot{\Delta}_j(u\cdot\nabla u)\|_{L^2},\\
S_{3,j}:=\|\dot{\Delta}_j h\|_{L^2}, & S_{4,j}:=\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\nabla\dot{\Delta}_j a\|_{L^2},,\\
S_{5,j}:=\|\nabla\dot{\Delta}_j(\nabla a\,\mathrm{div}\,u)\|_{L^2}, & S_{6,j}:=\|[u,\dot{\Delta}_j]\nabla u\|_{L^2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\|[u,\partial_k\dot{\Delta}_j]\nabla a\|_{L^2}.
\end{cases}
$$

因而, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}(\nabla a,u,b,w)\|^{h}_{\widetilde{L}^{\infty}_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(\nabla a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{h}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\sum_{j\geq-1}\sup_{\tau\in[0,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^{\tau}e^{-(\tau-\bar{\tau})}2^{j(\frac{d}{2}-1)}\sum_{i=1}^{6}S_{i,j}d\bar{\tau}.
\end{aligned}
\tag{4.4.13}
$$

为了控制不等式 (4.4.13) 右侧的非线性形式, 我们对情形 $t\leq 2$ 及情形 $t\geq 2$ 分别估计. 对情

形 $t \leq 2$, 我们易证

$$\sum_{j\geq -1}\sup_{\tau\in[0,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^\tau e^{-(\tau-\bar{\tau})}2^{j(\frac{d}{2}-1)}(S_{1,j}+S_{2,j})d\bar{\tau}$$
$$\lesssim\int_0^t\left(\|au\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|u\cdot\nabla u\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}\right)d\tau\lesssim\|(a,u)\|_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u\|_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim X_1^2(t).$$

对情形 $t\geq 2$, 我们将时间积分区域 $[0,t]$ 分解为 $[0,1]$ 和 $[1,t]$ 分别讨论. 对在 $[0,1]$ 上积分区域的部分, 我们有

$$\sum_{j\geq -1}\sup_{\tau\in[2,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^1 e^{-(\tau-\bar{\tau})}(S_{1,j}+S_{2,j})d\bar{\tau}\lesssim X_1^2(1).$$

为了估计在 $[1,t]$ 上积分区域的部分, 根据 (4.5.1)、(4.5.4) 以及

$$\begin{cases}\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0+\varepsilon_1)}(a^\ell,u^\ell)\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0+\varepsilon_1)}(a,u)\|^\ell_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-\varepsilon_1}_{2,1})},\\ \|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}+1-\sigma_0+\varepsilon_1)}(a^\ell,u^\ell)\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}+1-\sigma_0+\varepsilon_1)}(a,u)\|^\ell_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1-\varepsilon_1}_{2,1})},\end{cases}\tag{4.4.14}$$

我们有

$$\begin{aligned}&\|\tau^{\sigma_h}a^\ell u^\ell\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\tau^{\sigma_h}u^\ell\cdot\nabla u^\ell\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\ &\lesssim\|\tau^{\sigma_h}a^\ell u^\ell\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^{\sigma_h}u^\ell\cdot\nabla u^\ell\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\ &\lesssim\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}+1-\sigma_0+\varepsilon_1)}(a^\ell,u^\ell)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}+1-\sigma_0+\varepsilon_1)}(a,u)\|^\ell_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\lesssim Z^2(t).\end{aligned}\tag{4.4.15}$$

值得注意的是, 由于 (4.4.14)-(4.4.14), 解 (a,u,b,w) 高频部分的时间衰减为 $\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(d+1-2\sigma_0-2\varepsilon_1)}$ 而非 $\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(d+1-2\sigma_0)}$. 另外, 利用 (4.5.4)-(4.5.5), 我们得到

$$\begin{aligned}&\|\tau^{\sigma_h}a^h u^\ell\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\tau^{\sigma_h}au^h\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\ &\lesssim\|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}a\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u\|^\ell_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|a\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|\tau^{\sigma_h}u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim Z_1(t)X_1(t),\end{aligned}\tag{4.4.16}$$

以及

$$\begin{aligned}&\|\tau^{\sigma_h}u^h\cdot\nabla u^\ell\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\tau^{\sigma_h}u\cdot\nabla u^h\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\\ &\lesssim\|\tau^{\sigma_h}u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u\|^\ell_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}+\|\tau^{\sigma_h}u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}\lesssim Z_1(t)X_1(t).\end{aligned}\tag{4.4.17}$$

对情形 $t \geq 2$ 在 $[1,t]$ 上的时间积分, 我们通过 (4.4.15)-(4.4.17) 可证

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\geq -1} \sup_{\tau\in[2,t]} \langle\tau\rangle^{\sigma_h} \int_1^\tau e^{-(\tau-\bar{\tau})}(S_{1,j}+S_{2,j})d\bar{\tau} \\
&\lesssim \left(\|\tau^{\sigma_h} au\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\tau^{\sigma_h} u\cdot\nabla u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\right) \sup_{\tau\in[2,t]} \langle\tau\rangle^{\sigma_h} \int_1^\tau e^{-(\tau-\bar{\tau})}\bar{\tau}^{-\sigma_h} d\bar{\tau} \\
&\lesssim X_1^2(t) + X_1(t)Z_1(t).
\end{aligned}
$$

因而, 我们得到

$$
\sum_{j\geq -1} \sup_{\tau\in[0,t]} \langle\tau\rangle^{\sigma_h} \int_0^t e^{-(\tau-\bar{\tau})}(S_{1,j}+S_{2,j})d\tau \lesssim X_1^2(t) + Z^2(t), \quad t>0. \tag{4.4.18}
$$

类似于 (4.4.18) 的论证过程, 我们有

$$
\sum_{j\geq -1} \sup_{\tau\in[0,t]} \langle\tau\rangle^{\sigma_h} \int_0^t e^{-(\tau-\bar{\tau})} \sum_{i=3}^6 S_{i,j} d\tau \lesssim X_1^2(t) + Z^2(t), \quad t>0. \tag{4.4.19}
$$

为了简单起见, 我们省略 (4.4.19) 的证明. 将 (4.4.18)-(4.4.19) 代入 (4.4.13), 我们得到

$$
\|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}(\nabla a,u,b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim \|(\nabla a_0,u_0,b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + X_1^2(t) + Z^2(t), \quad t>0. \tag{4.4.20}
$$

下一步, 我们证明 u 在 $\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}$ 中的时间衰减估计. 我们对扩散方程 (4.3.25) ($\theta=\sigma_h>1$) 应用最优正则性估计 (4.5.12) 可得

$$
\begin{aligned}
\|\tau^{\sigma_h} u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim{}& \|\tau^{\sigma_h-1} u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \|\tau^{\sigma_h} a\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\tau^{\sigma_h}(u,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \\
&+ \|\tau^{\sigma_h} u\cdot\nabla u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \|\tau^{\sigma_h} h\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}.
\end{aligned} \tag{4.4.21}
$$

我们易知

$$
\|\tau^{\sigma_h-1} u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim \|\langle\tau\rangle^{\sigma_h} u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})}. \tag{4.4.22}
$$

类似于 (4.4.15)-(4.4.17), 以下估计成立:

$$
\|\tau^{\sigma_h} u\cdot\nabla u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} + \|\tau^{\sigma_h} h\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})} \lesssim X_1^2(t) + Z^2(t). \tag{4.4.23}
$$

结合 (4.4.20)-(4.4.23), 我们得到

$$
\|\tau^{\sigma_h} u\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim \|(\nabla a_0,u_0,b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}} + X_1^2(t) + Z^2(t). \tag{4.4.24}
$$

最后, 我们利用 (4.4.24) 以及可压缩 Euler 方程组 $(4.1.1)_3$-$(4.1.1)_4$ 的特性来证明 (b,w) 在 $\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}$ 中的衰减估计. 对 (4.2.56) 利用 Grönwall 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}(b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim \|(b_0,w_0)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\sum_{j\geq -1}\sup_{\tau\in[0,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^\tau e^{-(\tau-\bar{\tau})}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\big(\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}\\
&\qquad+\|\mathrm{div}\, w\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}+2^{-j}\|\dot{\Delta}_j(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|[w\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j](b,w)\|_{L^2}\big)d\bar{\tau}.
\end{aligned}$$

对 $t\leq 2$, 我们注意到

$$\sum_{j\geq -1}\sup_{\tau\in[0,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^\tau e^{-(\tau-\bar{\tau})}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}d\bar{\tau}\lesssim\|u\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})},$$

以及对 $t\geq 2$, 如下估计成立:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq -1}\sup_{\tau\in[0,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^\tau e^{-(\tau-\bar{\tau})}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}d\bar{\tau}\\
&\lesssim\sum_{j\geq -1}\Big(\sup_{\tau\in[0,1]}\int_0^\tau+\sup_{\tau\in[1,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^1+\sup_{\tau\in[1,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_1^\tau\Big)e^{-(\tau-\bar{\tau})}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}d\bar{\tau}\\
&\lesssim\|u\|^h_{L^1_1(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^{\sigma_h}u\|^h_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.
\end{aligned}$$

根据上式及 (4.4.24), 我们推出

$$\sum_{j\geq -1}\sup_{\tau\in[0,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^\tau e^{-(\tau-\bar{\tau})}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}d\bar{\tau}\lesssim\|(\nabla a_0,u_0,b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+X_1^2(t)+Z^2(t).$$

由 (4.5.4) 及 (4.5.7), 我们通过直接计算得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq -1}\sup_{\tau\in[0,t]}\langle\tau\rangle^{\sigma_h}\int_0^\tau e^{-(\tau-\bar{\tau})}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\big(\|\mathrm{div}\, w\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(b,w)\|_{L^2}\\
&\qquad+2^{-j}\|\dot{\Delta}_j(w\cdot\nabla b,w\cdot\nabla w)\|_{L^2}+\|[w\cdot\nabla,\dot{\Delta}_j](b,w)\|_{L^2}\big)d\bar{\tau}\lesssim Z^2(t)+X_1(t)Z_1(t).
\end{aligned}$$

因而, 如下估计成立:

$$\|\langle\tau\rangle^{\sigma_h}(b,w)\|^h_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim\|(\nabla a_0,u_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}+\|(b_0,w_0)\|^h_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+X_1^2(t)+Z^2(t).\tag{4.4.25}$$

我们联立 (4.4.20) 及 (4.4.24)-(4.4.25) 得到 (4.4.12). 引理 4.4.2 证毕. □

下面, 我们在低频对相对速度 $u-w$ 建立的时间加权估计.

引理 4.4.3. 若 (a,u,b,w) 为柯西问题 (4.1.1) 由定理 1.3.14 给出的整体解, 则在定理 1.3.18 的假设下, 相对速度 $u-w$ 满足时间加权估计:

$$
\begin{aligned}
&\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}}(u-w)\|^{\ell}_{L^{\infty}_t(\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\sup_{\sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}]}\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}(u-w)\|^{\ell}_{L^{\infty}_t(\dot B^{\sigma}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1^2(t)+Z^2(t),\quad t>0,
\end{aligned}
\tag{4.4.26}
$$

其中 $X_1(t)$ 及 $Z_1(t)$ 由 (4.2.2) 及 (4.4.1) 定义.

证明. 我们对 (4.3.36) 取低频 $\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 范数后得到

$$
\begin{aligned}
\|u-w\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}\lesssim e^{-2t}\|(u_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\big(\|a\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}+\|u\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0+2}_{2,\infty}}\\
+\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|h\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}\big)d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.4.27}
$$

不等式 (4.4.27) 右侧的非线性项估计如下. 首先, 由 (4.4.3), 我们得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\big(\|a\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}+\|u\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0+2}_{2,\infty}}\big)d\tau\\
&\lesssim\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}}(a,u)\|^{\ell}_{L^{\infty}_t(\dot B^{\sigma_0+1}_{2,1})}\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\langle\tau\rangle^{-\frac{1}{2}}d\tau\\
&\lesssim\big(\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1(0)+Z^2(t)+X_1^2(t)\big)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{4.4.28}
$$

我们又由 (4.5.6) 及 (4.4.3) 可知

$$
\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\big(\|(u\cdot\nabla u,w\cdot\nabla w)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|h\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}\big)d\tau\lesssim\big(X_1^2(t)+Z^2(t)\big)\langle t\rangle^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}+1-\sigma_0)}.
\tag{4.4.29}
$$

将 (4.4.27)-(4.4.29) 联立, 我们得到

$$
\|\langle\tau\rangle^{\frac{1}{2}}(u-w)\|^{\ell}_{\widetilde L^{\infty}_t(\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty})}\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1^2(t)+Z^2(t).
\tag{4.4.30}
$$

类似于 (4.4.30) 的证明, 我们可证

$$
\|\langle\tau\rangle^{\frac{1+\sigma-\sigma_0}{2}}(u-w)\|^{\ell}_{L^{\infty}_t(\dot B^{\sigma}_{2,1})}\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)\|^{\ell}_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1^2(t)+Z^2(t),\quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}].
$$

为简单起见, 上式的证明在此省略. 引理 4.4.3 得证. □

<u>**定理 1.3.18 的证明:**</u> 结合引理 4.4.1-4.4.3 并注意到 (4.3.6), 我们有

$$
Z_1(t)\lesssim\|(a_0,u_0,b_0,w_0)^{\ell}\|_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_1(0)+X_1^2(t)+Z^2(t),\quad t>0.
\tag{4.4.31}
$$

从而, 若 $X_1(0)$ 及 $\|(a_0,u_0,b_0,w_0)^{\ell}\|_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}$ 充分小, 我们可以证明 $Z_1(t)$ 关于时间 $t>0$ 一致有界, 从而时间衰减速率 (1.3.33) 成立.

4.5 附录

本附录包含 Littlewood-Paley 分解以及 Besov 空间的一些概念、记号和性质. 读者可参见 [8][第 2-3 章]. 设 $\chi_*(\xi)$ 为一个光滑球对称非单调递增的函数, 并满足其在 $B(0,\frac{4}{3})$ 中有紧支集, 且在 $B(0,\frac{3}{4})$ 中恒为 1. 因而, 以下性质成立:

$$\varphi(\xi):=\chi_*(\frac{\xi}{2})-\chi_*(\xi),\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi(2^{-j}\cdot)=1,\quad \mathrm{Supp}\ \varphi\subset\{\xi\in\mathbb{R}^d\mid\frac{3}{4}\leq|\xi|\leq\frac{8}{3}\}.$$

对 $j\in\mathbb{Z}$, 齐次二进环形分解算子 $\dot{\Delta}_j$ 以及低频截断算子 $\dot{S}_j$ 定义为

$$\dot{\Delta}_j u:=\mathscr{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\cdot)\mathscr{F}u),\qquad \dot{S}_j u:=\mathscr{F}^{-1}(\chi_*(2^{-j}\cdot)\mathscr{F}u),$$

其中 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{-1}$ 分别表示 Fourier 变换以及其逆变换.

设 S 为 $\mathbb{R}^d$ 上的缓增分布函数空间, 并且

$$S'_h:=\{u\in S'_h\mid u\in S'\text{ 且 }\lim_{j\to-\infty}\|\dot{S}_j u\|_{L^\infty}=0\},$$

从而, 对任意 $u\in S'_h$, 在 S' 中 u 满足

$$u=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\dot{\Delta}_j u,\qquad \dot{S}_j u=\sum_{j'\leq j-1}u_{j'}.$$

借助于齐次二进环形分解, 齐次 Besov 空间定义如下:

定义 4.5.1. [8] 对 $s\in\mathbb{R}$ 及 $p,r\in[1,\infty]$, 齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,r}$ 定义为

$$\dot{B}^s_{p,r}:=\{u\in S'_h\mid\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}:=\|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^p}\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r}<\infty\}.$$

为了刻画解的耗散特性, 我们将 Besov 范数限制在低频和高频部分 (分界点固定为 $j=0$), 并引入 Hybrid Besov 空间.

定义 4.5.2. [8, 64] 对 $s\in\mathbb{R}$ 及 $p,r\in[1,\infty]$, 设 $u\in S'_h$ 的高频部分和低频部分为

$$u^\ell:=\sum_{j\leq-1}\dot{\Delta}_j u,\qquad u^h:=u-u^\ell=\sum_{j\geq0}\dot{\Delta}_j u,$$

以及其低频半范数和高频半范数为

$$\|u\|^\ell_{\dot{B}^s_{p,r}}:=\|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\}_{j\leq0}\|_{l^r(\mathbb{Z})},\quad \|u\|^h_{\dot{B}^s_{p,r}}:=\|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\}_{j\geq-1}\|_{l^r(\mathbb{Z})}.$$

对 $s,t\in\mathbb{R}$, L^2 型 Hybrid Besov 空间 $\dot{B}^{s,t}_{2,1}$ 定义如下:

$$\dot{B}^{s,t}_{2,1} := \{u\in S'_h \mid \|u\|_{\dot{B}^{s,t}_{2,1}} := \|u\|^{\ell}_{\dot{B}^{s}_{2,1}} + \|u\|^{h}_{\dot{B}^{t}_{2,1}}\}.$$

注记 4.5.3. 对 $s'>0$、$s\in\mathbb{R}$ 及 $p,r\in[1,\infty]$, 我们易证

$$\|u^{\ell}\|_{\dot{B}^{s}_{p,r}} \lesssim \|u\|^{\ell}_{\dot{B}^{s}_{p,r}} \lesssim \|u\|^{\ell}_{\dot{B}^{s-s'}_{p,r}}, \quad \|u^{h}\|_{\dot{B}^{s}_{p,r}} \lesssim \|u\|^{h}_{\dot{B}^{s}_{p,r}} \lesssim \|u\|^{h}_{\dot{B}^{s+s'}_{p,r}}. \tag{4.5.1}$$

因而, Hybrid Besov 空间 $\dot{B}^{s,t}_{2,1}$ 满足如下特性:

$$\dot{B}^{s,s}_{2,1} = \dot{B}^{s}_{2,1}, \quad \dot{B}^{s,t}_{2,1} = \dot{B}^{s}_{2,1}\cap\dot{B}^{t}_{2,1}\ (s\le t), \quad \dot{B}^{s,t}_{2,1} = \dot{B}^{s}_{2,1}+\dot{B}^{t}_{2,1}\ (s>t).$$

进一步, 我们给出时-空 Besov 空间的定义. 这类空间首先由 Chemin 和 Lerner 在文献 [44] 中引入.

定义 4.5.4. [8,44] 对 $\rho,r,q\in[1,\infty]$、$s\in\mathbb{R}$ 及时间 $T>0$, 时-空 Besov 空间 $\widetilde{L}^{\rho}(0,T;\dot{B}^{s}_{p,r})$ 定义如下:

$$\widetilde{L}^{\rho}(0,T;\dot{B}^{s}_{p,r}) := \{u\in L^{\rho}(0,T;S'_h) \mid \|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,r})} := \|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^{\rho}_T(L^p)}\}_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^r} < \infty\}.$$

进一步, 记

$$C_b(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{s}_{p,r}) := \{u\in C(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{s}_{p,r}) \mid \|f\|_{\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{s}_{p,r})} < \infty\}.$$

相应的限制在低频和高频的半范数定义如下:

$$\|u\|^{\ell}_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,r})} := \|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^{\rho}_T(L^p)}\}_{j\le 0}\|_{l^r(\mathbb{Z})}, \quad \|u\|^{h}_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,r})} := \|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^{\rho}_T(L^p)}\}_{j\ge -1}\|_{l^r(\mathbb{Z})}.$$

注记 4.5.5. 由 Minkowski 不等式, 我们有

$$\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,r})} \le \|u\|_{L^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,r})} \quad r\ge\rho \quad 且 \quad \|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,r})} \ge \|u\|_{L^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,r})} \quad r\le\rho,$$

其中 $\|\cdot\|_{L^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,r})}$ 为通常的 Lebesgue-Besov 范数.

我们也引入空间-速度混合 Besov 空间.

定义 4.5.6. 对 $s\in\mathbb{R}$ 及 $p,r\in[1,\infty]$, 定义

$$\dot{\mathbb{B}}^{s}_{p,r} = \{f\in\mathscr{S}'_h(\mathbb{R}^d_x;L^2(\mathbb{R}^d_v)) \mid \|f\|_{\dot{\mathbb{B}}^{s}_{p,r}} := \|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p_x(L^2_v)}\}\|_{l^r(\mathbb{Z})} < \infty\},$$

关于空间-速度混合 Besov 空间, 我们也可以类似地定义其低频和高频部分、Hybrid Besov 空间和时-空 Besov 空间.

我们回顾 Besov 空间中的一些基本的特性和估计. 注意到这些特性和估计都可以应用到相应的时-空 Besov 空间.

首先, 我们介绍 Bernstein 不等式.

引理 4.5.7 ([8])**.** 对 $0<r<R$、$\lambda>0$、$1\le p\le q\le\infty$、$k\in\mathbb{N}$ 以及 $u\in S'_h$, 以下特性成立:

$$\begin{cases}\operatorname{Supp}\mathscr{F}(u)\subset\{\xi\in\mathbb{R}^d \mid |\xi|\le\lambda R\}\Rightarrow\|D^k u\|_{L^q}\lesssim\lambda^{k+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u\|_{L^p},\\ \operatorname{Supp}\mathscr{F}(u)\subset\{\xi\in\mathbb{R}^d \mid \lambda r\le|\xi|\le\lambda R\}\Rightarrow\|D^k u\|_{L^p}\sim\lambda^{k}\|u\|_{L^p},\end{cases}$$

其中 $\mathscr{F}$ 为 Fourier 变换.

根据 Bernstein 不等式, Besov 空间有诸多有用的拓扑和嵌入特性.

引理 4.5.8 ([8])**.** 如下特性成立:

- 对 $s\in\mathbb{R}$、$1\le p_1\le p_2\le\infty$ 及 $1\le r_1\le r_2\le\infty$, 如下嵌入成立:

$$\dot{B}^{s}_{p_1,r_1}\hookrightarrow\dot{B}^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2}.$$

- 对 $1\le p\le q\le\infty$, 如下嵌入成立:

$$\dot{B}^0_{p,1}\hookrightarrow L^p\hookrightarrow\dot{B}^0_{p,\infty}\hookrightarrow\dot{B}^{\sigma}_{q,\infty},\quad \sigma=-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})<0.$$

- 对 $1\le p<\infty$, $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}$ 嵌入到无穷远处衰减到 0 的连续函数空间.
- 对 $1\le p\le\infty$、$s_1<s_2$ 及 $\theta\in(0,1)$, 插值不等式成立:

$$\|u\|_{\dot{B}^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,1}}\lesssim\frac{1}{\theta(1-\theta)(s_2-s_1)}\|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}}\|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}}. \tag{4.5.2}$$

- 对 $1\le p,\rho\le\infty$、$s\in\mathbb{R}$ 及 $\varepsilon_1\in(0,1]$, log 型不等式成立:

$$\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,1})}\lesssim\frac{\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,\infty})}}{\varepsilon_1}\log\Big\{1+\frac{\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s-\varepsilon_1}_{p,\infty})}+\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s+\varepsilon_1}_{p,\infty})}}{\|u\|_{\widetilde{L}^{\rho}_T(\dot{B}^{s}_{p,\infty})}}\Big\}. \tag{4.5.3}$$

- 对 $1\le p,r\le\infty$ 和 $\sigma,s\in\mathbb{R}$, $\Lambda^{\sigma}:=(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}$ 为从 $\dot{B}^{s}_{p,r}$ 到 $\dot{B}^{s-\sigma}_{p,r}$ 的线性同构.
- 对 $p_1,p_2,r_1,r_2\in[1,\infty]$ 及 $s_1,s_2\in\mathbb{R}$, 若 $s_2<\frac{d}{p_2}$ 或者 $s_2=\frac{d}{p_2}$, $r_2=1$ 成立, 则以 $\|\cdot\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}+\|\cdot\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}$ 为范数的空间 $\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}\cap\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}$ 为一个 Banach 空间并满足弱紧性和 Fatou 特性: 若 u_n 为一个在 $\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}\cap\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}$ 中一致有界的函数列, 则存在一个极限 $u\in\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}\cap\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}$ 以

及一个子列 u_{n_k} 使得

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}=u \quad 于 \quad S' \quad 并且 \quad \|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}\cap\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}\lesssim \liminf_{n_k\to\infty}\|u_{n_k}\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}\cap\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}.$$

为了估计非线性项, 我们需要在 Besov 空间中的 Morse 型乘积估计.

引理 4.5.9 ([8]). 如下特性成立:

- 对 $1\le p,r\le\infty$ 及 $s>0$, $\dot{B}^s_{p,r}\cap L^\infty$ 为一个代数, 且满足

$$\|uw\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\lesssim \|u\|_{L^\infty}\|w\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\|w\|_{L^\infty}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{4.5.4}$$

- 对 $1\le p,r\le\infty$ 以及 $-\min\{\frac{d}{p},\frac{d(p-1)}{p}\}<s\le\frac{d}{p}$, 如下不等式成立:

$$\|uw\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\lesssim \|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|w\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{4.5.5}$$

- 对 $1\le p\le\infty$ 以及 $-\min\{\frac{d}{p},\frac{d(p-1)}{p}\}\le s\le\frac{d}{p}$, 如下不等式成立:

$$\|uw\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}}\lesssim \|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|w\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}}. \tag{4.5.6}$$

为了在高频避免输运项带来的导数损失, 我们需要应用在 Besov 空间中的交换子估计.

引理 4.5.10 ([8]). 对 $1\le p\le\infty$ 及 $-\frac{d}{p}-1\le s\le\frac{d}{p}+1$, 以下交换子估计成立:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{js}\|[u,\dot{\Delta}]\nabla w\|_{L^p}\lesssim \|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|w\|_{\dot{B}^s_{p,1}}, \tag{4.5.7}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j(s-1)}\|[u,\partial_{x_k}\dot{\Delta}_j]\nabla w\|_{L^p}\lesssim \|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}}\|w\|_{\dot{B}^s_{p,1}},\quad k=1,...,d. \tag{4.5.8}$$

我们回顾一些关于复合非线性函数连续性的估计 (称为仿线性化估计).

引理 4.5.11 ([8,66]). 设 $1\le p,r\le\infty$ 及 $s>0$. 则对任意 $F(f)\in C^\infty(\mathbb{R})$, 存在一个依赖于 $\|f\|_{L^\infty}$、F、s、p 以及 d 的常数 $C_f>0$ 使得以下估计成立:

$$\|F(f)-F(0)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\le C_f\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{4.5.9}$$

此外, 如果 $-\frac{d}{p}<s\le\frac{d}{p}$ 且 $f_1,f_2\in\dot{B}^s_{p,r}\cap\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}$, 则如下不等式成立:

$$\|F(f_1)-F(f_2)\|_{\dot{B}^s_{p,1}}\le C_{f_1,f_2}(1+\|(f_1,f_2)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}})\|f_1-f_2\|_{\dot{B}^s_{p,1}}, \tag{4.5.10}$$

其中 $C_{f_1,f_2}>0$ 为一个依赖于 $\|(f_1,f_2)\|_{L^\infty}$、F、s、p 及 d 的常数.

最后, 我们考虑输运扩散方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_t+u^*\cdot\nabla u-\mu\Delta u-\lambda\nabla\mathrm{div}\,u=g, \quad x\in\mathbb{R}^d \\ u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{4.5.11}$$

其中常数 μ 和 λ 满足 $\mu>0$ 与 $2\mu+\lambda>0$.

我们回顾输运扩散方程的最优先验估计.

引理 4.5.12 ([8,66]). 设 $T>0$, $1\le p\le p_1\le\infty$, $1\le\rho_1,r\le\infty$, 并且 $s\in\mathbb{R}$ 满足 $-\min\{\frac{d}{p},\frac{dp}{p-1}\}\le s<\frac{d}{p}+1$ 或者当 $r=1$ 时 $s=\frac{d}{p}+1$. 假设 $u_0\in\dot{B}^s_{p,r}$, $u^*\in L^1(0,T;\dot{B}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})$ 且 $g\in\widetilde{L}^{\rho_1}(0,T;\dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}}_{p,r})$. 若 u 为在 $t\in(0,T)$ 时输运扩散方程柯西问题 (4.5.11) 的一个解, 那么 u 满足

$$\min\{\mu,2\mu+\lambda\}^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_t(\dot{B}^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})}\le Ce^{C\|u^*\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})}}\big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\|g\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_t(\dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}}_{p,r})}\big), \tag{4.5.12}$$

其中 $C>0$ 为一个与时间及 ν_0 无关的常数.

注记 4.5.13. 当 $u^*=0$ 时, 定理 4.5.12 中的估计限制在高频或低频半范数下仍然成立. 例如, 在定理 4.5.12 的假设下, 我们有

$$\min\{\mu,2\mu+\lambda\}^{\frac{1}{\rho}}\|u\|^h_{\widetilde{L}^\rho_t(\dot{B}^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})}\le C\big(\|u_0\|^h_{\dot{B}^s_{p,r}}+\|g\|^h_{\widetilde{L}^{\rho_1}_t(\dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}}_{p,r})}\big).$$

第五章　具有趋化性的双曲-抛物方程组在临界 Besov 空间中的整体经典解

5.1　引言

在本章, 我们证明定理 1.3.27 和 1.3.30 关于柯西问题 (1.3.39) 经典解在临界 Besov 空间中的整体存在性、唯一性和最优时间衰减速率, 并且证明定理 1.3.33 和 1.3.34 关于双曲-抛物方程组 (1.1.12) 收敛到 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 的松弛极限. 当 ρ 是关于 $\bar{\rho}$ 的小扰动时, 由于压力函数 $P(\rho)$ 满足 $P'(\rho)>0$, 我们通过引入新变量

$$n := \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{P'(s)}{s} ds, \qquad n_0 := \int_{\bar{\rho}}^{\rho} \frac{P'(s)}{s} ds, \qquad \psi := \phi - \bar{\phi}, \qquad \psi_0 = \phi_0 - \bar{\phi},$$

将双曲-抛物方程组柯西问题 (1.3.39) 改写如下:

$$\begin{cases} n_t + u\cdot\nabla n + c_0 \mathrm{div}\, u + G(n)\mathrm{div}\, u = 0, \\ u_t + u\cdot\nabla u + \dfrac{1}{\varepsilon} u + \nabla n - \chi\nabla\psi = 0, \\ \psi_t - \Delta\psi + b\psi - c_1 n - H(n) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t>0, \\ (n,u,\psi)(x,0) = (n_0,u_0,\psi_0)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \\ (n_0,u_0,\psi_0)(x) \to (0,0,0), \qquad |x|\to\infty, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

其中常数 c_i $(i=1,2)$ 为

$$c_0 := P'(\bar{\rho}), \qquad c_1 := a\partial_n\rho|_{n=0} = \frac{a\rho}{P'(\rho)}\Big|_{n=0} = \frac{a\bar{\rho}}{P'(\bar{\rho})},$$

非线性项 $G(n)$ 和 $H(n)$ 为

$$G(n) := P'(\rho) - P'(\bar{\rho}), \qquad H(n) := a\big(\rho - \bar{\rho} - \frac{\bar{\rho}}{P'(\bar{\rho})} n\big).$$

为了阅读方便, 我们将定理 1.3.27 和 1.3.30 以扰动变量 (n,u,ψ) 的形式重新叙述如下:

定理 1.3.27. 对维数 $d\geq 1$, 设 $P'(\bar\rho)>\frac{a\chi}{b}\bar\rho>0$ 和 $J_\varepsilon=-[\log_2\varepsilon]-k_0$ 成立, 其中 $k_0>0$ 为一个与 ε 无关的常数. 存在一个与 ε 无关且充分小的常数 $\delta_2>0$ 使得如果初值 (n_0,u_0,ψ_0) 满足 $(n_0,u_0,\psi_0)\in \dot B_{2,1}^{\frac d2,\frac d2+1}\times \dot B_{2,1}^{\frac d2,\frac d2+1}\times \dot B_{2,1}^{\frac d2,\frac d2+2}$ 及

$$\hat\delta_2:=\|(n_0,u_0,\psi_0)^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot B_{2,1}^{\frac d2}}+\varepsilon\|(n_0,u_0,\nabla\psi_0)^{h,J_\varepsilon}\|_{\dot B_{2,1}^{\frac d2+1}}\leq\delta_2, \tag{1.3.42}$$

则柯西问题 (5.1.1) 有唯一的整体经典解 (n,u,ψ), 且 (n,u,ψ) 满足

$$\begin{cases} n\in C_b(\mathbb R^+;\dot B_{2,1}^{\frac d2,\frac d2+1})\cap L^1(\mathbb R_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2+2,\frac d2+1}),\\ u\in C_b(\mathbb R^+;\dot B_{2,1}^{\frac d2,\frac d2+1})\cap L^1(\mathbb R_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2+2,\frac d2+1}),\\ \psi\in C_b(\mathbb R^+;\dot B_{2,1}^{\frac d2,\frac d2+2})\cap L^1(\mathbb R_+;\dot B_{2,1}^{\frac d2+2,\frac d2+3}),\end{cases} \tag{1.3.43}$$

以及

$$\begin{aligned} &\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde L^\infty_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}+\varepsilon\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+2})}+\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+1})}\\ &+\varepsilon\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+2})}+\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+1})}+\varepsilon^{-\frac12}\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde L^2_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}+\|\psi_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}\\ &+\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+1})}+\|\psi\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+3})}+\|\psi_t\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2+1})}+\|\frac1\varepsilon u+\nabla n-\chi\nabla\psi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2})}\\ &+\|\psi-(b-\Delta)^{-1}(c_1n+H(n))\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B_{2,1}^{\frac d2}\cap\dot B_{2,1}^{\frac d2+2})}\leq C\hat\delta_2,\quad t>0,\end{aligned} \tag{1.3.44}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1、4.5.2、4.5.4 和 5.5.1, $C>0$ 为一个与时间和 ε 无关的常数.

定理 1.3.30. 对维数 $d\geq 1$, 在定理 1.3.27 的假设下, 令 (n,u,ψ) 为柯西问题 (5.1.1) 由定理 1.3.27 给出的整体经典解. 若初值 (n_0,u_0,ψ_0) 还满足 $(n_0,u_0,\psi_0)^{\ell,J_\varepsilon}$ 在 $\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 中关于 ε 一致有界, 则对任意 $t>0$, 该整体解 (n,u,ψ) 满足

$$\begin{cases} \|(n,u,\psi)(t)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot B^\sigma_{2,1}}\leq C(1+\varepsilon t)^{-\frac12(\sigma-\sigma_0)}, \qquad \sigma\in(\sigma_0,\dfrac d2],\\ \|(n,u,\nabla\psi)(t)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot B_{2,1}^{\frac d2+1}}\leq C(1+\varepsilon t)^{-\frac12(\frac d2-\sigma_0)},\end{cases} \tag{1.3.45}$$

且 u 和 $b\psi-c_1n-H(n)$ 满足

$$\|(u,b\psi-c_1n-H(n))(t)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\leq\frac{C}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)\}},\tag{1.3.46}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1、4.5.4 和 5.5.1, $C>0$ 为一个与 ε 和时间无关的常数.

若 $d\geq 2$ 及 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$, 则 u 和 $b\psi-c_1n-H(n)$ 进一步满足

$$\|(u,b\psi-c_1n-H(n))(t)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}\leq\frac{C}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)},\quad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}-1].\tag{1.3.47}$$

我们将定理 1.3.33 和 1.3.34 关于双曲-抛物方程组 (1.1.12) 松弛极限的结果重新叙述如下:

定理 1.3.33. 设条件 (1.3.40) 成立. 对维数 $d\geq 1$ 及 $p\in[1,\infty]$, 若初值 ρ^* 满足

$$\|\rho_0^*-\bar{\rho}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}\leq\delta_2^*,\tag{1.3.49}$$

其中 $\delta_2^*>0$ 为充分小的常数, 则柯西问题 (1.3.48) 存在唯一的强解 (ρ^*,ϕ^*), 且 (ρ^*,ϕ^*) 满足

$$\rho^*-\bar{\rho}\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1})\cap L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1}),\quad \phi^*-\bar{\phi}\in L^1(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{p}+4}_{p,1}),\tag{1.3.50}$$

以及

$$\|\rho^*-\bar{\rho}\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1})\cap L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})}+\|\phi^*-\bar{\phi}\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{p}+4}_{p,1})}\leq C\|\rho_0^*-\bar{\rho}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}},\ \ t>0,\tag{1.3.51}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1 和 4.5.4, $C>0$ 为一个与时间无关的常数.

定理 1.3.34. 对维数 $d\geq 1$, 在定理 1.3.27 的假设下, 若 $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 为柯西问题 (1.3.36) 由定理 1.3.27 及尺度变换 (1.3.35) 给出的整体解, 则以下估计成立:

$$\|\nabla P(\rho^\varepsilon)-\chi\rho^\varepsilon\nabla\phi^\varepsilon+\rho^\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|a\rho^\varepsilon+\Delta\phi^\varepsilon-b\phi^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\leq C\varepsilon,\quad t>0,\tag{1.3.52}$$

其中 Besov 空间及相关范数见定义 4.5.1 和 4.5.4, $C>0$ 为一个与时间及 ε 无关的常数.

进一步, 设定理 1.3.30 的假设 $(p=2)$ 成立, (ρ^*,ϕ^*) 为柯西问题 (1.3.48) 由定理 1.3.30 给出的整体解, 并且 u^* 由 (1.3.38) 给出. 若初值 ρ_0 和 ρ_0^* 还满足

$$\|\rho_0-\rho_0^*\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1}}=O(\varepsilon),\tag{1.3.53}$$

则如下收敛估计成立:

$$\|\rho^{\varepsilon}-\rho^{*}\|_{\widetilde{L}^{\infty}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|u^{\varepsilon}-u^{*}\|_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\phi^{\varepsilon}-\phi^{*}\|_{L^{1}_{t}(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\leq C\varepsilon,\ \ t>0, \tag{1.3.54}$$

因而, 当 $\varepsilon\to0$ 时, $(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})$ 在如下意义下强收敛到 $(\rho^{*},u^{*},\phi^{*})$:

$$\begin{cases}\rho^{\varepsilon}\to\rho^{*} & 于\ \ \widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R}_{+};\dot{B}^{\frac{d}{2}-1}_{2,1})\cap L^{1}(\mathbb{R}_{+};\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}),\\ u^{\varepsilon}\to u^{*} & 于\ \ L^{1}(\mathbb{R}_{+};\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}),\\ \phi^{\varepsilon}\to\phi^{*} & 于\ \ L^{1}(\mathbb{R}_{+};\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1}).\end{cases} \tag{1.3.55}$$

我们回顾上述定理证明的主要困难和想法. 由于 (5.1.1) 缺少对称性条件, 我们很难直接应用以往耗散双曲方程组 (如带阻尼 Euler 方程组, 参见 [61,226,227] 等) 或一般的双曲-抛物方程组 (如可压缩 Navie-Stokes 方程组, 参见 [143,201] 等) 的经典理论分析双曲-抛物方程组 $(1.3.39)_1$-$(1.3.39)_3$ 的耗散结构. 此外, 当研究带阻尼 Euler 方程组的松弛极限时, 通常可以将证明归结于 $\varepsilon=1$, 再通过尺度变换直接得到与 ε 无关的估计 (参见 [60–62]). 然而, 双曲方程 $(1.3.39)_1$-$(1.3.39)_2$ 和抛物方程 $(1.3.39)_3$ 具有不同的尺度不变性, 对方程组 $(1.3.39)_1$-$(1.3.39)_3$ 不易找到这样的尺度变换, 因而需要在计算中考虑到解对参数 ε 的精确依赖性, 而这导致了建立解与 ε 无关先验估计的本质困难.

定理 1.3.27 关于柯西问题 (5.1.1) 经典解 (n,u,ψ) 整体存在性的关键是建立 (n,u,ψ) 与 ε 及时间无关的先验估计. 在低频, 受到文献 [60,107,116] 启发, 我们引入两个新的有效变量

$$\varphi:=\psi-(b-\Delta)^{-1}(c_1n+H(n)),\qquad \omega:=u+\varepsilon\nabla n-\varepsilon\chi\nabla\phi,$$

以利用如下耦合特性:

$$\begin{cases}u_t+u\cdot\nabla u=-\dfrac{1}{\varepsilon}\omega,\\ \psi_t=(\Delta-b)\varphi.\end{cases} \tag{1.3.56}$$

将方程组 $(5.1.1)_1$-$(5.1.1)_3$ 用 (n,φ,ω) 的形式改写成扩散阻尼耦合的方程组 (5.2.5), 然后通过选取满足 $2^{J_\varepsilon}\sim\frac{1}{\varepsilon}$ 的高低频分界点 (1.3.41), 建立了 (n,φ,ω) 的一致估计, 进而得到了 (u,ψ) 的一致估计 (参见小节 5.2.1). 值得强调的是, 有效变量 (φ,ω) 在低频的正则性和关于 ε 的依赖性要优于 (n,φ,ω), 而这是方程组 (1.1.12) 松弛极限的关键所在.

在高频估计中, 我们引入了一个新的非线性 Lyapunov 能量泛函 (5.2.41), 并以此建立了 (n,u,ψ) 高频部分的一致估计. 值得强调的是, (5.2.41) 中权函数 $w_j\sim1$ 用于抵消 $(5.1.1)_1$ 中非线性项 $G(n)\mathrm{div}\,u$. 此外, 为了克服二次非线性项 $H(n)$ 带来的困难, 我们将交叉项 $\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_jH(n)\dot{\Delta}_j\psi dx$ 和非线性项 $2^{-2j}\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}^2$ 加入能量泛函 (5.2.41), 并证明了关于二次函数 $H(n)$ 在 Besov 空

间中的一些新估计 (见引理 5.5.6). 利用高频和低频的估计, 我们能够证明柯西问题 (1.3.39) 解关于 ε 一致的先验估计, 最终证明其整体存在性.

值得强调的是, (1.3.40) 是一个自然的结构性条件, 其保证了在低频估计时算子 $(5.2.6)_1$ 的严格椭圆性以及在高频估计 (5.2.49) 时能量泛函的强制性.

其次, 当证明定理 1.3.30 时, 由于抵消非线性项需要 L^1 时间可积性和 L^2 时间可积性的混合耗散结构 (参见 (1.3.44)), 我们无法直接应用文献 [96, 229] 中的方法. 为此, 基于定理 1.3.16 的想法, 我们先建立 (n,ω,φ) 的时间加权估计, 然后转化为 (u,ψ) 的时间加权估计, 最终通过时-空插值不等式证明解的最优时间收敛速率 (1.3.45). 此外, 我们观察到方程 $(5.1.1)_2$-$(5.1.1)_3$ 的阻尼效应, 得到了 u 和 $a\rho-b\phi$ 相比解 (n,u,ψ) 更快的时间衰减速率.

然后, 在证明双曲-抛物方程组 (1.1.12) 收敛到 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 的松弛极限前, 我们需要建立 Keller-Segel 系统柯西问题 (1.3.48) 强解的整体存在性和唯一性. 为此, 我们将 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 改写如下:

$$\rho_t^*-\tilde{\Delta}_*\rho^*=\text{二次非线性项}.$$

在 $P'(\bar{\rho})>\frac{\chi a}{b}\bar{\rho}$ 的假设下, 上式中微分算子 $\tilde{\Delta}_*:=(P'(\bar{\rho})-\chi a\bar{\rho}(b-\Delta)^{-1})\Delta$ 的性质与拉普拉斯算子 Δ 类似, 因而类似于热方程的最优正则性估计, 我们建立了柯西问题 (1.3.48) 解相应的先验估计 (参见见小节 5.4.1).

最后, 为了得到收敛速率, 我们观察到 $\widetilde{\rho}^\varepsilon=\rho^\varepsilon-\rho^*$ 满足如下方程:

$$\widetilde{\rho}_t^\varepsilon-\tilde{\Delta}_*\widetilde{\rho}^\varepsilon=R^\varepsilon+\text{二次非线性项},$$

基于 (1.3.56) 以及 (1.3.44) 中有效变量 (φ,ω) 的一致估计, 我们证明余项 R^ε 当 $\varepsilon\to 0$ 时在 $L^1(\mathbb{R}_+;B_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})$ 中以速率 ε 收敛到零, 从而建立 $\widetilde{\rho}^\varepsilon$ 相应的收敛速率估计, 最终严格证明 $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 强收敛到 (ρ^*,u^*,ϕ^*) (参见小节 5.4.2).

本章其余部分安排如下: 在第 5.2 节, 我们对柯西问题 (5.1.1) 的经典解建立与时间和松弛参数无关的先验估计并证明存在唯一性 (即定理 1.3.27). 在第 5.3 节, 我们在初始扰动还满足 $\dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_0}$ 有界性条件下证明关于柯西问题 (5.1.1) 的整体解的最优衰减估计 (即定理 1.3.30). 在第 5.4 节, 我们先证明 Keller-Segel 方程组柯西问题 (1.3.48) 强解的整体存在性和唯一性, 再证明柯西问题 (5.1.1) 的解和 Keller-Segel 方程组柯西问题 (1.3.48) 解之间关于松弛参数的收敛速率估计. 附录 5.5 包含扩散阻尼方程的最优正则性估计和二次非线性函数估计.

5.2 定理 1.3.27 的证明

在本节中, 我们证明定理 1.3.27 中关于柯西问题 (5.1.1) 经典解的整体存在性和唯一性. 该证明关键是对解建立与时间及 ε 一致的先验估计. 为此, 我们引入

$$
\begin{aligned}
X_2(t) := &\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&+\varepsilon\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\psi_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&+\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|\psi\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})} + \|\psi_t\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&+\|\frac{1}{\varepsilon}u+\nabla n-\chi\nabla\psi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|\psi-(b-\Delta)^{-1}(c_1n+H(n))\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}.
\end{aligned}
\tag{5.2.1}
$$

假设柯西问题 (4.1.1) 的解 (n,u,ψ) 对某个待选取的常数 $C_3>0$ 及时间 $t>0$ 满足

$$
X_2(t)\le C_3X_2(0). \tag{5.2.2}
$$

那么, 我们将在小节 5.2.1-5.2.2 中证明 $X_2(t)\le\frac{1}{2}C_3X_2(0)$. 利用该先验估计, 我们可以将局部逼近解延拓成整体逼近解, 然后再取极限使其收敛到 (5.1.1) 的整体解 (参见小节 5.2.3). 性质 (5.2.2) 也用于非线性函数 $G(n)$ 的仿线性化估计和非线性函数 $H(n)$ 的二次估计.

5.2.1 低频估计

在该小节中, 为了在低频 $\{\xi\in\mathbb{R}^d\mid|\xi|\le 2^{J_\varepsilon}\}$ 中建立解的一致先验估计, 我们引入两个新变量

$$
\varphi:=\psi-(b-\Delta)^{-1}(c_1n+H(n)),\qquad \omega:=u+\varepsilon\nabla n-\varepsilon\chi\nabla\psi. \tag{5.2.3}
$$

利用 (1.3.56) 及

$$
\begin{cases}
\psi=\varphi+(b-\Delta)^{-1}(c_1n+H(n)),\\
u=\omega-\varepsilon\nabla(1-\chi c_1(b-\Delta)^{-1})n+\varepsilon\chi\nabla\varphi+\varepsilon\chi\nabla(b-\Delta)^{-1}H(n),
\end{cases}
\tag{5.2.4}
$$

我们将方程组 (5.1.1) 改写为

$$
\begin{cases}
n_t-\tilde{\Delta}_1 n=L_1+R_1,\\
\varphi_t-\tilde{\Delta}_2\varphi=L_2+R_2,\\
\omega_t+\dfrac{1}{\varepsilon}\omega=L_3+R_3,
\end{cases}
\tag{5.2.5}
$$

其中 $\tilde{\Delta}_i$ $(i=1,2)$ 为微分算子

$$\begin{cases}\tilde{\Delta}_1 := \varepsilon c_0(1-\chi c_1\Delta(b-\Delta)^{-1})\Delta = \varepsilon(P'(\bar{\rho})-\chi a\bar{\rho}\Delta(b-\Delta)^{-1})\Delta,\\ \tilde{\Delta}_2 := -b+(1+\varepsilon\chi c_0c_1(b-\Delta)^{-1})\Delta = -b+(1+\varepsilon\chi a\bar{\rho}(b-\Delta)^{-1})\Delta,\end{cases} \tag{5.2.6}$$

L_i $(i=1,2,3)$ 为高阶线性形式

$$\begin{cases}L_1 := -\varepsilon\chi c_0\Delta\psi - c_0\operatorname{div}\omega,\\ L_2 := -\varepsilon c_0c_1(b-\Delta)^{-1}(1-c_1(b-\Delta)^{-1})\Delta n + c_0c_1(b-\Delta)^{-1}\operatorname{div}\omega,\\ L_3 := \varepsilon^2c_0\nabla(1-c_1\Delta(b-\Delta)^{-1})\Delta n - \varepsilon^2\chi c_0\nabla\Delta\varphi + \varepsilon\chi\nabla(b-\Delta)\varphi - \varepsilon c_0\nabla\operatorname{div}\omega,\end{cases} \tag{5.2.7}$$

R_i $(i=1,2,3)$ 为非线性形式

$$\begin{cases}R_1 := -u\cdot\nabla n - G(n)\operatorname{div}u - \varepsilon\chi c_0\Delta(b-\Delta)^{-1}H(n),\\ R_2 := -(b-\Delta)^{-1}(c_1R_1 + H(n)_t),\\ R_3 := \varepsilon\nabla R_1 - u\cdot\nabla u.\end{cases} \tag{5.2.8}$$

低频分析的关键是对 (n,φ,ω) 建立先验估计.

引理 5.2.1. 对给定的 $T>0$, 若 (u,n,ψ) 为当 $t\in(0,T)$ 时柯西问题 (5.1.1) 满足 (5.2.2) 的整体解, 则在定理 1.3.27 的假设下, (n,φ,ω) 满足

$$\begin{aligned}&\|(n,\varphi,\omega)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\ &\le C\big(X_2(0)+X_2^2(t)\big),\quad 0<t<T,\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

其中 $X_2(t)$ 和 (φ,ω) 分别由 (5.2.1) 和 (5.2.3) 给出, $C>0$ 为一个与时间和 ε 无关的常数.

证明. 首先, 由 $(5.2.5)_1$、(5.5.3) 以及嵌入 $\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1}\hookrightarrow\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1}$, 我们有

$$\begin{aligned}&\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\\ &\lesssim \|n_0\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|L_1\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|R_1\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\ &\lesssim \|n_0\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \varepsilon\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})} + \|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|R_1\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

为估计等式 (5.2.10) 右侧, 我们易知 Bessel 势 $(b-\Delta)^{-1}$ 满足

$$\|(b-\Delta)^{-1}f\|_{\dot{B}^s_{p,r}\cap\dot{B}^{s+2}_{p,r}} \lesssim \|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}},\quad f\in\dot{B}^s_{p,r},\quad s\in\mathbb{R},\quad p,r\in[1,\infty]. \tag{5.2.11}$$

联立 $(5.2.5)_2$、(5.2.10)-(5.2.11) 及 (5.5.3), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\\
&\lesssim\|\varphi|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|L_2\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|R_2\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\lesssim\|\varphi|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|R_2\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(n,\varphi)|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})}+\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|(R_1,R_2)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.
\end{aligned}
\tag{5.2.12}
$$

相似地, 由 $(5.2.5)_3$ 及 (5.2.12), 如下估计成立:

$$
\begin{aligned}
&\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\lesssim\|\omega|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|L_3\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|R_3\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\lesssim\|\omega|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon^2\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})}+\varepsilon\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})}+\varepsilon\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|R_3\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.
\end{aligned}
\tag{5.2.13}
$$

结合 (5.2.12)-(5.2.13) 并利用 (5.5.1), 我们有

$$
\begin{aligned}
&\|(n,\varphi,\omega)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\quad+\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\varepsilon\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|(R_1,R_2,R_3)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(n,\varphi,\omega)|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon^2 2^{J_\varepsilon}\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\varepsilon 2^{J_\varepsilon}\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\\
&\quad+\varepsilon 2^{J_\varepsilon}(1+\varepsilon 2^{J_\varepsilon})\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(R_1,R_2,R_3)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}
\end{aligned}
\tag{5.2.14}
$$

因而, 如果我们选取高频和低频的分界点为 $J_\varepsilon:=-[\log_2\varepsilon]-k_0$, 则根据 (5.2.14) 及 $\varepsilon 2^{J_\varepsilon}=2^{-k_0}$, 存在一个充分大的常数 $k_0>0$ 使得如下估计成立:

$$
\begin{aligned}
&\|(n,\varphi,\omega)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\lesssim\|(n,\varphi,\omega)|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|(R_1,R_2,R_3)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.
\end{aligned}
\tag{5.2.15}
$$

由 (5.5.1), 对任意 $p,r\in[1,\infty]$、$s\in\mathbb{R}$ 及 $s'>0$, 我们得到

$$\|f^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\le\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{p,r}}\lesssim\varepsilon^{-s'}\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{s-s'}_{p,r}},\quad \|f^{h,J_\varepsilon}\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\le\|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{p,r}}\le\varepsilon^{s'}\|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{s+s'}_{p,r}}. \tag{5.2.16}$$

又根据 (4.5.9)、(5.2.11) 和 (5.2.16), 我们有

$$\|(n,\varphi,\omega)|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\lesssim\|(n_0,u_0,\psi_0)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon\|n_0\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}. \tag{5.2.17}$$

对非线性形式 R_i $(i=1,2,3)$, 我们作如下估计. 首先, 由 (4.5.5) 及插值不等式, 以下估计成立:

$$\begin{aligned}\|u\cdot\nabla n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim{}&\varepsilon^{-\frac12}\big(\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\big)\\&\times\big(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)^{\frac12}\lesssim X_2^2(t).\end{aligned}$$

又由 (5.2.16) 及嵌入 $\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\hookrightarrow L^\infty$, n 满足

$$\|n\|_{L^\infty_t(L^\infty)}\lesssim\|n\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_2(t), \tag{5.2.18}$$

结合 (4.5.5)、(4.5.9)、(5.2.2) 以及 (5.2.18), 我们有

$$\|G(n)\mathrm{div}\,u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})})(\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})})\lesssim X_2^2(t).$$

此外, 我们从 (5.2.18) 及对非线性函数 $H(n)$ 的二次估计 (5.5.11) 得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\\&\lesssim(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})})(\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})})\lesssim X_2^2(t).\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

因而, R_1 满足

$$\|R_1\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim X_2^2(t). \tag{5.2.20}$$

类似于 (5.2.20), 我们利用 (4.5.5)、(4.5.9)、$(5.1.1)_1$ 以及 (5.2.18) 可得

$$\begin{aligned}\|H(n)_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}&\lesssim\|u\cdot\nabla H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\big(H(n)+c_0H'(n)+G(n)H'(n)\big)\mathrm{div}\,u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\&\lesssim X_2^2(t).\end{aligned}$$

上式及 (5.2.20) 意味着

$$\|R_2\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \|R_1\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|H(n)_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim X_2^2(t). \tag{5.2.21}$$

最后, 由 (4.5.5)、(5.2.16) 以及 (5.2.20), 我们有

$$\|R_3\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \|R_1\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + (\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})})\|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim X_2^2(t). \tag{5.2.22}$$

将上述估计 (5.2.17)-(5.2.22) 代入 (5.2.15), 我们得到 (5.2.9). 引理 5.2.1 证毕. □

(n,φ,ω) 的先验估计可以推出解 (n,ψ,u) 的先验估计.

引理 5.2.2. 对给定的 $T>0$, 若 (u,n,ψ) 为当 $t\in(0,T)$ 时柯西问题 (5.1.1) 满足 (5.2.2) 的整体解, 则在定理 1.3.27 的假设下, (u,n,ψ) 满足

$$\begin{aligned}
&\|(u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \\
&\quad + \varepsilon\|\psi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \|\psi_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \le C\big(X_2(0)+CX_2^2(t)\big), \quad 0<t<T,
\end{aligned} \tag{5.2.23}$$

其中 $X_2(t)$ 由 (5.2.1) 给出, $C>0$ 为一个与时间和 ε 无关的常数.

证明. 由于 u 满足 $(5.2.4)_2$, 我们利用 (4.5.9)、(5.2.9)、(5.2.11)、(5.2.16) 以及 (5.2.19) 可得

$$\begin{cases}
\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|(n,H(n))\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \varepsilon\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
\qquad\qquad \lesssim \|(n,\omega,\varphi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}, \\
\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim \|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \varepsilon\|(n,H(n))\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \varepsilon\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
\qquad\qquad \lesssim \dfrac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|(n,H(n))\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.
\end{cases} \tag{5.2.24}$$

此外, 根据 $(1.3.56)_2$、(4.5.9)、$(5.2.4)_1$、(5.2.9) 及 (5.2.19), ψ 满足以下估计:

$$\begin{cases}
\|\psi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \|(n,H(n))\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim X_2(0)+X_2^2(t), \\
\varepsilon\|\psi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} \lesssim \|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \varepsilon\|(n,H(n))\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} \lesssim X_2(0)+X_2^2(t), \\
\|\psi_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} \lesssim X_2(0)+X_2^2(t).
\end{cases} \tag{5.2.25}$$

联立 (5.2.9)、(5.2.25)、插值不等式及事实 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}u=\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\omega-\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\nabla n-\chi\nabla\psi)$, 我们得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim \big(\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\varepsilon\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\big)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim X_2(0)+X_2^2(t).
\end{aligned}
\tag{5.2.26}
$$

由 (5.2.9) 及 (5.2.24)-(5.2.26), (5.2.23) 成立. □

5.2.2 高频估计

在该小节中, 我们对柯西问题 (5.1.1) 作用局部化算子 $\dot{\Delta}_j$ 后对 $j\geq J_\varepsilon-1$ 建立相应的高频估计.

首先, 我们有如下非线性能量估计.

引理 5.2.3. 若 (n,u,ψ) 为柯西问题 (5.1.1) 的一个解, 则对任意 $j\in\mathbb{Z}$, 以下不等式成立:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}[\frac{1}{2}|\dot{\Delta}_j n|^2+\frac{1}{2\eta_4}2^{-2j}|\dot{\Delta}_j H(n)|^2+\frac{1}{2}w_j|\dot{\Delta}_j u|^2+\frac{\chi b}{2c_1}|\dot{\Delta}_j\psi|^2\\
&\qquad+\frac{\chi}{2c_1}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2-\chi\dot{\Delta}_j n\dot{\Delta}_j\psi-\dot{\Delta}_j H(n)\dot{\Delta}_j\psi]dx+\int_{\mathbb{R}^d}(\frac{1}{\varepsilon}w_j|\dot{\Delta}_j u|^2+|\dot{\Delta}_j\psi_t|^2)dx\\
&\lesssim(1+\|w_j\|_{L^\infty})\big(\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(n,u)\|_{L^2}+\|(R_{1,j},R_{2,j})\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi)\|_{L^2}\\
&\quad+\|(w_j)_t\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}^2+(1+\|u\|_{L^\infty})\|\nabla w_j\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi)\|_{L^2}\\
&\quad+\frac{1}{\eta_4}2^{-j}\|\dot{\Delta}_j H(n)_t\|_{L^2}\|\dot{\Delta}_j(2^j\psi,2^{-j}H(n))\|_{L^2}\\
&\quad+\|u\|_{L^\infty}2^{-j}\|\nabla\dot{\Delta}_j(n,H(n))\|_{L^2}2^j\|\dot{\Delta}_j\psi\|_{L^2},
\end{aligned}
\tag{5.2.27}
$$

其中 $\eta_4>0$ 为一个待选取的小常数, w_j 为权函数

$$
w_j:=c_0+G(n),
\tag{5.2.28}
$$

$R_{i,j}$ $(i=1,2)$ 为交换子形式

$$
R_{1,j}:=[u,\dot{\Delta}]\nabla n+[G(n),\dot{\Delta}_j]\mathrm{div}\,u,\qquad R_{2,j}:=[u,\dot{\Delta}]\nabla u.
\tag{5.2.29}
$$

证明. 我们对方程组 (5.1.1) 作用算子 $\dot{\Delta}_j$ 得

$$
\begin{cases}
(\dot{\Delta}_j n)_t + u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n + w_j \mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u = R_{1,j},\\
(\dot{\Delta}_j u)_t + u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j u + \dfrac{1}{\varepsilon}\dot{\Delta}_j u + \nabla\dot{\Delta}_j n - \chi\nabla\dot{\Delta}_j\psi = R_{2,j},\\
(\dot{\Delta}_j\psi)_t - \Delta(\dot{\Delta}_j\psi) + b\dot{\Delta}_j\psi - c_1\dot{\Delta}_j n - \dot{\Delta}_j H(n) = 0.
\end{cases}
\tag{5.2.30}
$$

对 $(5.2.30)_1$ 与 $\dot{\Delta}_j n$ 作用 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 内积, 我们得到

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\dot{\Delta}_j n|^2dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_j \mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u\dot{\Delta}_j n dx = \int_{\mathbb{R}^d}(\frac{1}{2}\mathrm{div}\,u|\dot{\Delta}_j n|^2 + R_{1,j}\dot{\Delta}_j n)dx. \tag{5.2.31}
$$

同时, 对 $(5.2.30)_2$ 与 $w_j\dot{\Delta}_j u$ 作用 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 内积, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}w_j|\dot{\Delta}_j u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^d}\big(\frac{1}{\varepsilon}w_j|\dot{\Delta}_j u|^2 - w_j\dot{\Delta}_j n\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u + \chi w_j\dot{\Delta}_j\psi\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u\big)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\big(\frac{1}{2}w_j\mathrm{div}\,u|\dot{\Delta}_j u|^2 + w_jR_{2,j}\cdot\dot{\Delta}_j u + \frac{1}{2}(w_j)_t|\dot{\Delta}_j u|^2\\
&\quad + \nabla w_j\cdot(\frac{1}{2}u|\dot{\Delta}_j u|^2 + \dot{\Delta}_j n\dot{\Delta}_j u - \chi\dot{\Delta}_j\psi\dot{\Delta}_j u)\big)dx.
\end{aligned}
\tag{5.2.32}
$$

此外, 我们对方程 $(5.2.30)_3$ 乘以 $\dot{\Delta}_j\psi_t$ 并在 $\mathbb{R}^d$ 上分部积分可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}(\frac{b}{2}|\dot{\Delta}_j\psi|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2)dx + \int_{\mathbb{R}^d}|\dot{\Delta}_j\psi_t|^2dx - c_1\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j n\dot{\Delta}_j\psi_t dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j H(n)\dot{\Delta}_j\psi_t dx\\
&= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j H(n)\dot{\Delta}_j\psi dx - \int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j H(n)_t\dot{\Delta}_j\psi dx.
\end{aligned}
\tag{5.2.33}
$$

根据 $(5.2.30)_1$, 我们观察到

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j n\dot{\Delta}_j\psi_t dx = &-\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j n\dot{\Delta}_j\psi dx - \int_{\mathbb{R}^d}w_j\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u\dot{\Delta}_j\psi dx\\
&+ \int_{\mathbb{R}^d}(-u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n + R_{1,j})\dot{\Delta}_j\psi dx.
\end{aligned}
\tag{5.2.34}
$$

最后, 我们易知

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{2^{-2j}}{2}|\dot{\Delta}_j H(n)|^2dx \le 2^{-j}\|\dot{\Delta}_j H(n)_t\|_{L^2}2^{-j}\|\dot{\Delta}_j H(n)\|_{L^2}. \tag{5.2.35}
$$

结合 (5.2.31)-(5.2.35), 我们得到 (5.2.27). 定理 5.2.3 证毕 □

注记 5.2.4. 值得注意的是, 方程 $(5.1.1)_1$ 中的非线性项 $G(n)\mathrm{div}\,u$ 会带来一阶导数损失. 为了

克服这个困难, 我们在对方程 $(5.1.1)_2$ 的过程中利用了权函数 w_j. 上述引理 5.2.3 的证明中, 在 (5.2.31) 中的形式 $\int w_j \mathrm{div}\, u_j \psi_j dx$ 可用于抵消等式 (5.2.34) 右端出现的第二项.

注记 5.2.5. 在高频估计中, 主要的困难来自二次非线性项 $H(n)$. 一般来说, 为估计 (5.2.33) 右侧非线性项 $H(n)$, 我们需要如下计算:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \dot{\Delta}_j H(n) \dot{\Delta}_j \psi_t dx \leq \frac{1}{4} \|\dot{\Delta}_j \psi_t\|_{L^2}^2 + \|\dot{\Delta}_j H(n)\|_{L^2}^2. \tag{5.2.36}$$

然而, 我们引入的耗散项只能给出 $2^{-2j}\|\dot{\Delta}_j H(n)\|_{L^2}^2$ 的估计 (见引理 5.2.8), 从而 (5.2.36) 无法用于得到对应 L^1-时间可积性的最优正则性估计. 为了克服二次非线性项 $H(n)$ 带来的困难, 我们将交叉项 $\int_{\mathbb{R}^d} \dot{\Delta}_j H(n) \dot{\Delta}_j \psi dx$ 和非线性项 $2^{-2j}\|\dot{\Delta}_j H(n)\|_{L^2}^2$ 加入能量泛函 (5.2.41), 并证明了一些关于二次函数 $H(n)$ 在 Besov 空间中的估计 (见引理 5.5.6).

下一步, 为了得到 n 和 ψ 的耗散估计, 我们证明如下引理.

引理 5.2.6. 若 (n,u,ψ) 为柯西问题 (5.1.1) 的一个解, 则对任意 $j \in \mathbb{Z}$, (n,u,ψ) 满足

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\frac{\chi}{2c_1}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2+\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n\Big)dx+\int_{\mathbb{R}^d}\Big[|\nabla\dot{\Delta}_j n|^2-w_j|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u|^2+\frac{1}{\varepsilon}\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n\\
&\quad+\frac{\chi b}{c_1}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2+\frac{\chi}{c_1}|\Delta\dot{\Delta}_j\psi|^2-2\chi\nabla\dot{\Delta}_j n\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\psi\Big]dx\\
&\lesssim(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\dot{\Delta}_j n\|_{L^2}+\|(R_{1,j},R_{2,j})\|_{L^2})\|\nabla\dot{\Delta}_j(n,u)\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_j H(n)\|_{L^2}\|\Delta\dot{\Delta}_j\psi\|_{L^2}.
\end{aligned}\tag{5.2.37}$$

证明. 根据方程 $(5.2.30)_1$-$(5.2.30)_2$, 我们可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n dx+\int_{\mathbb{R}^d}\Big[|\nabla\dot{\Delta}_j n|^2-w_j|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u|^2+\frac{1}{\varepsilon}\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n-\chi\nabla\dot{\Delta}_j n\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\psi\Big]dx\\
&=\int\Big[-(\nabla u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n)\cdot\dot{\Delta}_j u-\mathrm{div}\,u\dot{\Delta}_j u\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n-R_{1,j}\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_j u+R_{2,j}\cdot\nabla\dot{\Delta}_j n\Big]dx.
\end{aligned}\tag{5.2.38}$$

对 $(5.2.30)_3$ 乘以 $-\Delta\dot{\Delta}_j\psi$ 并在 $\mathbb{R}^d$ 上分部积分, 我们得

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2dx+\int(b|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2+|\Delta\dot{\Delta}_j\psi|^2-c_1\nabla\dot{\Delta}_j n\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\psi+\dot{\Delta}_j H(n)\Delta\dot{\Delta}_j\psi)dx=0. \tag{5.2.39}$$

由 (5.2.38)-(5.2.39), (5.2.37) 成立. □

我们有柯西问题 (5.1.1) 解在高频的先验估计.

引理 5.2.7. 对给定的 $T>0$, 若 (u,n,ψ) 为当 $t\in(0,T)$ 时柯西问题 (5.1.1) 满足 (5.2.2) 的整

体解, 则在定理 1.3.27 的假设下, (u,n,ψ) 满足以下高频估计:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|(n,u,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\psi\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\psi_t\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\quad\le CX_2(0)+CX_2^2(t),\qquad 0<t<T,\end{aligned}\tag{5.2.40}$$

其中 $X_2(t)$ 由 (5.2.1) 定义, $C>0$ 为一个与时间和 ε 无关的常数.

证明. 对待选取的常数 δ_2 和 η_4, 我们引入

$$\begin{aligned}E_j(t):=\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}&[\frac{1}{2}|\dot{\Delta}_jn|^2+\frac{2^{-2j}}{2\eta_4}|\dot{\Delta}_jH(n)|^2+\frac{1}{2}w_j|\dot{\Delta}_ju|^2+\frac{\chi b}{2c_1}|\dot{\Delta}_j\psi|^2+\frac{\chi}{2c_1}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2\\&-\chi\dot{\Delta}_jn\dot{\Delta}_j\psi-\dot{\Delta}_jH(n)\dot{\Delta}_j\psi]dx+\eta_42^{-2j}\int_{\mathbb{R}^d}(\frac{\chi}{2c_1}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2+\dot{\Delta}_ju\cdot\nabla\dot{\Delta}_jn)dx,\end{aligned}\tag{5.2.41}$$

和

$$\begin{aligned}D_j(t):=\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}&(\frac{1}{\varepsilon}w_j|\dot{\Delta}_ju|^2+|\dot{\Delta}_j\psi_t|^2)dx+\eta_42^{-2j}\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\nabla\dot{\Delta}_jn|^2+\frac{\chi b}{c_1}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2\\&+\frac{\chi}{c_1}|\dot{\Delta}_j\psi|^2-2\chi\nabla\dot{\Delta}_jn\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\psi-w_j|\mathrm{div}\,\dot{\Delta}_ju|^2+\frac{1}{\varepsilon}\dot{\Delta}_ju\cdot\nabla\dot{\Delta}_jn\big)dx.\end{aligned}\tag{5.2.42}$$

由 (5.2.2) 及 (5.2.28), 存在一个与时间及 ε 无关的常数 $C_*>0$ 使得如果

$$X_2(0)\le\delta_2\le\frac{C_*}{2},\tag{5.2.43}$$

那么 w_j 满足

$$\frac{c_0}{2}\le c_0-C_*X_2(0)\le w_j\le c_0+C_*X_2(0)\le\frac{3c_0}{2},\quad j\in\mathbb{Z}.\tag{5.2.44}$$

又由 (5.2.16), 我们易得

$$\|u\|_{L^\infty_t(L^\infty)}+\varepsilon\|\nabla u\|_{L^\infty_t(L^\infty)}\lesssim\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_2(t).\tag{5.2.45}$$

根据 (5.2.27)、(5.2.37)、(5.2.44)、(5.2.45)、Bernstein 不等式及事实 $2^{-j}\lesssim\varepsilon$ $(j\ge J_\varepsilon-1)$, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_j(t)+D_j(t)\\&\lesssim\varepsilon\big(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(n,u)\|_{L^2}+\|u\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(n,H(n))\|_{L^2}+\|(G(n)_t,\nabla G(n))\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_ju\|_{L^2}\\&\quad+\|(R_{1,j},R_{2,j})\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}+\frac{1}{\eta_4}2^{-j}\|\dot{\Delta}_jH(n)_t\|_{L^2}\big)\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi,2^{-j}H(n))\|_{L^2}.\end{aligned}\tag{5.2.46}$$

为了估计 $E_j(t)$ 及 $D_j(t)$, 我们需要如下引理.

引理 5.2.8. 设 (u,n,ψ) 为当 $t\in(0,T)$ 时柯西问题 (5.1.1) 满足 (5.2.2) 的整体解. 在引理 5.2.7 的假设下, 存在一个充分小的常数 $\eta_4>0$ 使得对 $j\geq J_\varepsilon-1$, 以下估计成立:

$$\begin{cases} E_j(t)\sim\varepsilon\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi)\|_{L^2}^2+\varepsilon 2^{-2j}\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}^2,\\ D_j(t)\gtrsim\dfrac{1}{\varepsilon}E_j(t)+\|\dot{\Delta}_ju\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\dot{\Delta}_j\psi_t\|_{L^2}^2, \end{cases}\tag{5.2.47}$$

其中 $E_j(t)$ 和 $D_j(t)$ 分别由 (5.2.41) 和 (5.2.42) 定义.

证明. 注意到以下事实:

$$|\dot{\Delta}_jn|^2+\frac{\chi b}{c_1}|\dot{\Delta}_j\psi|^2-2\chi\dot{\Delta}_jn\dot{\Delta}_j\psi=(\dot{\Delta}_jn,\dot{\Delta}_j\psi)\mathbb{M}(\dot{\Delta}_jn,\dot{\Delta}_j\psi)^\top,$$

其中

$$\mathbb{M}:=\begin{pmatrix}1 & -\chi\\ -\chi & \frac{\chi b}{c_1}\end{pmatrix}.$$

我们易证如果 $\frac{\chi c_1}{b}<1$, 即 $\frac{\chi a}{b}\bar{\rho}<P'(\bar{\rho})$, 矩阵 $\mathbb{M}$ 是严格正定的. 从而, 我们有

$$|\dot{\Delta}_jn|^2+\frac{\chi b}{c_1}|\dot{\Delta}_j\psi|^2-2\chi\dot{\Delta}_jn\dot{\Delta}_j\psi\gtrsim|\dot{\Delta}_jn|^2+|\dot{\Delta}_j\psi|^2.\tag{5.2.48}$$

类似地, 我们得到

$$|\nabla\dot{\Delta}_jn|^2+\frac{\chi b}{c_1}|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2-2\chi\nabla\dot{\Delta}_jn\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\psi\gtrsim|\nabla\dot{\Delta}_jn|^2+|\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2.\tag{5.2.49}$$

我们从 (5.2.44)、(5.2.48)、Bernstein 不等式及 $2^{-j}\lesssim\varepsilon$ $(j\geq J_\varepsilon-1)$ 可得

$$\begin{cases} E_j(t)\leq\varepsilon C(1+\eta_4)\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi)\|_{L^2}^2+\varepsilon(\dfrac{1}{\eta_4}+C)2^{-2j}\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}^2,\\ E_j(t)\geq\varepsilon C(1-\eta_4)\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi)\|_{L^2}^2+\varepsilon(\dfrac{1}{\eta_4}-C)2^{-2j}\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}^2. \end{cases}\tag{5.2.50}$$

注意到

$$|\Delta\dot{\Delta}_j\psi|^2\geq\frac{1}{2}|\dot{\Delta}_jH(n)+c_1\dot{\Delta}_jn-b\dot{\Delta}_j\psi|^2-|\dot{\Delta}_j\psi_t|^2,$$

我们利用 (5.2.49) 及 Bernstein 不等式和事实 $2^{-j} \lesssim \varepsilon$ $(j \geq J_\varepsilon - 1)$ 证明

$$
\begin{aligned}
D_j(t) \geq & \frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^d}[(1-\eta_4)|\dot{\Delta}_j u|^2 + \varepsilon(1-\eta_4)|\dot{\Delta}_j \psi_t|^2 \\
& + \eta_4 2^{-2j}(|\nabla\dot{\Delta}_j n|^2 + |\nabla\dot{\Delta}_j\psi|^2 + |\Delta\dot{\Delta}_j\psi|^2)]dx \\
\geq & \frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^d}[(1-\eta_4)|\dot{\Delta}_j u|^2 + \varepsilon(1-\eta_4)|\dot{\Delta}_j \psi_t|^2 \\
& + \frac{\eta_4}{C}(|\dot{\Delta}_j n|^2 + |\dot{\Delta}_j\psi|^2 + 2^{2j}|\dot{\Delta}_j\psi|^2 + 2^{-2j}|\dot{\Delta}_j H(n) + c_1\dot{\Delta}_j n - b\dot{\Delta}_j\psi|^2)]dx \\
\geq & \frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^d}[(1-\eta_4)|\dot{\Delta}_j u|^2 + \varepsilon(1-\eta_4)|\dot{\Delta}_j \psi_t|^2 \\
& + \frac{\eta_4}{C}(|\dot{\Delta}_j n|^2 + |\dot{\Delta}_j\psi|^2 + 2^{2j}|\dot{\Delta}_j\psi|^2 + 2^{-2j}|\dot{\Delta}_j H(n)|^2)]dx.
\end{aligned}
\tag{5.2.51}
$$

在 (5.2.50)-(5.2.51) 中选定充分小的常数 $\eta_4 \in (0,1)$, 我们得到 (5.2.47). □

下面, 我们证明引理 5.2.7 的其余部分. 结合 (5.2.46)-(5.2.47), 我们得到

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}E_j(t) + \frac{1}{\varepsilon}E_j(t) \\
\lesssim & \Big(\|\nabla u\|_{L^\infty}\varepsilon\|\dot{\Delta}_j(n,u)\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}\varepsilon\|\dot{\Delta}_j n\|_{L^2} + \|(G(n)_t, \nabla G(n))\|_{L^\infty}\varepsilon\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2} \\
& + \|(R_{1,j}, R_{2,j})\|_{L^2} + \|\dot{\Delta}_j H(n)\|_{L^2} + 2^{-j}\|\dot{\Delta}_j H(n)_t\|_{L^2}\Big)\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}E_j(t)}, \quad j \geq J_\varepsilon - 1.
\end{aligned}
\tag{5.2.52}
$$

对 (5.2.52) 两边除以 $(\frac{1}{\varepsilon}E_j(t) + \eta^2)^{\frac{1}{2}}$ 并在 $[0,t]$ 上积分后取极限 $\eta \to 0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi)\|_{L^2} + \int_0^t \|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi)\|_{L^2}d\tau \\
\leq & \varepsilon\|\dot{\Delta}_j(n_0,u_0,\psi_0,\nabla\psi_0)\|_{L^2} + \varepsilon 2^{-j}\|\dot{\Delta}_j H(n_0)\|_{L^2} \\
& + \int_0^t \Big(\varepsilon\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(n,u)\|_{L^2} + \varepsilon\|u\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(n,H(n))\|_{L^2} + \varepsilon\|(R_{1,j},R_{2,j})\|_{L^2} \\
& + \varepsilon\|(\nabla G(n), G(n)_t)\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2} + \varepsilon\|\dot{\Delta}_j H(n)\|_{L^2} + 2^{-j}\|\dot{\Delta}_j H(n)_t\|_{L^2}\Big)d\tau.
\end{aligned}
\tag{5.2.53}
$$

对 (5.2.53) 乘以 $2^{j(\frac{d}{2}+1)}$ 并在 $j \geq J_\varepsilon - 1$ 上求和, 我们得

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon\|(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
\lesssim & X_2(0) + \|\nabla u\|_{L^1_t(L^\infty)}\varepsilon\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \varepsilon\|(\nabla G(n), G(n)_t)\|_{L^\infty_t(L^\infty)}\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
& + \varepsilon\sum_{j\geq J_\varepsilon-1}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|(R_{1,j},R_{2,j})\|_{L^1_t(L^2)} + \|H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|H(n)_t\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}.
\end{aligned}
\tag{5.2.54}
$$

不等式 (5.2.54) 右侧的非线性项估计如下. 首先, 我们易知

$$\|\nabla u\|_{L^1_t(L^\infty)}\varepsilon\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \leq \big(\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)\varepsilon\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim X_2^2(t). \tag{5.2.55}$$

由 (4.5.9)、(5.2.18) 及 Besov 空间中的插值不等式, 如下估计成立:

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L^2_t(L^\infty)}\|(n,H(n))\|^{h,J_\varepsilon}_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\big(\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\big)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\big(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big) \lesssim X_2^2(t).\end{aligned} \tag{5.2.56}$$

又由 $(5.1.1)_1$、(5.2.16) 及 (5.2.18), 我们有

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|(\nabla G(n),G(n)_t)\|_{L^\infty_t(L^\infty)}\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\lesssim \big(\varepsilon\|\nabla n\|_{L^\infty_t(L^\infty)}(1+\|u\|_{L^\infty_t(L^\infty)})+\varepsilon\|\nabla u\|_{L^2_t(L^\infty)}(1+\|n\|_{L^\infty_t(L^\infty)})\big)\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\lesssim \big(\|(n,u)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim X_2^2(t).\end{aligned} \tag{5.2.57}$$

为了估计交换子形式, 我们利用 (4.5.7) 及 (5.2.16) 得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sum_{j\geq J_\varepsilon-1}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\big(\|[u,\cdot\Delta]\nabla n\|_{L^1_t(L^2)}+\|[u,\cdot\Delta_j]\nabla u\|_{L^1_t(L^2)}\big)\\&\lesssim \|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\varepsilon\|(n,u)\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\&\lesssim (\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})})(\|(n,u)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}) \lesssim X_2^2(t).\end{aligned}$$

利用 (4.5.9)、(5.2.18) 及事实 $G(0)=0$, 我们可得

$$\varepsilon\|G(n)\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim \|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim X_2(t).$$

根据上面的不等式, (4.5.7) 及 (5.5.1), 以下估计成立:

$$\varepsilon\sum_{j\geq J_\varepsilon-1}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|[G(n),\dot{\Delta}_j]\mathrm{div}\,u\|_{L^1_t(L^2)} \lesssim \|u\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\varepsilon\|n\|_{L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim X_2^2(t).$$

因而, 交换子形式可作如下估计:

$$\varepsilon\sum_{j\geq J_\varepsilon-1}2^{j(\frac{d}{2}+1)}\|(R_{1,j},R_{2,j})\|_{L^1_t(L^2)} \lesssim X_2^2(t). \tag{5.2.58}$$

利用关于非线性函数 $H(n)$ 的二次估计 (5.5.12), 我们证明

$$\|H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim \big(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + \varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big)\big(\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})} + \|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big) \lesssim X_2^2(t). \tag{5.2.59}$$

最后, 我们利用 (4.5.5)、(4.5.9)、$(5.1.1)_1$、(5.2.16) 及 (5.2.18) 得到

$$\begin{aligned}
&\|H(n)_t\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \\
&\lesssim \big(\|H'(n)-H'(0)\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} + H'(0)\big)\|n_t\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \\
&\lesssim \|n\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\big(\|u\|_{L^2_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|n\|_{L^2_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + (1+\|n\|_{L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})})\|u\|_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\big) \lesssim X_2^2(t).
\end{aligned} \tag{5.2.60}$$

将上述估计 (5.2.55)-(5.2.60) 代入 (5.2.54), 我们有

$$\varepsilon\|(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim X_2(0) + X_2^2(t). \tag{5.2.61}$$

进一步, 注意到 u 满足

$$\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \varepsilon\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}, \qquad \frac{1}{\varepsilon}\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}.$$

由此及 (5.2.61) 我们可知

$$\varepsilon^{-\frac12}\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde L^2_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})} \lesssim \big(\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\big)^{\frac12}\big(\frac{1}{\varepsilon}\|u\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\big)^{\frac12} \lesssim X_2(0) + X_2^2(t). \tag{5.2.62}$$

根据 (5.2.16)、(5.2.59)-(5.2.61) 及对扩散方程 $(5.1.1)_3$ 的最优正则性估计 (4.5.12), ψ 还满足

$$\begin{aligned}
&\|\psi\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})} + \|\psi_t\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
&\lesssim \|\psi_0\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}} + \|b\psi - c_1 n - H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \\
&\lesssim \varepsilon\|\psi_0\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac{d}{2}+2}_{2,1}} + \|(n,\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} + \|H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})} \lesssim X_2(0) + X_2^2(t).
\end{aligned} \tag{5.2.63}$$

结合 (5.2.61)-(5.2.63), 我们有 (5.2.40). □

5.2.3 整体存在性

在该小节中, 我们首先用 Friedrichs 逼近方法构造局部逼近解, 并且通过小节 5.2.1-5.2.2 中建立的一致先验估计将局部解延拓为整体解, 然后证明逼近解序列收敛到柯西问题 (5.1.1)

的整体经典解.

对任意 $q\geq 1$, 我们求解如下柯西问题 (5.1.1) 逼近问题:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n\\ u\\ \psi\end{pmatrix}=\overline{\mathbf{M}}_q(n,u,\psi),\qquad \begin{pmatrix} n|_{t=0}\\ u||_{t=0}\\ \psi|_{t=0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{\mathbb{E}}_q n_0\\ \dot{\mathbb{E}}_q u_0\\ \dot{\mathbb{E}}_q \psi_0\end{pmatrix}, \tag{5.2.64}$$

其中 $\dot{\mathbb{E}}_q$ 为由 (4.2.58) 定义的 Friedrichs 投影, $\overline{\mathbf{M}}_q(n,u,\psi)$ 为

$$\overline{\mathbf{M}}_q(n,u,\psi):=\begin{pmatrix}-c_0\mathrm{div}\,u-\dot{\mathbb{E}}_q(G(n)\mathrm{div}\,u)-\dot{\mathbb{E}}_q(u\cdot\nabla n)\\ -\frac{1}{\varepsilon}u-\nabla n-\chi\nabla\psi-\dot{\mathbb{E}}_q(u\cdot\nabla u)\\ \Delta\psi-b\psi+c_1n+\dot{\mathbb{E}}_qH(n)\end{pmatrix}.$$

由 Bernstein 不等式, 我们易证对每一个 $q\geq 1, \overline{\mathbf{M}}_q(n,u,\psi)$ 的每一行在 L^2_q 中关于变量 (n,u,ψ) 是局部 Lipschitz 的. 从而, 我们利用 Cauchy-Lipschitz 定理 (参见 [8][124 页]) 证明存在一个最大时间 $T^q_*>0$ 使得常微分方程组 (5.2.64) 存在唯一的解 $(n^q,u^q,\psi^q)\in C([0,T^q_*);L^2_q)$.

设 $X_2(n,u,\psi)(t)$ 由 (5.2.1) 给出. 我们定义最大时间

$$\begin{aligned}T_q:=\sup\big\{t>0\mid &\text{柯西问题 (5.2.64) 在 } [0,t] \text{ 上存在解 } (n^q,u^q,\psi^q),\\ &\text{且 } X_2(n^q,u^q,\psi^q)\leq C_3X_2(0) \text{ 成立}\big\}\in(0,T^*_q].\end{aligned}\tag{5.2.65}$$

我们易知 $0<T_q\leq T^*_q$. 利用引理 5.2.1、5.2.2 和 5.2.7 中的先验估计, 由反证法我们易知 $T^*_q=T_q=\infty$, 且 (n^q,u^q,ψ^q) 为柯西问题 (5.2.64) 的整体解, 并满足

$$X(n^q,u^q,\psi^q)(t)\lesssim X_2(0),\quad t>0. \tag{5.2.66}$$

对给定的时间 $T>0$, 根据一致估计 (5.2.66) 及方程组 (5.2.64), 我们易证时间导数 (n^q_t,u^q_t,ψ^q_t) 与 q 无关的相应一致估计. 结合这些一致估计, Aubin-Lions 引理 (参见 [1,202]) 及 Cantor 对角线法则, 存在一个极限 (n,u,ψ) 使得当 $q\to\infty$ 时, 和 $\varphi_*\in C^\infty_c(\mathbb{R}^d\times(0,T))$, 在取子列的意义下, 我们有

$$\varphi_*(n^q,u^q,\psi^q)\to\varphi_*(n,u,\psi)\quad \text{于 } L^2(0,T;\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}).$$

因而, 我们易证 (n,u,ψ) 在分布意义下满足柯西问题 (5.1.1). 将此结合一致估计 (5.2.66)、Fatou 特性以及嵌入 $\dot{B}^{\frac{d}{2},\frac{d}{2}+k}_{2,1}\hookrightarrow C^k$ $(k=1,2)$, 我们证明整体解 (n,u,ψ) 为柯西问题 (5.1.1) 的一个经典解. 基于附录中关于非线性函数 $H(n)$ 的二次估计 (5.5.11)-(5.5.12), $(\rho,u,\phi):=(\frac{1}{a}(c_1n+H(n))+\bar{\rho},u,\psi+\bar{\rho})$ 为原始柯西问题 (1.3.39) 满足 (1.3.43)-(1.3.44) 的一个整体经典解. 为了完备定理 1.3.27 的证明, 我们将在小节 5.2.4 中证明解的唯一性.

5.2.4 唯一性

不失一般性, 在这一小节中, 我们取 $\varepsilon=1$. 在定理 1.3.27 的假设下, 对任意给定的时间 $T>0$, 设 (n_i,u_i,ψ_i) $(i=1,2)$ 为带有相同初值 (n_0,u_0,ψ_0) 的柯西问题 (5.1.1) 在 $[0,T]$ 上满足 (1.3.44) 的解. 引入 $(\widetilde{n},\widetilde{u},\widetilde{\psi}):=(n_1-n_2,u_1-u_2,\psi_1-\psi_2)$. 易证 $(\dot{\Delta}_j\widetilde{n},\dot{\Delta}_j\widetilde{u},\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi})$ 满足

$$\begin{cases}(\dot{\Delta}_j\widetilde{n})_t+u_1\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\widetilde{n}+(c_0+G(n_1))\operatorname{div}\dot{\Delta}_j\widetilde{u}=\widetilde{R}_{1,j},\\ (\dot{\Delta}_j\widetilde{u})_t+u_1\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\widetilde{u}+\dot{\Delta}_j\widetilde{u}+\nabla\dot{\Delta}_j\widetilde{n}-\chi\nabla\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}=\widetilde{R}_{2,j},\\ (\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi})_t-\Delta(\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi})+B\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}-c_1\dot{\Delta}_j\widetilde{n}=\dot{\Delta}_j(H(n_1)-H(n_2)),\end{cases}\tag{5.2.67}$$

其中 $w_{1,j}:=c_0+G(n_1)$, $\widetilde{R}_{i,j}$ $(i=1,2)$ 为非线性项

$$\begin{cases}\widetilde{R}_{1,j}:=[u_1,\dot{\Delta}_j]\nabla\widetilde{n}+[G(n_1),\dot{\Delta}_j]\operatorname{div}\widetilde{u}-\dot{\Delta}_j(\widetilde{u}\cdot\nabla n_2)-\dot{\Delta}_j\big((G(n_1)-G(n_2))\operatorname{div}u_2\big),\\ \widetilde{R}_{2,j}:=[u_1,\dot{\Delta}_j]\nabla\dot{\Delta}_j\widetilde{u}-\dot{\Delta}_j(\widetilde{u}\cdot\nabla u_2).\end{cases}$$

由 (1.3.44), 对 $i=1,2$, 我们有

$$\|(n_i,u_i)\|_{L^\infty}+\|(\nabla n_i,\nabla u_i)\|_{L^\infty}+\|(n_i,u_i)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\lesssim 1,\quad t\in[0,T].\tag{5.2.68}$$

类似于 (5.2.30)-(5.2.34) 的证明, 我们可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}[\frac{1}{2}|\dot{\Delta}_j\widetilde{n}|^2+\frac{1}{2}w_{1,j}|\dot{\Delta}_j\widetilde{u}|^2+\frac{\chi b}{2c_1}|\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}|^2+\frac{\chi}{2c_1}|\nabla\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}|^2-\chi\dot{\Delta}_j\widetilde{n}\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}]dx\\ &\quad+\int(w_{1,j}|\dot{\Delta}_j\widetilde{u}|^2+|\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}_t|^2)dx\\ &=\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{2}\operatorname{div}u_1|\dot{\Delta}_j\widetilde{n}|^2+\widetilde{R}_{1,j}\dot{\Delta}_j\widetilde{n}+\frac{1}{2}w_{1,j}\operatorname{div}u_1|\dot{\Delta}_j\widetilde{u}|^2+w_{1,j}\widetilde{R}_{2,j}\cdot\dot{\Delta}_j\widetilde{u}\\ &\quad+\frac{1}{2}(w_{1,j})_t|\dot{\Delta}_j\widetilde{u}|^2+\nabla w_{1,j}\cdot(\frac{1}{2}u_1|\dot{\Delta}_j\widetilde{u}|^2+\dot{\Delta}_j\widetilde{n}\dot{\Delta}_j\widetilde{u}-\chi\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}\dot{\Delta}_j\widetilde{u})\\ &\quad+\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}_t\dot{\Delta}_j(H(n_1)-H(n_2))-c_1(-u_1\cdot\nabla\dot{\Delta}_j\widetilde{n}+\widetilde{R}_{1,j})\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}\Big)dx,\quad j\in\mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{5.2.69}$$

为简单起见, 我们省略上式的证明过程. 借助于 (5.2.44)-(5.2.43), 我们有

$$\frac{c_0}{2}\le w_{1,j}\le\frac{3c_0}{2},\quad j\in\mathbb{Z}.\tag{5.2.70}$$

根据 (1.3.40)、(1.3.44)、(5.2.69)-(5.2.70) 及事实

$$\int_{\mathbb{R}^d}\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}_t\dot{\Delta}_j(H(n_1)-H(n_2))dx\le\frac{1}{4}\|\dot{\Delta}_j\widetilde{\psi}_t\|_{L^2}^2+\|H(n_1)_j-H(n_2)_j\|_{L^2}^2,$$

我们对 (5.2.69) 直接计算后可得

$$
\begin{aligned}
\|(\widetilde{n},\widetilde{u},\widetilde{\psi},\nabla\widetilde{\psi})\|^2_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \leq C\int_0^t \Big(&\|(\widetilde{n},\widetilde{u},\widetilde{\psi},\nabla\widetilde{\psi})\|^2_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|H(n_1)-H(n_2)\|^2_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{\frac{d}{2}j}\|(\widetilde{R}_{1,j}\widetilde{R}_{2,j})\|_{L^2}\|(\widetilde{n},\widetilde{u},\widetilde{\psi},\nabla\widetilde{\psi})\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\Big)d\tau.
\end{aligned}
\tag{5.2.71}
$$

利用 (4.5.5)、(4.5.7)、(4.5.10) 以及 (5.2.68), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j\frac{d}{2}}\|\widetilde{R}_{1,j}\|_{L^2} \lesssim &\|u_1\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|\widetilde{n}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|G(n_1)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} + \|n_2\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \\
&+ \|u_2\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|G(n_1)-G(n_2)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim \|(\widetilde{n},\widetilde{u})\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}.
\end{aligned}
\tag{5.2.72}
$$

类似地, 以下估计成立:

$$
\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j\frac{d}{2}}\|\widetilde{R}_{2,j}\|_{L^2} \lesssim \|(u_1,u_2)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim \|\widetilde{u}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}. \tag{5.2.73}
$$

最后, 我们利用仿线性化估计 (4.5.10) 得

$$
\|H(n_1)-H(n_2)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim \|\widetilde{n}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}. \tag{5.2.74}
$$

根据 (5.2.71)-(5.2.74) 及 Grönwall 不等式, 唯一性得证

5.3 定理 1.3.30 的证明

5.3.1 低频 $\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}$ 估计

为了得到柯西问题 (5.1.1) 整体经典解得最优时间衰减估计, 我们首先需要建立如下低频估计.

引理 5.3.1. 对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$, 设 (u,n,ψ) 为柯西问题 (5.1.1) 由定理 1.3.27 给出的整体解, 且 (φ,ω) 由 (5.2.3) 定义. 那么在定理 1.3.30 的假设下, 如下不等式成立:

$$
X_{2,\sigma_0}(t) \leq C\big(\|(n_0,u_0,\psi_0)^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} + X_2(0)\big), \quad t>0. \tag{5.3.1}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
X_{2,\sigma_0}(t):=&\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\varepsilon\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\
&+\|\psi_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|\varphi\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}\cap\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}.
\end{aligned}
\tag{5.3.2}
$$

证明. 由方程 $(5.2.5)_1$ 及估计 (5.5.3), n 满足

$$
\begin{aligned}
&\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}\\
&\lesssim\|n_0\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\varepsilon\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}\cap\dot{B}^{\sigma_0+3}_{2,\infty})}+\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}+\|R_1\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}.
\end{aligned}
\tag{5.3.3}
$$

我们将上式与 $(5.2.5)_2$、(5.5.3) 及 (5.2.11) 联立得

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}\cap\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}\\
&\lesssim\|\varphi|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}+\|R_2\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\
&\lesssim\|(n,\varphi)|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\varepsilon\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}\cap\dot{B}^{\sigma_0+3}_{2,\infty})}+\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}+\|(R_1,R_2)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}.
\end{aligned}
\tag{5.3.4}
$$

此外, 利用 $(5.2.5)_3$ 及 (5.3.4), 我们也有

$$
\begin{aligned}
&\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\
&\lesssim\|\omega|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\varepsilon^2\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+3}_{2,\infty})}+\varepsilon\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}\cap\dot{B}^{\sigma_0+3}_{2,\infty})}+\varepsilon\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\|R_3\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}.
\end{aligned}
\tag{5.3.5}
$$

将 (5.3.3)-(5.3.5) 及 (5.5.1) 相结合可知若 J_ε 由 (1.3.41) 给定, 则对一个充分小且与 ε 无关的常数, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\|(n,\varphi,\omega)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}\cap\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\
&\lesssim\|(n,\varphi,\omega)|_{t=0}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|(R_1,R_2,R_3)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}.
\end{aligned}
\tag{5.3.6}
$$

我们估计非线性项 R_i $(i=1,2,3)$. 由 (5.2.16)、(5.2.18) 及 (5.5.13), $H(n)$ 满足

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}&\lesssim(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})})(\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})})\\
&\lesssim X_2(t)X_{2,\sigma_0}(t)+X_2^2(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.7}
$$

又由 (4.5.9)、(5.2.16) 及 (5.2.18), 以下估计成立:

$$
\begin{aligned}
&\|u\cdot\nabla u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|u\cdot\nabla n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|u\cdot\nabla G(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|H(n)_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\
&\lesssim \|u\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|(n,u)\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}+\|n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\|u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty})}\\
&\lesssim X_2(t)X_{2,\sigma_0}(t)+X_2^2(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.8}
$$

结合 (5.2.8) 及 (5.3.7)-(5.3.8), 我们有

$$
\begin{aligned}
\|(R_1,R_2,R_3)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\lesssim\ &\varepsilon\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\|u\cdot\nabla n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|u\cdot\nabla u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\
&+\|G(n)\mathrm{div}\,u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\|H(n)_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\
\lesssim\ &X_2(t)X_{2,\sigma_0}(t)+X_2^2(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.9}
$$

将 (5.3.6) 和 (5.3.9) 联立, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\|(n,\varphi,\omega)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}+\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\|\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}\cap\dot{B}^{\sigma_0+2}_{2,\infty})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty})}\\
&\lesssim X_2(0)+\|(n_0,u_0,\psi_0)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_2(t)X_{2,\sigma_0}(t)+X_2^2(t).
\end{aligned}
$$

因而, 类似于 (5.2.24)-(5.2.26) 的计算, 我们得

$$
X_{2,\sigma_0}(t)\lesssim X_2(0)+\|(n_0,u_0,\psi_0)^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+X_2(t)X_{2,\sigma_0}(t)+X_2^2(t).
$$

对上式利用小性 $X_2(t)\lesssim X_2(0)<<1$, 我们有 (5.3.1). □

5.3.2 时间加权能量估计

我们应用第四章的方法证明柯西问题 (5.1.1) 整体经典解的时间衰减估计 (1.3.45)-(1.3.47). 对充分大的常数 θ, 我们引入

$$
\begin{aligned}
D_{2,\theta}(t):=\ &\|\tau^\theta(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|\tau^\theta(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|\tau^\theta u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&+\varepsilon\|\tau^\theta(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|\tau^\theta u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\tau^\theta u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&+\|\tau^\theta(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^\theta\psi\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+3}_{2,1})}\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\|\tau^\theta\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\tau^\theta\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}
\end{aligned}
\tag{5.3.10}
$$

此处变量 (φ,ω) 由 (5.2.3) 给出.

首先, 我们有如下低频时间加权能量估计.

引理 5.3.2. 在定理 1.3.30 的假设下, 如果 (u,n,ψ) 为柯西问题 (5.1.1) 由定理 1.3.27 给出的整体解, 那么对 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$、$\theta>1+\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)$ 及任意待选取的常数 $\eta>0$, (n,u,ψ) 满足

$$
\begin{aligned}
&\|\tau^{\theta}(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|\tau^{\theta}(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\quad+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\tau^{\theta}u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\tau^{\theta}\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}\varphi\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\\
&\quad\leq\frac{C\big(X_2(t)+X_{2,\sigma_0}(t)\big)}{\eta}t^{\theta}(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}+C\big(\eta+X_2(t)\big)D_{2,\theta}(t),\quad t>0,
\end{aligned}
\tag{5.3.11}
$$

其中 $X_2(t)$、(φ,ω)、$X_{2,\sigma_0}(t)$ 及 $D_{2,\theta}(t)$ 分别由 (5.2.1)、(5.2.3)、(5.3.1) 及 (5.3.10) 给出.

证明. 设 (φ,ω) 为由 (5.2.3) 给出的有效变量. 将方程组 (5.2.5) 乘以 t^{θ}, 我们有

$$
\begin{cases}
(t^{\theta}n)_t-\tilde{\Delta}_1(t^{\theta}n)=\theta t^{\theta-1}n+t^{\theta}L_1+t^{\theta}R_1,\\
(t^{\theta}\varphi)_t-\tilde{\Delta}_2(t^{\theta}\varphi)=\theta t^{\theta-1}\varphi+t^{\theta}L_2+t^{\theta}R_2,\\
(t^{\theta}\omega)_t+\dfrac{1}{\varepsilon}(t^{\theta}\omega)=\theta t^{\theta-1}\omega+t^{\theta}L_3+t^{\theta}R_3,
\end{cases}
$$

其中 $\tilde{\Delta}_i$ $(i=1,2)$、L_i $(i=1,2,3)$ 与 R_i $(i=1,2,3)$ 分别由 (5.2.6)、(5.2.7) 及 (5.2.8) 给定. 类似于 (5.2.10)-(5.2.22) 的计算过程, 我们可得

$$
\begin{aligned}
&\|\tau^{\theta}(n,\varphi,\omega)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|\tau^{\theta}n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\\
&\quad+\|\tau^{\theta}\varphi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\tau^{\theta}\omega\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\quad\lesssim\int_0^t\tau^{\theta-1}\|(n,\varphi,\omega)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau+X_2(t)D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.12}
$$

我们利用估计 (5.3.12) 重复 (5.2.24)-(5.2.26) 的证明可知

$$
\begin{aligned}
&\|\tau^{\theta}(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|\tau^{\theta}(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\\
&\quad+\|\tau^{\theta}u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\tau^{\theta}u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^2_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\
&\quad\lesssim\int_0^t\tau^{\theta-1}\big(\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\big)d\tau+X_2(t)D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.13}
$$

为简单起见, 我们省略 (5.3.12)-(5.3.13) 的证明. 为了估计不等式 (5.3.13) 右侧关键的第一项,

利用插值不等式 (4.5.2) 及 Young 不等式, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \tau^{\theta-1}\|(n,u,\psi)^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}\,d\tau\\
&\lesssim \int_0^t \tau^{\theta-1}\Big(\|(n,u,\psi)^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot B^{\sigma_0}_{2,\infty}}\Big)^{\frac{2}{\frac d2+2-\sigma_0}}\Big(\|(n,u,\psi)^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot B^{\frac d2+2}_{2,1}}\Big)^{\frac{\frac d2-\sigma_0}{\frac d2+2-\sigma_0}}d\tau\\
&\lesssim \Big(X_{2,\sigma_0}(t)t^{\theta-\frac12(\frac d2-\sigma_0)}\Big)^{\frac{2}{\frac d2+2-\sigma_0}}\Big(\frac1\varepsilon\big(\varepsilon\|\tau^\theta(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+2}_{2,1})}+\|\tau^\theta u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}\big)\Big)^{\frac{\frac d2-\sigma_0}{\frac d2+2-\sigma_0}}\\
&\lesssim \frac{X_{2,\sigma_0}(t)}{\eta}t^\theta(\varepsilon t)^{-\frac12(\frac d2-\sigma_0)}+\eta D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.14}
$$

又由 (5.2.16), 如下估计成立:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \tau^{\theta-1}\|(n,u,\psi)^{h,J_\varepsilon}\|_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}\,d\tau\\
&\lesssim \int_0^t \tau^{\theta-1}\Big(\varepsilon\|(n,u,\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac d2+1}_{2,1}}\Big)^{\frac{2}{\frac d2+2-\sigma_0}}\Big(\|(n,u,\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac d2+1}_{2,1}}\Big)^{\frac{\frac d2-\sigma_0}{\frac d2+2-\sigma_0}}d\tau\\
&\lesssim \Big(X(t)\int_0^t \tau^{\theta-\frac12(\frac d2-\sigma_0)-1}d\tau\Big)^{\frac{2}{\frac d2+2-\sigma_0}}\Big(\|\tau^\theta(n,u,\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}\Big)^{\frac{\frac d2-\sigma_0}{\frac d2+2-\sigma_0}}\\
&\lesssim \frac{X_2(t)}{\eta}t^{\theta-\frac12(\frac d2-\sigma_0)}+\eta D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.15}
$$

此外, 根据仿线性化估计 (4.5.9) 及 (5.3.14)-(5.3.15), 我们得

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \tau^{\theta-1}\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}d\tau &\lesssim \int_0^t \tau^{\theta-1}\big(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}+\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}\big)dx\\
&\lesssim \frac{X_2(t)}{\eta}t^{\theta-\frac12(\frac d2-\sigma_0)}+\eta D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.16}
$$

联立 (5.3.14)-(5.3.16), 我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \tau^{\theta-1}\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}d\tau &\lesssim \int_0^t \tau^{\theta-1}\big(\|(n,u,\psi)^{\ell,J_\varepsilon}\|_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}+\|(n,u,\psi)^{h,J_\varepsilon}\|_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}\big)d\tau\\
&\lesssim \frac{X_{2,\sigma_0}(t)+X_2(t)}{\eta}t^\theta(\varepsilon t)^{-\frac12(\frac d2-\sigma_0)}+\eta D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.17}
$$

由 (5.3.12)-(5.3.13) 及 (5.3.17), (5.3.11) 得证. □

下面, 我们证明高频时间加权估计.

引理 5.3.3. 在定理 1.3.30 的假设下, 如果 (u,n,ψ) 为柯西问题 (5.1.1) 由定理 1.3.27 给出的整体解, 那么 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2})$、$\theta>1+\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)$ 及任意待选取的常数 $\eta>0$, (n,u,ψ) 满足如下时间加权估计:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\|\tau^{\theta}(n,u,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}(n,u,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\quad\leq\frac{CX_2(t)}{\eta}t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}+C\big(\eta+X_2(t)\big)D_{2,\theta}(t),\quad t>0.
\end{aligned}
\tag{5.3.18}
$$

其中 $X_2(t)$、$X_{2,\sigma_0}(t)$ 及 $D_{2,\theta}(t)$ 分别由 (5.2.1)、(5.3.1) 及 (5.3.10) 给出.

证明. 对 $j\geq J_\varepsilon-1$, 我们对不等式 (5.2.52) 两侧乘以 t^θ 得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big(t^\theta E_j(t)\big)+\frac{1}{\varepsilon}t^\theta E_j(t)\\
&\lesssim t^{\theta-1}E_j(t)+t^\theta\Big(\|\nabla u\|_{L^\infty}\varepsilon\|\dot{\Delta}_j(n,u)\|_{L^2}\\
&\quad+\|u\|_{L^\infty}\varepsilon\|\dot{\Delta}_j(n,H(n))\|_{L^2}+\|(G(n)_t,\nabla G(n))\|_{L^\infty}\varepsilon\|\dot{\Delta}_j u\|_{L^2}\\
&\quad+\|(R_{1,j},R_{2,j})\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}+2^{-j}\|\dot{\Delta}_jH(n)_t\|_{L^2}\Big)\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}E_j(t)}.
\end{aligned}
\tag{5.3.19}
$$

上式与 $(5.2.47)_1$ 及事实 $t^\theta\sqrt{E_j(t)}|_{t=0}=0$ 给出

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon t^\theta\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi)\|_{L^2}+\int_0^t\tau^\theta\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi)\|_{L^2}d\tau\\
&\lesssim\int_0^t\tau^{\theta-1}\big(\|\dot{\Delta}_j(n,u,\psi,\nabla\psi)\|_{L^2}+2^{-j}\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}\big)d\tau\\
&\quad+\int_0^t\tau^\theta\Big(\varepsilon\|\nabla u\|_{L^\infty}\big(\|\dot{\Delta}_j(n,u)\|_{L^2}+2^{-j}\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}\big)+\varepsilon\|u\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_j(n,H(n))\|_{L^2}\\
&\quad+\varepsilon\|\big(\nabla G(n)\big)\|_{L^\infty}\|\dot{\Delta}_ju\|_{L^2}+\varepsilon\|(R_{1,j},R_{2,j})\|_{L^2}+\|\dot{\Delta}_jH(n)\|_{L^2}+2^{-j}\|\dot{\Delta}_jH(n)_t\|_{L^2}\Big)d\tau.
\end{aligned}
$$

类似于 (5.2.51)-(5.2.61) 的证明过程, 我们易证

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\|\tau^{\theta}(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}+\|\tau^{\theta}(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\\
&\lesssim\varepsilon\int_0^t\tau^{\theta-1}\big(\|(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}+\|H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\big)d\tau+X_2(t)D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
\tag{5.3.20}
$$

(5.3.20) 证明的细节在此省略. 对应于高频耗散结构, 不等式 (5.3.20) 右侧的第一项估计如

下:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\int_0^t \tau^{\theta-1}\|(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}d\tau\\
&\lesssim \Big(t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}\varepsilon\|(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)^{\frac{2}{\frac{d}{2}+2-\sigma_0}}\Big(\|(n,u,\psi,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\Big)^{\frac{\frac{d}{2}-\sigma_0}{\frac{d}{2}+2-\sigma_0}}d\tau \qquad (5.3.21)\\
&\lesssim \frac{X_2(t)}{\eta}t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}+\eta D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
$$

利用 (4.5.9) 及 (5.2.16), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\int_0^t \tau^{\theta-1}\|H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}d\tau &\lesssim \varepsilon\int_0^t \tau^{\theta-1}(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}})d\tau\\
&\lesssim \Big(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}\Big)^{\frac{2}{\frac{d}{2}+2-\sigma_0}}\Big(\varepsilon\|\tau^\theta n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+2}_{2,1})}\Big)^{\frac{\frac{d}{2}-\sigma_0}{\frac{d}{2}+2-\sigma_0}}\\
&\quad+\Big(\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}\Big)^{\frac{2}{\frac{d}{2}+2-\sigma_0}}\Big(\|\tau^\theta n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\Big)^{\frac{\frac{d}{2}-\sigma_0}{\frac{d}{2}+2-\sigma_0}} \qquad (5.3.22)\\
&\lesssim \frac{X_{2,\sigma_0}(t)+X_2(t)}{\eta}t^{\theta-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}+\eta D_{2,\theta}(t).
\end{aligned}
$$

根据 (5.3.20)-(5.3.22), (5.3.11) 得证. □

定理 1.3.30 的证明: 在定理 1.3.30 的假设下, 令 (n,u,ψ) 为柯西问题 (5.1.1) 由定理 1.3.27 给出的整体解. 对任意常数 $\theta>1+\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)$ 及 $\eta>0$, 根据引理 5.3.2-5.3.3, 我们有

$$
D_{2,\theta}(t)\lesssim \frac{X_2(t)+X_{2,\sigma_0}(t)}{\eta}t^\theta(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}+\big(\eta+X_2(t)\big)D_{2,\theta}(t),\quad t>0, \qquad (5.3.23)
$$

其中 $X_2(t)$、$X_{2,\sigma_0}(t)$ 及 $D_{2,\theta}(t)$ 分别由 (5.2.1)、(5.3.1) 及 (5.3.10) 给出. 由 (1.3.44)、(5.3.1) 及 (5.3.23), 我们选取一个充分小的常数 $\eta>0$ 使得 (n,u,ψ) 满足

$$
\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon\|(n,u,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\lesssim \frac{1}{t^\theta}D_{2,\theta}(t)\lesssim(\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)},\quad t\geq 1. \qquad (5.3.24)
$$

应用 (5.2.16)、(5.3.24) 及 $X_2(t)\lesssim X_2(0)$ $(0\leq t\leq 1)$, 我们得到

$$
\|(n,u,\psi)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\lesssim\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\varepsilon\|(n,u,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\lesssim(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)},\quad t>0. \qquad (5.3.25)
$$

从而, 由 (4.5.2)、(5.2.16)、(5.3.1) 及 (5.3.25), (n,u,ψ) 满足

$$
\begin{aligned}
\|(n,u,\psi)\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}} &\lesssim \|(n,u,\psi)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}^{\frac{\frac{d}{2}-\sigma}{\frac{d}{2}-\sigma_0}} \|(n,u,\psi)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}^{\frac{\sigma-\sigma_0}{\frac{d}{2}-\sigma_0}} \\
&\lesssim \big(\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} + \varepsilon\|(n,u,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\big)^{\frac{\frac{d}{2}-\sigma}{\frac{d}{2}-1-\sigma_0}} (1+\varepsilon t)^{-\frac{\sigma-\sigma_0}{\frac{d}{2}-\sigma_0}\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)} \\
&\lesssim (1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)}, \qquad \sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}).
\end{aligned}
$$

我们将上式与 (5.3.25) 和 (5.5.11)-(5.5.12) 相结合得到最优时间衰减估计 (1.3.45).

其次, 我们证明 (1.3.46). 注意到方程 $(5.1.1)_2$ 可改写为

$$
u = e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}u_0 + \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\big(-c_0\nabla n + \chi\nabla\psi - u\cdot\nabla u\big)d\tau. \tag{5.3.26}
$$

因而, u 满足

$$
\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} \lesssim e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}\|u_0\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} + \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\big(\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}} + \|u\cdot\nabla u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\big)d\tau. \tag{5.3.27}
$$

由 $\sigma_0\le\frac{d}{2}-1$ 及 $(1.3.45)_1$, 我们有

$$
\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}} \lesssim (1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}, \tag{5.3.28}
$$

又根据 (1.3.45)、(4.5.6) 及 $\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim X_2(t)\lesssim X_2(0)$, 如下估计成立:

$$
\|u\cdot\nabla u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u\|_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}} \lesssim (1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}. \tag{5.3.29}
$$

我们将 (5.3.28)-(5.3.29) 代入 (5.3.27) 可得

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} &\lesssim \|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}} + \|u\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \\
&\lesssim e^{-\frac{1}{\varepsilon}t} + \int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}(1+\varepsilon\tau)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}d\tau \\
&\lesssim (1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}},
\end{aligned}
$$

此处我们用到 (5.3.25) 以及事实

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}(1+\varepsilon\tau)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}d\tau\\
&\lesssim e^{-\frac{1}{2\varepsilon}t}\int_0^{\frac{t}{2}}(1+\varepsilon\tau)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}d\tau+(1+\frac{1}{2}\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}\int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}d\tau\\
&\lesssim \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}.
\end{aligned}
$$

此外, 我们易知 $\widetilde{\varphi}:=b\psi-c_1n$ 满足

$$
\widetilde{\varphi}_t+b\widetilde{\varphi}=b\Delta\psi+c_1c_0\mathrm{div}\,u+bH(n)+c_1u\cdot\nabla u+c_1G(n)\mathrm{div}\,u. \tag{5.3.30}
$$

类似地, 利用 (1.3.45)、(4.5.6)、(4.5.9)、(5.2.16) 及 (5.3.30), 我们得到

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{\varphi}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\lesssim{}& e^{-bt}\|(n_0,\psi_0)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\int_0^t e^{-b(t-\tau)}\big(\frac{1}{\varepsilon}\|\psi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}+\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}\\
&+\|(n,u)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}(\|(n,u)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0+1}_{2,\infty}}+\|(n,u)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}})+\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\big)dx.
\end{aligned} \tag{5.3.31}
$$

由 (4.5.9)、(5.2.16)、(5.3.1)、(5.3.25) 及 (5.5.13), $H(n)$ 满足

$$
\begin{cases}
\|H(n)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\lesssim\|n\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\lesssim(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma_0)}\lesssim(1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}},\\
\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}\lesssim\|n\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}(\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\varepsilon\|n\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}})\lesssim(1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}.
\end{cases} \tag{5.3.32}
$$

从而, (5.2.16)、(5.3.25) 以及 (5.3.31)-(5.3.32) 给出估计

$$
\begin{aligned}
\|B\psi-c_1n-H(n)\|_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}&\lesssim\|\widetilde{\varphi}\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma_0}_{2,\infty}}+\|(n,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}+\|H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\\
&\lesssim\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}(\sigma-\sigma_0)\}}.
\end{aligned}
$$

最后, 当 $d\geq 2$ 及 $\sigma_0\in[-\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$ 时, 我们对方程 (5.3.26) 作 $\dot{B}^{\sigma}_{2,1}$ 范数 ($\sigma\in(\sigma_0,\frac{d}{2}-1]$) 估计

$$
\begin{aligned}
\|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}&\lesssim e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}\|u_0\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}}+\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}\big(\|(n,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma+1}_{2,1}}+\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|u\|_{\dot{B}^{\sigma+1}_{2,1}}\big)d\tau\\
&\lesssim\frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)},
\end{aligned}
$$

此处我们用到 $\|(n,u,\psi)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma+1}_{2,1}} \lesssim (1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}$. 因而, 如下时间衰减估计成立:

$$\|u\|_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}} \lesssim \|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}} + \|u\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}} \lesssim \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}, \quad \sigma \in (\sigma_0, \frac{d}{2}-1].$$

类似地, 我们易证得

$$\|B\psi - c_1 n - H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\sigma}_{2,1}} \lesssim \frac{1}{\varepsilon}(1+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}(1+\sigma-\sigma_0)}, \quad \sigma \in (\sigma_0, \frac{d}{2}-1].$$

为简单起见, 我们省略上式的证明细节. 定理 1.3.34 证毕.

5.4 松弛极限

5.4.1 定理 1.3.33 的证明

为了研究具有趋化性的双曲-抛物方程 (1.3.39) 的松弛极限问题, 我们首先要证明 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 的整体存在性和唯一性, 即定理 1.3.30. 由二阶泰勒展开, 存在一个函数 G_1 满足 $G_1(\bar{\rho})=0$ 和

$$P(\rho^*)-P(\bar{\rho}) = P'(\bar{\rho})(\rho^*-\bar{\rho}) + G_1(\rho^*)(\rho^*-\bar{\rho}). \tag{5.4.1}$$

我们也注意到

$$\Delta\phi^* = \chi a\bar{\rho}(b-\Delta)^{-1}\Delta\rho^*. \tag{5.4.2}$$

将 (5.4.1)-(5.4.2) 代入 $(1.3.37)_1$, 我们将 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 改写如下:

$$\begin{cases} \rho^*_t - \tilde{\Delta}_*\rho^* = \Delta(G_1(\rho^*)(\rho^*-\bar{\rho})) - \chi \mathrm{div}((\rho^*-\bar{\rho})\nabla\phi^*), \\ \phi^* - \bar{\phi} = a(b-\Delta)^{-1}(\rho^*-\bar{\rho}), \end{cases} \tag{5.4.3}$$

其中

$$\tilde{\Delta}_* := (P'(\bar{\rho}) - \chi a\bar{\rho}(b-\Delta)^{-1})\Delta. \tag{5.4.4}$$

我们根据 (5.4.3) 及 (5.5.3) 可得

$$\begin{aligned} &\|\rho^*-\bar{\rho}\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1})} + \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})} \\ &\quad \lesssim \|\rho^*_0-\bar{\rho}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} + \|G_1(\rho^*)(\rho^*-\bar{\rho})\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}+2}_{p,1})} + \|(\rho^*-\bar{\rho})\nabla\phi^*\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})}. \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

为了估计 (5.4.5) 右侧非线性项, 我们利用方程 $(5.4.3)_2$ 及 Bessel 势 $(b-\Delta)^{-1}$ 的正则性特性 5.2.11) 得到

$$\begin{cases} \|\phi^*-\bar{\phi}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2}\cap\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+4})} \leq \|\rho-\bar{\rho}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})}, \\ \|\phi^*-\bar{\phi}\|_{\widetilde{L}_t^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} \lesssim \|\rho-\bar{\rho}\|_{\widetilde{L}_t^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} \lesssim \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}})} + \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})}. \end{cases} \tag{5.4.6}$$

应用 Morser 型乘积估计 (4.5.4)、仿线性化估计 (4.5.9) 以及 (5.4.6), 我们有

$$\|G_1(\rho^*)(\rho^*-\bar{\rho})\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})} \lesssim \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}})} \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})}, \tag{5.4.7}$$

以及

$$\begin{aligned} &\|(\rho^*-\bar{\rho})\nabla\phi^*\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} \\ &\quad\lesssim \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}})} \|\phi^*-\bar{\phi}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})} + \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} \|\phi^*-\bar{\phi}\|_{L_t^2(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} \\ &\quad\lesssim \big(\|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}})} + \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})}\big)^2. \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

又由 (4.5.5) 和 (4.5.9), 我们得到

$$\|u^*\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} \lesssim \|(\rho^*-\bar{\rho},\phi^*-\bar{\phi})\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})}. \tag{5.4.9}$$

从而, 根据 (5.4.5) 及 (5.4.7)-(5.4.9), 以下估计成立:

$$\begin{aligned} &\|\rho^*-\bar{\rho}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}})} + \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})} + \|u^*\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} + \|\phi^*-\bar{\phi}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2}\cap\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+4})} \\ &\quad\lesssim \|\rho_0^*-\bar{\rho}\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}}} + \big(\|\rho^*-\bar{\rho}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}})} + \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})}\big)^2. \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

我们能够利用 Friedrichs 逼近格式以及上述先验估计 (5.4.10) 推出存在充分小的常数 $\delta_1^*>0$ 使得条件 (1.3.49) 成立, 那么不等式 (5.4.10) 可以关于任意时间有界. 因而, 柯西问题 (1.3.37) 存在一个整体强解. 另一方面, 易证该解在 $\widetilde{L}^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})\cap L^1(0,T;\dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})$ 意义下是唯一的. 为简单起见, 我们省略唯一性的证明.

5.4.2 定理 1.3.34 的证明

在该小节中, 我们建立定理 1.3.33 关于双曲-抛物方程组 (1.3.39) 整体解收敛到 Keller-Segel 方程组 (1.3.37) 整体解的收敛速率估计.

根据定理 1.3.27, 我们可以得到关于 $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$ 与 ε 无关的一致估计.

引理 5.4.1. 在定理 1.3.27 的假设下, 令 (ρ, u, ϕ) 为由定理 1.3.27 给出的方程组 (5.1.1) 的整体经典解, $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$ 由 (1.3.35) 给定. 则 $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$ 满足

$$\begin{cases} \|\rho^\varepsilon-\bar\rho\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\|(\rho^\varepsilon-\bar\rho,\phi^\varepsilon-\bar\phi)\|_{\widetilde{L}^2_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}\le CX_2(0), \\ \|\omega^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\varepsilon\|\phi^\varepsilon_t\|_{L^1_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}\le C\varepsilon X_2(0), \end{cases} \tag{5.4.11}$$

其中 $\omega^\varepsilon := u^\varepsilon + \frac{1}{\rho^\varepsilon}\nabla P(\rho^\varepsilon) - \chi\nabla\phi^\varepsilon$, $X_2(0)$ 由 (5.2.1) 定义.

证明. $(5.4.11)_1$-$(5.4.11)_2$ 可由 (1.3.44) 及尺度变换 (1.3.35) 直接得到. 我们回顾在方程组 (5.1.1) 中有如下关系:

$$a(\rho-\bar\rho)=c_1n+H(n).$$

因而, 我们应用 (1.3.35)、(5.2.16) 及关于二次非线性函数的估计 (5.5.11)-(5.5.12) 得到

$$\begin{aligned} &\|\rho^\varepsilon-\bar\rho\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\varepsilon\|\rho^\varepsilon-\bar\rho\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})} \\ &\quad=\|\rho-\bar\rho\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\varepsilon\|\rho-\bar\rho\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})} \\ &\quad\lesssim\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}+\varepsilon\|H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})} \\ &\quad\lesssim\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2}_{2,1})}+\varepsilon\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}\lesssim X_2(0). \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned} &\|\rho^\varepsilon-\bar\rho\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+2}_{2,1})}+\frac{1}{\varepsilon}\|\rho^\varepsilon-\bar\rho\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})} \\ &\quad=\varepsilon\|\rho-\bar\rho\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+2}_{2,1})}+\|\rho-\bar\rho\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})} \\ &\quad\lesssim\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+2}_{2,1})}+\varepsilon\|H(n)\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+2}_{2,1})}+\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}+\varepsilon\|H(n)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})} \\ &\quad\lesssim\varepsilon\|n\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+2}_{2,1})}+\|n\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot B^{\frac d2+1}_{2,1})}\lesssim X_2(0). \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

从而, $(5.4.11)_1$ 可由 (5.4.12)-(5.4.13) 及插值不等式证明. 又由 (1.3.35)、(1.3.44)、(5.2.16) 及

$(5.4.11)_2$, ω^ε 满足

$$\begin{aligned}\|\omega^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})} &= \varepsilon\|\frac{1}{\varepsilon}u+\nabla n-\chi\nabla\psi\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\\ &\lesssim \varepsilon\|\frac{1}{\varepsilon}u+\nabla n-\chi\nabla\psi\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|(n,u,\nabla\psi)\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim \varepsilon X_2(0).\end{aligned}$$

最后, (1.3.44) 及 $\varepsilon\partial_\tau\phi^\varepsilon(x,\tau)=\psi_t(x,\varepsilon t)$ 给出

$$\|\phi^\varepsilon_t\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}=\|\psi_t\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\|\psi_t\|^{\ell,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\varepsilon\|\psi_t\|^{h,J_\varepsilon}_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1})}\lesssim X_2(0).$$

□

定理 1.3.34 的证明: 设 (ρ,u,ϕ) 为由定理 1.3.27 给出的以 (ρ_0,u_0,ϕ_0) 为初值的柯西问题 (5.1.1) 的整体解. 相应地, 时间尺度变换后的解 $(\rho^\varepsilon,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 满足方程组 (1.3.36). 根据 (1.3.36) 及引理 5.4.1, 我们有如下一致估计

$$\begin{cases}\|\rho^\varepsilon\omega^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\big(\|\rho^\varepsilon-\bar{\rho}\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}+\bar{\rho}\big)\|\omega^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\varepsilon X_2(0),\\ \|a\rho^\varepsilon+\Delta\phi^\varepsilon-b\phi^\varepsilon\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}=\varepsilon\|\phi^\varepsilon_t\|_{L^1_t(\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1})}\lesssim\varepsilon X_2(0).\end{cases}\tag{5.4.14}$$

由上式, (1.3.52) 成立.

进一步, 当 ρ_0 和 ρ_0^* 满足 (1.3.54) 时, 我们利用已有的一致估计证明松弛极限的收敛速率. 由 (1.3.36) 和 (5.4.1), $(\rho^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 满足以下方程:

$$\begin{cases}\rho^\varepsilon_t-\tilde{\Delta}_*\rho^\varepsilon=R^\varepsilon+\Delta(G_1(\rho^\varepsilon)(\rho^\varepsilon-\bar{\rho}))-\chi\mathrm{div}\,((\rho^\varepsilon-\bar{\rho})\nabla\phi^\varepsilon),\\ \phi^\varepsilon=(b-\Delta)^{-1}\big(-\varepsilon\phi^\varepsilon_t+a\rho^\varepsilon\big).\end{cases}\tag{5.4.15}$$

其中

$$R^\varepsilon:=-\mathrm{div}\,(\rho^\varepsilon\omega^\varepsilon)+\varepsilon\chi\bar{\rho}\Delta(b-\Delta)^{-1}\phi^\varepsilon_t.$$

我们引入变量

$$\widetilde{\rho}^\varepsilon:=\rho^\varepsilon-\rho^*,\qquad \widetilde{u}^\varepsilon:=u^\varepsilon-u^*,\qquad \widetilde{\phi}^\varepsilon:=\phi^\varepsilon-\phi^*.$$

从而, 由 (5.4.3)-(5.4.4) 及 (5.4.15), 我们可知 $\widetilde{\rho}^\varepsilon$ 及 $\widetilde{\phi}^\varepsilon$ 满足如下方程:

$$\begin{cases}\widetilde{\rho}^\varepsilon_t-\tilde{\Delta}_*\widetilde{\rho}^\varepsilon=R^\varepsilon+\Delta((G_1(\rho^\varepsilon)-G_1(\rho^*))(\rho^\varepsilon-\bar{\rho}))\\ \qquad\qquad+\Delta(\widetilde{\rho}^\varepsilon G_1(\rho^*))-\chi\mathrm{div}\,(\widetilde{\rho}^\varepsilon\nabla\phi^\varepsilon)-\chi\mathrm{div}\,((\rho^*-\bar{\rho})\nabla\widetilde{\phi}^\varepsilon),\\ \widetilde{\phi}^\varepsilon=(b-\Delta)^{-1}(-\varepsilon\phi^\varepsilon_t+a\widetilde{\rho}^\varepsilon).\end{cases}\tag{5.4.16}$$

我们对 (5.4.16) 应用 (1.3.53) 及 (5.5.3) 可得

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} \\
&\lesssim \varepsilon + \|R^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} + \|(G_1(\rho^\varepsilon)-G_1(\rho^*))(\rho^\varepsilon-\bar{\rho})\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} \\
&\quad + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon G_1(\rho^*)\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon \nabla\phi^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} + \|(\rho^*-\bar{\rho})\nabla\widetilde{\phi}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}.
\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

根据 (5.4.14), R^ε 在 $L_t^1(B_{2,1}^{d/2-1})$ 中为 $O(\varepsilon)$:

$$\|R^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} \lesssim \|\rho^\varepsilon\omega^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} + \varepsilon\|\phi_t^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} \lesssim \varepsilon X_2(0).$$

又由 Morser 型乘积估计 (4.5.4)、仿线性化估计 (4.5.10) 及 (5.4.11), 如下估计成立:

$$\begin{aligned}
&\|(G_1(\rho^\varepsilon)-G_1(\rho^*))(\rho^\varepsilon-\bar{\rho})\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} \\
&\le \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\|\rho^\varepsilon-\bar{\rho}\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\|\rho^\varepsilon-\bar{\rho}\|_{L_t^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} \\
&\lesssim X_2(0)\big(\|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\big).
\end{aligned}$$

类似地, 我们从 (1.3.51)、(4.5.4) 及 (5.4.11) 可得

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\rho}^\varepsilon G_1(\rho^*)\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} &\lesssim \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_T^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} \\
&\lesssim \|\rho_0^*-\bar{\rho}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}(\|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}).
\end{aligned}$$

联立 (5.2.11)、(5.4.11) 及 $(5.4.16)_2$, 我们有

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\phi}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}\cap\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+2})} &\lesssim \varepsilon\|(b-\Delta)^{-1}\phi_t^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}\cap\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+2})} + \|(b-\Delta)^{-1}\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}\cap\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+2})} \\
&\lesssim \varepsilon + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}.
\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

我们将上式与 (1.3.51) 及 (5.4.11) 联立得到

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{\rho}^\varepsilon\nabla\phi^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} + \|(\rho^*-\bar{\rho})\nabla\widetilde{\phi}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})} \\
&\lesssim \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\|\phi^\varepsilon-\bar{\phi}\|_{L_t^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} + \|\rho^*-\bar{\rho}\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\|\widetilde{\phi}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})} \\
&\lesssim X_2(0)\big(\|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})} + \|\widetilde{\rho}^\varepsilon\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\big) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

将上述估计相加, 我们得

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\rho}^{\varepsilon}\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\|(\widetilde{\rho}^{\varepsilon},\widetilde{\phi}^{\varepsilon})\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\\&\lesssim\big(X_2(0)+\|\rho_0^*-\bar{\rho}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}\big)\big(\|\widetilde{\rho}^{\varepsilon}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\|\widetilde{\rho}^{\varepsilon}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\big)+\varepsilon.\end{aligned}$$

因而, 利用 $X_2(0)+\|\rho_0^*-\bar{\rho}\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}$ 的小性, 我们证明

$$\|\widetilde{\rho}^{\varepsilon}\|_{\widetilde{L}_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1})}+\|\widetilde{\rho}^{\varepsilon}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}+\|\widetilde{\phi}^{\varepsilon}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}\cap\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+2})}\lesssim\varepsilon. \tag{5.4.19}$$

进一步, 我们利用 (4.5.10)、(5.4.11)$_3$、(5.4.18)-(5.4.19) 及事实 $\widetilde{u}^{\varepsilon}=\omega^{\varepsilon}-\nabla\int_{\rho_*}^{\rho^{\varepsilon}}\frac{P'(s)}{s}ds+\chi\nabla\widetilde{\phi}^{\varepsilon}$ 可得

$$\|\widetilde{u}^{\varepsilon}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}\lesssim\|\omega^{\varepsilon}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}})}+\|\widetilde{\rho}^{\varepsilon}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}+\|\widetilde{\phi}^{\varepsilon}\|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}\lesssim\varepsilon. \tag{5.4.20}$$

根据 (5.4.19)-(5.4.20), (1.3.54) 成立. 特别地, 当 $\varepsilon\to0$ 时, $(\rho^{\varepsilon},u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})$ 在 (1.3.55) 的意义下强收敛到 (ρ^*,u^*,ϕ^*).

5.5 附录

本附录包含带参数 ε 的高低频分解, 两个线性方程的最优正则性估计, 以及一个关于二次非线性函数的估计.

首先, 我们在节 4.5 基础上介绍额外的符号和定义. 为了得到与松弛参数 ε 一致的先验估计, 我们需要对高低频的分界点 J_{ε} 选取为一个依赖于 ε 的值.

定义 5.5.1. *对 $p\in[1,\infty]$ 及 $s\in\mathbb{R}$, 对 $u\in S_h'$, 定义 u 以 J_{ε} 为分界点的低频部分 $u^{\ell,J_{\varepsilon}}$ 以及高频部分 $u^{h,J_{\varepsilon}}$ 如下:*

$$u^{\ell,J_{\varepsilon}}:=\sum_{j\le J_{\varepsilon}-1}\dot{\Delta}_ju,\qquad u^{h,J_{\varepsilon}}:=u-u^{\ell,J_{\varepsilon}}=\sum_{j\ge J_{\varepsilon}}\dot{\Delta}_ju.$$

相应地, 以 J_{ε} 为分界点的低频和高频半范数定义为:

$$\begin{cases}\|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s}^{\ell,J_{\varepsilon}}:=\|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_ju\|_{L^p}\}_{j\le J_{\varepsilon}}\|_{\ell^r}, & \|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s}^{h,J_{\varepsilon}}:=\|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_ju\|_{L^p}\}_{j\ge J_{\varepsilon}-1}\|_{\ell^r},\\ \|u\|_{\widetilde{L}_T^{\rho}(\dot{B}_{p,r}^s)}^{\ell,J_{\varepsilon}}:=\|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_ju\|_{L_T^{\rho}(L^p)}\}_{j\le J_{\varepsilon}}\|_{\ell^r}, & \|u\|_{\widetilde{L}_T^{\rho}(\dot{B}_{p,r}^s)}^{h,J_{\varepsilon}}:=\|\{2^{js}\|\dot{\Delta}_ju\|_{L_T^{\rho}(L^p)}\}_{j\ge J_{\varepsilon}-1}\|_{\ell^r}.\end{cases}$$

注记 5.5.2. 对任意 $s'>0$, 我们易知

$$\|u^{\ell,J_{\varepsilon}}\|_{\dot{B}_{p,r}^s}\le\|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s}^{\ell,J_{\varepsilon}}\le2^{J_{\varepsilon}s'}\|u\|_{\dot{B}_{p,r}^{s-s'}}^{\ell,J_{\varepsilon}},\qquad\|u^{h,J_{\varepsilon}}\|_{\dot{B}_{p,r}^s}\le\|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s}^{h,J_{\varepsilon}}\le2^{-(J_{\varepsilon}-1)s'}\|u\|_{\dot{B}_{p,r}^{s+s'}}^{h,J_{\varepsilon}}. \tag{5.5.1}$$

其次, 为了估计方程 $(5.2.5)_1$ 和 $(5.4.3)_1$, 我们考虑一个线性扩散方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_t - \nu_1\big(P'(\bar\rho) - \chi a\bar\rho(b-\Delta)^{-1}\Delta\big)\Delta u = g, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t>0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{5.5.2}$$

引理 5.5.3. 设 $\bar\rho, \chi, a, b$ 和 ν_1 为严格正的常数, $P'(\bar\rho) > \frac{\chi a}{b}\bar\rho$ 成立. 对 $1\le p,r\le\infty$、$s\in\mathbb{R}$ 及给定的时间 $T>0$, 假设 $u_0\in\dot B^s_{p,r}$ 及 $g\in\widetilde L^1(0,T;\dot B^s_{p,r})$. 如果 u 为当 $t\in(0,T)$ 时柯西问题 (5.5.2) 的解, 则存在一个常数 $C>0$ 使得如下估计成立:

$$\|u\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^s_{p,r})} + \nu_1\|u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{s+2}_{p,r})} \le C(\|u_0\|_{\dot B^s_{p,r}} + \|g\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^s_{p,r})}), \quad 0<t<T, \tag{5.5.3}$$

其中 $C>0$ 为与 ν_1 和时间无关的常数.

证明. 我们定义半群 $S_1(t)$ 如下:

$$S_1(t)f = \mathscr{F}^{-1}\Big(e^{-\nu_1(P'(\bar\rho)-\frac{\chi a}{b}\bar\rho)|\xi|^2 t - \frac{\chi a\bar\rho|\xi|^4}{b+|\xi|^2}t}\mathscr{F}(f)(\xi)\Big).$$

从而 (5.5.2) 的解 u 可改写为

$$u = S_1(t)u_0 + \int_0^t S_1(t-\tau)g\,d\tau. \tag{5.5.4}$$

借鉴热半群的证明方法, 我们可证对环 $\mathbf{C}$ 及 $j\in\mathbb{Z}$, $S_1(t)$ 满足如下特性:

$$\operatorname{Supp}\mathscr{F}(f)\subset 2^j\mathbf{C} \Rightarrow \|S_1(t)f\|_{L^p} \le Ce^{-C\nu_1(P'(\bar\rho)-\frac{\chi a}{b}\bar\rho)2^{2j}t}\|f\|_{L^p}. \tag{5.5.5}$$

(5.5.5) 的证明在此省略. 关于相应的计算细节, 可以参见文献 [8, 45]. 对 (5.5.4) 利用特性 (5.5.5), 我们得到

$$\|\dot\Delta_j u\|_{L^p} \lesssim e^{-\nu_1(P'(\bar\rho)-\frac{\chi a}{b}\bar\rho)2^{2j}t}\|\dot\Delta_j u_0\|_{L^p} + \int_0^t e^{-\nu_1(P'(\bar\rho)-\frac{\chi a}{b}\bar\rho)2^{2j}(t-\tau)}\|\dot\Delta_j g\|_{L^p}d\tau. \tag{5.5.6}$$

上式 (5.5.6) 给出

$$\|u\|_{\widetilde L^\infty_t(\dot B^s_{p,r})} \lesssim \|u_0\|_{\dot B^s_{p,r}} + \|g\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^s_{p,r})}.$$

此外, 对 (5.5.6) 关于时间取 L^1 范数并利用卷积型 Young 不等式, 我们有

$$\|\dot\Delta_j u\|_{L^1_t(L^p)} \lesssim \frac{1}{\nu_1 2^{2j}}\|\dot\Delta_j u_0\|_{L^p} + \frac{1}{\nu_1 2^{2j}}\int_0^t \|\dot\Delta_j g\|_{L^p}d\tau.$$

因而, 如下估计成立:

$$\nu_1\|u\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^{s+2}_{p,r})} \lesssim \|u_0\|_{\dot B^s_{p,r}} + \|g\|_{\widetilde L^1_t(\dot B^s_{p,r})}.$$

引理 5.5.3 证毕. □

为了估计方程 $(5.2.5)_3$, 我们考虑一个线性扩散阻尼方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_t + bu - (1+\nu_2 a\bar{\rho}(b-\Delta)^{-1})\Delta u = g, \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{5.5.7}$$

引理 5.5.4. 设 $\bar{\rho}$、a、b 和 ν_2 为严格正的常数. 对 $1\le p,r\le\infty$, $s\in\mathbb{R}$ 及给定的时间 $T>0$, 假设 $u_0\in\dot{B}^s_{p,r}$ 及 $g\in\widetilde{L}^1(0,T;\dot{B}^s_{p,r})$, 若 u 为当 $t\in(0,T)$ 时柯西问题 (5.5.7) 的解, 则 u 满足

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^s_{p,r})} + \|u\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^s_{p,r}\cap\dot{B}^{s+2}_{p,r})} \le C(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}} + \|g\|_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^s_{p,r})}), \quad 0<t<T, \tag{5.5.8}$$

其中 $C>0$ 为与 ν_2 和时间无关的常数.

证明. 我们定义半群 $S_2(t)$ 如下:

$$S_2(t)f = \mathscr{F}^{-1}\Big(e^{-|\xi|^2 t - \frac{\nu_2 a\bar{\rho}|\xi|^2}{b+|\xi|^2}t}\mathscr{F}(f)(\xi)\Big).$$

从而 (5.5.7) 的解 u 可改写为

$$u = e^{-bt}S_2(t)u_0 + \int_0^t e^{-b(t-\tau)}S_2(t-\tau)g\,d\tau. \tag{5.5.9}$$

对环 $\mathbf{C}$ 及 $j\in\mathbb{Z}$, 我们易证

$$\mathrm{Supp}\,\mathscr{F}(f)\subset 2^j\mathbf{C} \Rightarrow \|S_2(t)f\|_{L^p} \le Ce^{-2^{2j}t}\|f\|_{L^p}. \tag{5.5.10}$$

类似于引理 (5.5.3) 的证明, 基于 (5.5.9)-(5.5.10), 我们可以得到 (5.5.8). □

注记 5.5.5. 定理 5.5.3 和定理 5.5.4 中的估计限制在高频或低频半范数下仍然成立. 例如, 在定理 5.5.4 的假设下, 我们有

$$\|u\|^{\ell,J}_{\widetilde{L}^\infty_t(\dot{B}^s_{p,r})} + \|u\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^s_{p,r}\cap\dot{B}^{s+2}_{p,r})} \le C(\|u_0\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{p,r}} + \|g\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\widetilde{L}^1_t(\dot{B}^s_{p,r})}), \quad 0<t<T,$$

其中常数 $C>0$ 和 ν_2、J_ε 及时间无关.

最后, 为了控制二次非线性形式 $H(n)$, 我们证明一个新的二次非线性函数估计.

引理 5.5.6. 令 J_ε 由 (1.3.41) 给出. 则对任意 $s>0$ 及光滑函数 $F(f)$, 以下估计成立:

$$\|F(f)-F(0)-F'(0)f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{2,1}} \le C_f\|f\|_{L^\infty}\big(\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{2,1}} + \varepsilon^{\sigma-s}\|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^\sigma_{2,1}}\big), \quad \sigma\ge 0, \tag{5.5.11}$$

$$\|F(f)-F(0)-F'(0)f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{2,1}} \le C_f\|f\|_{L^\infty}\big(\varepsilon^{\sigma-s}\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^\sigma_{2,1}} + \|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{2,1}}\big), \quad \sigma\in\mathbb{R}, \tag{5.5.12}$$

其中 $C_f>0$ 为一个依赖于 $\|f\|_{L^\infty}$, F'', s, σ 及 d 的常数.

进一步, $F(f)$ 满足

$$\|F(f)-F(0)-F'(0)f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot B^s_{2,\infty}}\le C_f\|f\|_{\dot B^{\frac d2}_{2,1}}\big(\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot B^s_{2,\infty}}+\varepsilon^{\frac d2-1-s}\|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot B^{\frac d2+1}_{2,1}}\big),\quad s\ge-\frac d2. \tag{5.5.13}$$

证明. 首先, 我们证明 (5.5.11). 使用二阶泰勒展开, 我们有

$$\begin{aligned}F(f)-F(0)-F'(0)f&=\sum_{k'\in\mathbb Z}(F(\dot S_{k'+1}f)-F(\dot S_{k'}f))-F'(0)f\\&=\sum_{k'\in\mathbb Z}\big(m_{1,k'}\dot S_{k'}f\dot\Delta_{k'}f+m_{2,k'}(\dot\Delta_{k'}f)^2\big),\end{aligned} \tag{5.5.14}$$

其中

$$m_{1,k'}:=\int_0^1\int_0^1F''(\theta(\dot S_{k'}f+\tau\dot\Delta_{k'}f))d\tau d\theta,\quad m_{2,k'}:=\int_0^1\int_0^1F''(\theta(\dot S_{k'}f+\tau\dot\Delta_{k'}f))\tau d\tau d\theta.$$

由 Bernstein 不等式, 易证对 $q\ge0$, 以下估计成立:

$$\|\dot\Delta_k(m_{1,k'}\dot S_{k'}f\dot\Delta_{k'}f)\|_{L^2}\le C(1+\|f\|_{L^\infty})^q\|f\|_{L^\infty}2^{(k'-k)q}\|\dot\Delta_{k'}f\|_{L^2}. \tag{5.5.15}$$

受到文献 [47] 的启发, 根据 (5.5.15), 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k\le J_\varepsilon,k'\in\mathbb Z}2^{ks}\|\dot\Delta_k(m_{1,k'}\dot S_{k'}f\dot\Delta_{k'}f)\|_{L^2}\\&\le\Big(\sum_{k'\le k\le J_\varepsilon}+\sum_{k\le k'\le J_\varepsilon}+\sum_{k\le J_\varepsilon\le k'}\Big)2^{ks}\|\dot\Delta_k(m_{1,k'}\dot S_{k'}f\dot\Delta_{k'}f)\|_{L^2}\\&\le C_f\|f\|_{L^\infty}\Big(\sum_{k'\le J_\varepsilon}2^{k's}\|\dot\Delta_{k'}f\|_{L^2}\sum_{k'\ge k}2^{(k-k')s}+\sum_{k'\le J_\varepsilon}2^{k's}\|\dot\Delta_{k'}f\|_{L^2}\sum_{k'\le k}2^{(k-k')(s-[s]-1)}\\&\qquad+\sum_{k\le J_\varepsilon}2^{ks}\sum_{k'\ge J_\varepsilon}2^{-k'\sigma}2^{k'\sigma}\|\dot\Delta_{k'}f\|_{L^2}\Big)\\&\le C_f\|f\|_{L^\infty}(\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot B^s_{2,1}}+\varepsilon^{\sigma-s}\|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot B^\sigma_{2,1}}).\end{aligned}$$

$m_{2,k'}$ 的部分可类似估计. 因而 (5.5.11) 成立.

下面, 我们证明 (5.5.12). 由 (5.5.15), 我们得到

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{J_\varepsilon-1\le k\le k'}+\sum_{J_\varepsilon-1\le k'\le k}\Big)2^{ks}\|\dot{\Delta}_k(m_{1,k'}\dot{S}_{k'}f\dot{\Delta}_{k'}f)\|_{L^2}\\&\quad\le C_f\|f\|_{L^\infty}\Big(\sum_{k'\ge J_\varepsilon-1}2^{k's}\|\dot{\Delta}_{k'}f\|_{L^2}\sum_{k'\ge k}2^{(k-k')s}\\&\qquad+\sum_{k'\ge J_\varepsilon-1}2^{k's}\|\dot{\Delta}_{k'}f\|_{L^2}\sum_{k'\le k}2^{(k-k')(s-[s]-1)}\Big)\le C_f\|f\|_{L^\infty}\|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{2,1}}.\end{aligned}\tag{5.5.16}$$

对在 $\{(k,k')\mid k'\le J_\varepsilon-1\le k\}$ 上的序列和, 对 $s\ge\sigma$, 我们证得

$$\begin{aligned}&\sum_{k'\le J_\varepsilon-1\le k}2^{ks}\|\dot{\Delta}_k(m_{1,k'}\dot{S}_{k'}f\dot{\Delta}_{k'}f)\|_{L^2}\\&\le C_f\|f\|_{L^\infty}\sum_{k'\le J_\varepsilon-1}2^{k'(s-\sigma)}2^{k'\sigma}\|\dot{\Delta}_{k'}f\|_{L^2}\sum_{k'\le k}2^{(k-k')(s-[s]-1)}\le C_f\varepsilon^{\sigma-s}\|f\|_{L^\infty}\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^\sigma_{2,1}},\end{aligned}\tag{5.5.17}$$

同时, 若 $0<s<\sigma$, 则我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k'\le J_\varepsilon-1\le k}2^{ks}\|\dot{\Delta}_k(m_{1,k'}\dot{S}_{k'}f\dot{\Delta}_{k'}f)\|_{L^2}\\&\le 2^{(J_\varepsilon-1)(s-\sigma)}\sum_{k'\le J_\varepsilon-1\le k}2^{k\sigma}\|\dot{\Delta}_k(m_{1,k'}\dot{S}_{k'}f\dot{\Delta}_{k'}f)\|_{L^2}\le C_f\varepsilon^{\sigma-s}\|f\|_{L^\infty}\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^\sigma_{2,1}}.\end{aligned}\tag{5.5.18}$$

结合 (5.5.16)-(5.5.18), 我们得到

$$\sum_{k\ge J_\varepsilon-1,k'\in\mathbb{Z}}2^{ks}\|\dot{\Delta}_k(m_{1,k'}\dot{S}_{k'}f\dot{\Delta}_{k'}f)\|_{L^2}\le C_f\|f\|_{L^\infty}(\varepsilon^{\sigma-s}\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{2,1}}+\|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^\sigma_{2,1}}).$$

(5.5.14) 的第二项可类似估计. 因而, (5.5.12) 成立.

最后, 我们证明 (5.5.13). 对于情形 $s>0$ 可以通过类似于 (5.5.11) 的计算过程以及嵌入 $\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}\hookrightarrow L^\infty$ 证得. 对于情形 $-\frac{d}{2}\le s\le 0$, 由于存在一个满足 $\tilde{F}(0)=0$ 的光滑函数 $\tilde{F}(f)$ 使得 $F(f)-F(0)-F'(0)f=\tilde{F}(f)f$ 成立, 我们根据 (4.5.6)、(4.5.9)、(5.2.16) 以及 Bernstein 不等式得到

$$\|F(f)-F(0)-F'(0)f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{2,\infty}}\le\|\tilde{F}(f)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}\le C_f\|f\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}\big(\|f\|^{\ell,J_\varepsilon}_{\dot{B}^s_{2,\infty}}+\varepsilon^{\frac{d}{2}+1-s}\|f\|^{h,J_\varepsilon}_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+1}_{2,1}}\big).$$

引理 5.5.6 证毕. □

参考文献

[1] H. Amann, Compact embeddings of vector valued Sobolev and Besov spaces, *Glas. Mat. Ser. III* **35** (2000) 161-177.

[2] D. Ambrosi, F. Bussolino, L. Preziosi, A review of vasculogenesis models, *J. Theor. Med.* **6** (2005) 1-19.

[3] D. Ambrosi, A. Gamba, G. Serini, Cell directional and chemotaxis in vascular morphogenesis, *Bull. Math. Biol.* **66** (2004) 1851-1873.

[4] A. A. Amsden, P. J. O'Rourke, T. D. Butler, Kiva-II: a computer program for chemical reactive flows with sprays, *Technical Report, Los Alamos National Laboratory*, 1989.

[5] G. Arumugam, J. Tyagi, Keller-Segel chemotaxis models: a review, *Acta Appl. Math.* **171** (2021), 1-82.

[6] H.-O. Bae, Y.-P. Choi, S.-Y. Ha, M.-J. Kang, Time-asymptotic interaction of flocking particles and an incompressible viscous fluid, *Nonlinearity* **25** (2012) 1155-1177.

[7] H.-O. Bae, Y.-P. Choi, S.-Y. Ha, M.-J. Kang, Asymptotic flocking dynamics of Cucker-Smale particles immersed in compressible fluids, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **34** (11) (2014) 4419-4458.

[8] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 343. Springer, New York, 2011.

[9] C. Baranger, L. Boudin, P.-E. Jabin, S. Mancini, A modeling of biospray for the upper airways. CEMRACS 2004-mathematics and applications to biology and medicine, *ESAIM Proc.* 41-47.

[10] C. Baranger, L. Desvillettes, Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays: the local-in-time, classical solutions, *J. Hyperbolic Differ. Equ.* **3** (2009) 1-26.

[11] J.-W. Barrett, Y. Lu, E. Süli, Existence of large-data finite-energy global weak solutions to a compressible Oldroyd-B model, *Commun. Math. Sci.* **15** (2017) 1265-1323.

[12] K. Beauchard, E. Zuazua, Large time asymptotics for partially dissipative hyperbolic systems, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **199** (2011) 177-227.

[13] F. B. Belgacem, P.-E. Jabin, Compactness for nonlinear continuity equations, *J. Funct. Anal.* **264** (2013) 139-168.

[14] H. C. Berg, A Physicist Looks at Bacterial Chemotaxis, *Cold Spring Harb. Symp. Quant. Biol.* **53** (1988) 1-9.

[15] S. Berres, R. Bürger, K. H. Karlsen, E. M. Tory, Strongly degenerate parabolic-hyperbolic systems modeling polydisperse sedimentation with compression, *SIAM J. Appl. Math*. **64** (2003) 41-80.

[16] S. Berres, R. Bürger, E. M. Tory, Mathematical model and numerical simulation of the liquid fluidization of polydisperse solid particle mixtures, *Comput. Vis. Sci.* **6** (2004) 67-74.

[17] F. Berthelin, D. Chiron, M. Ribot, Stationary solutions with vacuum for a one-dimensional chemotaxis model with nonlinear pressure, *Commun. Math. Sci.* **14** (2016) 147-186.

[18] L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont, A. Moussa, Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations, *Differential Integral Equations* **22** (2009) 1247-1271.

[19] L. Boudin, L. Desvillettes, R. Motte, A modeling of compressible droplets in a fluid, *Commun. Math. Sci.* **1** (2003) 657-669.

[20] L. Boudin, C. Grandmont, A. Lorz, A. Moussa, Modelling and numerics for respiratory aerosols, *Commun. Comput. Phys.* **18** (2015) 723-756.

[21] C. E. Brennen, *Fundamentals of Multiphase Flow*, Cambridge Univ. Press, 2005.

[22] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext. Springer, New York, 2011.

[23] D. Bresch, B. Desjardins, Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model, *Comm. Math. Phys.* **238** (2003) 211-223.

[24] D. Bresch, B. Desjardins, On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier-Stokes models, *J. Math. Pures Appl. (9)* **86** (2006) 362-368.

[25] D. Bresch, B. Desjardins, C.-K. Lin, On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication, and shallow water systems, *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003) 843-868.

[26] D. Bresch, B. Desjardins, D. Gérard-Varet, On compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities in bounded domains, *J. Math. Pures Appl. (9)* **87** (2007) 227-235.

[27] D. Bresch, B. Desjardins, E. Zatorska, Two-velocity hydrodynamics in fluid mechanics: Part II existence of global κ-entropy solutions to compressible Navier−Stokes systems with degenerate viscosities, *J. Math. Pures Appl. (9)* **104** (2015) 801-836.

[28] D. Bresch, B. Desjardins, J. M. Ghidaglia, E. Grenier, M. Hilliairet, Multifluid models including compressible fluids, , *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids, Y. Giga and A. Novotny editors*, Springer International Publishing Switzerland, 2018.

[29] D. Bresch, P.-E. Jabin, Global existence of weak solutions for compressible Navier-Stokes equations: thermodynamically unstable pressure and anisotropic viscous stress tensor, *Ann. of Math. (2)* **188** (2018) 577-684.

[30] D. Bresch, P.-B. Mucha, E. Zatorska, Finite-energy solutions for compressible two-fluid Stokes system, *Arch. Ration. Mech. Anal*. **232** (2019) 987-1029.

[31] D. Bresch, A. Vasseur, C. Yu. Global existence of entropy-weak solutions to the compressible Navier-Stokes equations with non-linear density dependent viscosities, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **24** (2022) 1791-1837.

[32] R. Caflisch, G. C. Papanicoaou, Dynamic theory of suspensions with Brownian effects, *SIAM J. Appl. Math.* **43** (1983) 885-906.

[33] J. Carrillo, T. Goudon, Stability and asymptotic analysis of a fluid-particle interaction model, *Comm. Partial Differential Equations* **31** (2006) 1349-1379.

[34] J. Carrillo, Y.-P. Choi, T. Karper, On the analysis of a coupled kinetic-fluid model with local alignment forces, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **33** (2016) 273-307.

[35] J. Carrillo, R. Duan, A. Moussa, Global classical solution close to equilibrium to the Vlasov-Euler-Fokker-Planck system, *Kinet. Relat. Models* **4** (2011) 227-258.

[36] J. Carrillo, M. Fornasier, G. Toscani, F. Vecil, Particle, kinetic, and hydrodynamic models of swarming, in: G. Naldi, L. Pareschi, G. Toscani (Eds.), *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences, in: Modelling and Simulation in Science and Technology,* Birkhäuser, 2010, 297-336.

[37] W. Cao, P. Jiang, Global bounded weak entropy solutions to the Euler-Vlasov equations in fluid-particle system, *SIAM J. Math. Anal.* **53** (2021) 3958-3984.

[38] M. Chae, K. Kang, J. Lee, Global existence of weak and classical solutions for the Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations, *J. Differential Equations* **251** (2011) 2431-2465.

[39] M. Chae, M., Kang, Lee, J, Global classical solutions for a compressible fluid-particle interaction model, *J. Hyperbolic Differ. Equ.* **10** (2013) 537-562.

[40] P.-H. Chavanis, Jeans type instability for a chemotactic model of cellular aggregation, *Eur. Phys. J. B*, **52** (2006) 433-443.

[41] P.-H. Chavanis, C. Sire, Kinetic and hydrodynamic models of chemotactic aggregation, *Phys. A* **384** (2007) 199-222.

[42] P. Carmeliet, Mechanisms of angiogenesis and arteriogenesis, *Nature Medicine* **6** (2000) 389-395.

[43] F. Charve, R. Danchin, A global existence result for the compressible Navier-Stokes equations in the critical L_p framework, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **198** (2010) 233-271.

[44] J.-Y. Chemin, N. Lerner, Flot de champs de vecteurs non lipschitziens etëquations de Navier-Stokes, *J. Differential Equations* **121** (1995) 314-328.

[45] J.-Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le systé me de Navier-Stokes tridimensionnel, *J. Anal. Math.* **77** (1999) 27-50.

[46] S. Chen, C. Zhu, The global classical solution to a 1D two-fluid model with density-dependent viscosity and vacuum, *Sci. China Math.* Accepted.

[47] Q. Chen, C. Miao, Z. Zhang, Global well-posedness for the compressible Navier-Stokes equations with the highly oscillating initial velocity, *Comm. Pure Appl. Math.* **63** (2010) 1173-1224.

[48] Q. Chen, C. Miao, Z. Zhang, On the ill-posedness of the compressible Navier-Stokes equation in the critical Besov spaces, *Rev. Mat. Iberoam.* **31** (2015) 1375-1402.

[49] Y. Cho, B. Jin, Blow-up of viscous heat-conducting compressible flows, *J. Math. Anal. Appl.* **320** (2006) 819-826.

[50] Y. Cho, H. Kim, On classical solutions of the compressible Navier-Stokes equations with nonnegative initial densities, *Manuscripta Math.* **120** (2006) 91-129.

[51] Y.-P. Choi, Large-time behavior for the Vlasov/compressible Navier-Stokes equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016) 071501.

[52] Y.-P. Choi, Global classical solutions and large-time behavior of the two-phase fluid model, *SIAM J. Math. Anal.* **48** (2016) 3090-3122.

[53] Y.-P. Choi, Finite-time blow-up phenomena of Vlasov/Navier-Stokes equations and related systems, *J. Math. Pures Appl. (9)* **108** (2017) 991-1021.

[54] Y.-P. Choi, B. Kwon, The Cauchy problem for the pressureless Euler/isentropic Navier-Stokes equations, *J. Differential Equations* **261** (2016) 654-711.

[55] Y.-P. Choi, J. Jung, Asymptotic analysis for a Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes system in a bounded domain, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **31** (2021) 2213-2295.

[56] R. R. Coifman, Y. Meyer, On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **212** (1975) 315-331.

[57] R. R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math. (2)* **103** (1976) 611-635.

[58] J. Condeelis, R. H. Singer, J. E. Segall, The great escape: When cancer cells hijack the genes for chemotaxis and motility, *Ann. Rev. Cell Dev. Biol.* **21** (2005) 695-718.

[59] J.-F. Coulombel, T. Goudon, The strong relaxation limit of the multidimensional isothermal Euler equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007) 637-648.

[60] T. Crin-Barat, R. Danchin, Partially dissipative one-dimensional hyperbolic systems in the critical regularity setting, and applications, *Pure Appl. Anal.* **4** (2022) 85-125.

[61] T. Crin-Barat, R. Danchin, Partially dissipative hyperbolic systems in the critical regularity setting: The multi-dimensional case, arXiv: 2105.08333.

[62] T. Crin-Barat, R. Danchin, Global existence for partially dissipative hyperbolic systems in the L^p framework, and relaxation limit, arXiv: 2201.06822.

[63] T. Crin-Barat, Q. He, L.-Y. Shou, The hyperbolic-parabolic chemotaxis system modelling vasculogenesis: global dynamics and relaxation limit, arXiv: 2201.06512.

[64] R. Danchin, Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *Invent. Math.* **141** (2000) 579-614.

[65] R. Danchin, On the uniqueness in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* **12** (2005) 111-128.

[66] R. Danchin, Well-posedness in critical spaces for barotropic viscous fluids with truly not constant density, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2007) 1183-1233.

[67] R. Danchin, A Lagrangian approach for the compressible Navier-Stokes equations, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **64** (2014) 753-791.

[68] R. Danchin, Fourier Analysis Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations, *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids, Y. Giga and A. Novotny editors*, Springer International Publishing Switzerland, 2016.

[69] R. Danchin, P.-B. Mucha, Compressible Navier-Stokes system: Large solutions and incompressible limit, *Adv. Math.* **320** (2017) 904-925.

[70] R. Danchin, J. Xu, Optimal time-decay estimates for the compressible Navier-Stokes equations in the critical L_p framework, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **224** (2017) 53-90.

[71] L. Desvillettes, Some aspects of the modeling at different scales of multiphase flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **199** (2010) 1265-1267.

[72] M. Di Francesco, D. Donatelli, Singular convergence of nonlinear hyperbolic chemotaxis systems to Keller-Segel type models, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **13** (2010) 79-100.

[73] C. Di Russo, Analysis and numerical approximations of hydrodynamical models of biological movements, *Rend. Mat. Appl.* **32** (2012) 117-367.

[74] C. Di Russo, Sepe A, Existence and asymptotic behavior of solutions to a quasi-linear hyperbolic-parabolic model of vasculogenesis, *SIAM J. Math. Anal.* **45** (2013) 748-776.

[75] R. J. DiPerna, P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* **98** (1989) 511-547.

[76] S. Ding, H. Wen, C. Zhu, Global classical large solutions to 1D compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity and vacuum, *J. Differential Equations* **251** (2011) 1696-1725.

[77] R. Duan, H. Liu, S. Ukai, T. Yang, Optimal L^p-L^q convergence rates for the compressible Navier-Stokes equations with potential force, *J. Differential Equations* **238** (2007) 220-233.

[78] R. Duan, S. Liu, Cauchy problem on the Vlasov-Fokker-Planck equation coupled with the compressible Euler equations through the friction force, *Kinet. Relat. Models* **6** (2013) 687-700.

[79] S. Evje, K. H. Karlsen, Global existence of weak solutions for a viscous two-phase model, *J. Differential Equations* **245** (2008) 2660-2703.

[80] S. Evje, Weak solutions for a gas-liquid model relevant for describing gas-kick in oil wells, *SIAM J. Math. Anal*. **43** (2011) 1887-1922.

[81] S. Evje, An integrative multiphase model for cancer cell migration under influence of physical cues from the microenvironment, *Chem Engineering Science* **165** (2017) 204-259.

[82] S. Evje, H. Wen, C. Zhu, On global solutions to the viscous liquid-gas model with unconstrained transition to single-phase flow, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **27** (2017) 323-346.

[83] D. Fang, T. Zhang, Compressible Navier-Stokes equations with vacuum state in one dimension, *Comm. Pure Appl. Anal.* **3** (2004) 675-694.

[84] D. Fang, J. Xu, Existence and asymptotic behavior of C^1 solutions to the multidimensional compressible Euler equations with damping, *Nonlinear Anal.* **70** (2009) 244-261.

[85] D. Fang, T. Zhang, R. Zi, Global solutions to the isentropic compressible Navier-Stokes equations with a class of large initial data, *SIAM J. Math. Anal.* **50** (2018) 4983-5026.

[86] E. Feireisl, Petzeltová, Large-time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations of compressible flow, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **150** (1999) 77-96.

[87] E. Feireisl, A. Novotný, H. Petzeltová, On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations, *J. Math. Fluid Mech.* **3** (2001) 358-392.

[88] E. Feireisl, Compressible Navier-Stokes equations with a non-monotone pressure law, *J. Differential Equations* **184** (2002) 97-108.

[89] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 26, Oxford University Press, Oxford, 2004.

[90] E. Feireisl, A. Novotný, *Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2009.

[91] F. Filbet, C.-W. Shu, Approximation of hyperbolic models for chemosensitive movement, *SIAM J. Sci. Comput.* **27** (2005) 850-872.

[92] A. Gamba, D. Ambrosi, A. Coniglio, et. al., Percolation, morphogenesis, and Burgers dynamics in blood vessels formation, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 118101.

[93] I. M. Gamba, C. Yu, Global weak solutions to compressible Navier-Stokes-Vlasov-Boltzmann systems for spray dynamics, *J. Math. Fluid Mech.* **22** (2020) 45.

[94] D. Gidaspow, *Multiphase flow and fluidization*, Boston, MA: Academic Press Inc, 1994.

[95] O. Glass, D. Han-Kwan, A. Moussa, The Vlasov-Navier-Stokes system in a 2D pipe: existence and stability of regular equilibria, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **230** (2018) 593-639.

[96] Y. Guo, Y. Wang, Decay of dissipative equations and negative Sobolev spaces, *Comm. Partial Differential Equations* **37** (2012) 2165-2208.

[97] Z Guo, Q. Jiu, Z. Xin, Spherically symmetric isentropic compressible flows with density-dependent viscosity coefficients, *SIAM J. Math. Anal.* **39** (2008) 1402-1427.

[98] Z. Guo, H.-L. Li, P. Xin, Lagrange structure and dynamics for solutions to the spherically symmetric compressible Navier-Stokes equations, *Comm. Math. Phys.* **309** (2012) 371-412.

[99] Z. Guo, J. Yang, L. Yao, Global strong solution for a three-dimensional viscous liquid-gas two-phase flow model with vacuum, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 093102.

[100] T. Goudon, L. He, A. Moussa, P. Zhang, The Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium, *SIAM J. Math. Anal.* **42** (2010) 2177-2202.

[101] S.-Y. Ha, B. Huang, Q. Xiao, X. Zhang, A global existence of classical solutions to the two-dimensional kinetic-fluid model for flocking with large initial data, *Commun. Pure Appl. Anal.* **19** (2020) 835-882.

[102] K. Hamdache, Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **15** (1998) 51-74.

[103] D. Han-Kwan, I. É. Miot É, A. Moussa, I. Moyano, Uniqueness of the solution to the 2D Vlasov-Navier-Stokes system, *Rev. Mat. Iberoam.* **36** (2019) 37-60.

[104] D. Han-Kwan, A. Moussa, I. Moyano, Large time behavior of the Vlasov-Navier-Stokes system on the torus, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **236** (2020) 1273-1323.

[105] D. Han-Kwan, Large time behavior of small data solutions to the Vlasov-Navier-Stokes system on the whole space, arXiv: 2006.09848.

[106] C. Hao, H.-L. Li, Well-posedness for a multidimensional viscous liquid-gas two-phase flow model, *SIAM J. Math. Anal.* **44** (2012) 1304-1332.

[107] B. Haspot, Existence of global strong solutions in critical spaces for barotropic viscous fluids, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **202** (2011) 427-460.

[108] B. Haspot, Existence of global strong solution for the compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosity coefficients in 1D, *Math. Nachr.* **291** (2018) 2188-2203.

[109] L. He, On the global smooth solution to 2-d fluid-particle system, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **27** (2010) 237-263.

[110] L. He, J. Huang, C. Wang, Global stability of large solutions to the 3D compressible Navier-Stokes Equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **234** (2019) 1167-1222.

[111] G. Helmlinger, M. Endo, N. Ferrara, L. Hlatky, R. Jain, Formation of endothelial cell networks, *Nature* **405** (2000) 139-141.

[112] G. Hong, H. Peng, Z.-A. Wang, C. Zhu, Nonlinear stability of phase transition steady states to a hyperbolic-parabolic system modelling vascular networks, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **103** (2020) 1480-1514.

[113] D. Hoff, D, Global existence for 1D, compressible, isentropic Navier-Stokes equations with large initial data, *Trans. Amer. Math. Soc.* **303** (1987) 169-181.

[114] D. Hoff, D. Serre, The failure of continuous dependence on initial data for the Navier-Stokes equations of compressible flow, *SIAM J. Appl. Math.* **51** (1991) 887-898.

[115] D. Hoff, Global existence of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data, *J. Differential Equations* **120** (1995) 215-254.

[116] D. Hoff, Uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes equations of multidimensional, compressible flow, *SIAM J. Math. Anal.* **37** (2006) 1742-1760.

[117] D. Hoff, K. Zumbrun, Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow, *Indiana Univ. Math. J.* **44** (1995) 603-676.

[118] D. Hoff, K. Zumbrun, Pointwise decay estimates for multidimensional Navier-Stokes diffusion waves, *Z. Angew. Math. Phys.* **48** (1997) 597-614.

[119] L. Hsiao, T.-P. Liu, Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping, *Comm. Math. Phys.* **143** (1992) 599-605.

[120] X. Hu, Hausdorff dimension of concentration for isentropic compressible Navier-Stokes equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **234** (2019) 375-416.

[121] B. Huang, L. Zhang, A global existence of classical solutions to the two-dimensional Vlasov-Fokker-Planck and magnetohydrodynamics equations with large initial data, *Kinet. Relat. Models* **12** (2019) 357-396.

[122] F. Huang, J. Li, A. Matsumura, Asymptotic stability of combination of viscous contact wave with rarefaction waves for one-dimensional compressible Navier-Stokes system, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **197** (2010) 89-116.

[123] F. Huang, A. Matsumura, Stability of a composite wave of two viscous shock waves for the full compressible Navier-Stokes equation, *Comm. Math. Phys.* **289** (2009) 841-861.

[124] F. Huang, A. Matsumura, X. Shi, On the stability of contact discontinuity for compressible Navier-Stokes equations with free boundary, *Osaka J. Math.* **41** (2004) 193-210.

[125] F. Huang, A. Matsumura, Z. Xin, Stability of contact discontinuities for the 1-D compressible Navier-Stokes equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **179** (2006) 55-77.

[126] F. Huang, H. Zhao, On the global stability of contact discontinuity for compressible Navier-Stokes equations, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.* **109** (2003) 283-305.

[127] X. Huang, J. Li, Z. Xin, Blowup criterion for viscous baratropic flows with vacuum states, *Comm. Math. Phys.* **301** (2011) 23-35.

[128] X. Huang, J. Li, Z. Xin, Serrin-type criterion for the three-dimensional viscous compressible flows, *SIAM J. Math. Anal.* **43** (2011) 1872-1886.

[129] X. Huang, J. Li, Z. Xin, Global well-posedness of classical solutions with large oscillations and vacuum to the three-dimensional isentropic compressible Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **65** (2012) 549-585.

[130] X. Huang, J. Li, Existence and blowup behavior of global strong solutions to the two-dimensional barotrpic compressible Navier-Stokes system with vacuum and large initial data, *J. Math. Pures Appl. (9)* **106** (2016) 123-154.

[131] M. Ishii, One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-fluid flow regimes, *Tech. report, Argonne National Laboratory Report ANL* 77-47, 1977.

[132] M. Ishii, T. Hibiki, *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*, Springer-Verlag, New York, 2006.

[133] P.-E. Jabin, B. Perthame, Notes on mathematical problems on the dynamics of dispersed particles interacting through a fluid, *Modeling in applied sciences, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhöuser Boston, Boston, MA,* 111-147, 2000.

[134] P. Jiang, Global well-posedness and large time behavior of classical solutions to the Vlasov-Fokker-Planck and magnetohydrodynamics equations, *J. Differential Equations* **262** (2017) 2961-2986.

[135] S. Jiang, P. Zhang, On spherically symmetric solutions of the compressible isentropic Navier-Stokes equations, *Comm. Math. Phys.* **215** (2001) 559-581.

[136] S. Jiang, P. Zhang, Remarks on weak solutions to the Navier-Stokes equations for 2-D compressible isothermal fluids with spherically symmetric initial data, *Indiana Univ. Math. J.* **51** (2002) 345-355.

[137] S. Jiang, Z. Xin, P. Zhang, Global weak solutions to 1D compressible isentropic Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity, *Methods Appl. Anal.* **12** (2005) 239-251.

[138] Q. Jiu, Z. Xin, The Cauchy problem for 1D compressible flows with density-dependent viscosity coefficients, *Kinet. Relat. Models* **1** (2008) 313-330.

[139] Q. Jiu, M. Li, Y. Ye, Global classical solution of the Cauchy problem to 1D compressible Navier-Stokes equations with large initial data, *J. Differential Equations* **257** (2014) 311-350.

[140] Q. Jiu, Y. Wang, Z. Xin, Global well-posedness of the Cauchy problem of two-dimensional compressible Navier-Stokes equations in weighted spaces, *J. Differential Equations* **255** (2013) 351-404.

[141] J. Jung, Global-in-time dynamics of the two–phase fluid model in a bounded domain, arXiv: 2012.14612.

[142] Y. I. Kanel, A model system of equations for the one-dimensional motion of a gas, *Differ. Uravn.* **4** (1968) 721-734.

[143] S. Kawashima, *Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics*, Doctoral Thesis, 1983.

[144] S. Kawashima, W.-A. Yong, Dissipative structure and entropy for hyperbolic systems of balance laws, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **174** (2004) 345-364.

[145] A. V. Kazhikhov, V. V. Shelukhin, Unique global solution with respect to time of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of a viscous gas, *J. Appl. Math. Mech.* **41** (1977) 273-282.

[146] E. F. Keller, L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theoret. Biol.* **26** (1970) 399-415.

[147] E. F. Keller, L. A. Segel, Traveling bands of chemotactic bacteria: a theorectical analysis, *J. Theor. Biol.* **30** (1971) 235-248.

[148] R. Kowalczyk, A. Gamba, L. Preziosi, On the stability of homogeneous solutions to some aggregation models, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **4** (2004) 203-220.

[149] C. Lattanzio, A. E. Tzavaras, From gas dynamics with large friction to gradient flows describing diffusion theories, *Comm. Partial Differential Equations* **42** (2017) 261-290.

[150] J. Li, Z. Xin, Global well-posedness and large time asymptotic behavior of classical solutions to the compressible Navier-Stokes equations with vacuums, *Ann. PDE* **5** (2019) 1-37.

[151] J. Li, Z. Xin. Global existence of weak solutions to the barotropic compressible Navier-Stokes flows with degenerate viscosities, arXiv: 1504.06826.

[152] H.-L. Li, S. Liu, T. Yang, The Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system in bounded domains, *J. Stat. Phys.* **186** (2022) 42.

[153] H.-L. Li, L.-Y. Shou, Global well-posedness of one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system, *J. Differential Equations* **280** (2021) 841-890.

[154] H.-L. Li, L.-Y. Shou, Asymptotical behavior of one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system, *Sci. Sinica Math.* **51** (2021) 985-1002.

[155] H.-L. Li, L.-Y. Shou, Global weak solution for compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system, *Commun. Math. Res.* Accepted.

[156] H.-L. Li, L.-Y. Shou, Global existence of weak solutions to the drift-flux system for general pressure laws, *Sci. China Math.* Accepted.

[157] H.-L. Li, L.-Y. Shou, Global existence and optimal time-decay rates of the compressible Navier-Stokes-Euler system. Preprint.

[158] H.-L. Li, L.-Y. Shou, Global existence and optimal time-decay rates of the compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system. Preprint.

[159] H.-L. Li, Y. Wang, Z. Xin, Non-existence of classical solutions with finite energy to the Cauchy problem of the compressible Navier-Stokes equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **232** (2019) 557-590.

[160] H.-L. Li, J. Li, Z. Xin, Vanishing of vacuum states and blow-up phenomena of the compressible Navier-Stokes equations, *Comm. Math. Phys.* **281** (2008) 401-444.

[161] H.-L. LI, J. Sun, G. Zhang, M. Zhong, The behaviors of the solutions to the compressible Navier-Stokes(Euler)/Fokker-Planck equations. Prepint.

[162] H.-L. Li, T. Wang, Y. Wang, Wave phenomena to the three-dimensional fluid-particle model, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **243** (2022) 1019-1089.

[163] F. Li, Y. Mu, D. Wang, Strong solutions to the compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations: global existence near the equilibrium and large time behavior, *SIAM J. Math. Anal.* **49** (2017) 984-1026.

[164] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 1, Incompressible models,* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 3, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996.

[165] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 2, Compressible models,* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 10, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[166] T.-P. Liu, Z. Xin, T. Yang, Vacuum states of compressible flow, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **4** (1998) 1-32.

[167] T.-P. Liu, W. Wang, The pointwise estimates of diffusion wave for the Navier-Stokes systems in odd multi-dimension, *Comm. Math. Phys.* **196** (1998) 145-173.

[168] Q. Liu, H. Peng, Z.-A. Wang, Convergence to nonlinear diffusion waves for hyperbolic-parabolic chemotaxis system modelling vasculogenesis, *J. Differential Equations* **314** (2022) 251-286.

[169] Q. Liu, H. Peng, Z.-A. Wang, Asymptotic stability of diffusion waves of a quasi-linear hyperbolic-parabolic model for vasculogenesis, *SIAM J. Math. Anal.* **54** (2022) 1313-1346.

[170] Q. Liu, C. Zhu, Asymptotic behavior of a viscous liquid-gas model with mass-dependent viscosity and vacuum, *J. Differential Equations* **252** (2012) 2492-2519.

[171] G. Loeper, Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density, *J. Math. Pures Appl. (9)* **86** (2006) 68-79.

[172] T. Luo, Z. Xin, T. Yang, Interface behavior of compressible Navier-Stokes equations with vacuum, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000) 1175-1191.

[173] A. Matsumura, T, Nishida, The Cauchy problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979) 337-342.

[174] A, Matsumura, T, Nishida, The Cauchy problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases, *J. Math. Kyoto Univ.* **20** (1980) 67-104.

[175] A. Matsumura, T. Nishida, The initial boundary value problems for the equations of motion of compressible and heat-conductive fluids, *Comm. Math. Phys.* **89** (1983) 445-464.

[176] A. Matsumura, T. Nishihara, On the stability of traveling wave solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, *Japan J. Appl. Math.* **2** (1985) 17-25.

[177] A. Matsumura, T. Nishihara, Asymptotics toward the rarefaction wave of the solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, *Japan J. Appl. Math.* **3** (1986) 1-13.

[178] P. Marcati, A. Milani, The one-dimensional Darcy's law as the limit of a compressible Euler flow, *J. Differential Equations* **84** (1990) 129-147.

[179] A. Mellet, A. Vasseur, On the barotropic compressible Navier-Stokes equation, *Comm. Partial Differential Equations* **32** (2007) 431-452.

[180] A. Mellet, A. Vasseur, Global weak solutions for a Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes system of equations, *Math. Models Methods Appl. Sci*. **17** (2007) 1039-1063.

[181] A. Mellet, A. Vasseur, Asymptotic analysis for a Vlasov-Fokker-Planck/compressible Navier-Stokes system of equations, *Comm. Math. Phys.* **281** (2008) 573-596.

[182] A. Mellet, A. Vasseur, Existence and uniqueness of global strong solutions for one-dimensional compressible Navier-Stokes equations, *SIAM J. Math. Anal.* **39** (2007/08) 1344-1365.

[183] P.-B. Mucha, The Cauchy problem for the compressible Navier-Stokes equations in the L^p-framework, *Nonlinear Anal.* **52** (2003) 1379-1392.

[184] J. D. Murray, *Mathematical biology, I: An introduction,* vol. 17 of Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, third ed. 2002.

[185] J. D. Murray, *Mathematical biology, II: spatial models and biomedical application*, vol. 18 of Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, third ed. 2003.

[186] J. Nash, Le probleme de Cauchy pour les equations differentielles dn fluide general, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962) 487-497.

[187] R. Natalini, M. Ribot, M. Twarogowska, A well-balanced numerical scheme for a one dimensional quasilinear hyperbolic model of chemotaxis, *Commun. Math. Sci.* **12** (2014) 13-39.

[188] R. Natalini, M. Ribot, M. Twarogowska, A numerical comparison between degenerate parabolic and quasilinear hyperbolic models of cell movements under chemotaxis, *J. Sci. Comput.* **63** (2015) 654-677.

[189] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 27, Oxford University Press, Oxford, 2004.

[190] A. Novotný, M. Pokorný, Weak solutions for some compressible multicomponent fluid models, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **235** (2020) 355-403.

[191] M. Okita, Optimal decay rate for strong solutions in critical spaces to the compressible Navier-Stokes equations, *J. Differential Equations* **257** (2014) 3850-3867.

[192] P. J. O'Rourke, *Collective Drop Effects on Vaporizing Liquid Sprays*, Doctoral Thesis, Princeton University, Princeton, NJ, 1981.

[193] B. Perthame, *Transport Equations in Biology*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2007.

[194] P. I. Plotnikov, W. Weigant, Isothermal Navier-Stokes equations and Radon transform, *SIAM J. Math. Anal.* **47** (2015) 626-653.

[195] G. Ponce, Global existence of small solution to a class of nonlinear evolution equations, *Nonlinear Anal.* **9** (1985) 339-418.

[196] O. Rozanova, Blow-up of smooth highly decreasing at infinity solutions to the compressible Navier-Stokes equations, *J. Differential Equations* **245** (2008) 1762-1774.

[197] R. Salvi, I.Straškraba, Global existence for viscous compressible fluids and their behavior as $t \to \infty$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **40** (1993) 17-51.

[198] D. Serre, Solutions faibles globales des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986) 639-642.

[199] D. Serre, Sur l'équation monodimensionnelle d'un fluide visqueux, compressible et conducteur de chaleur, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986) 703-706.

[200] J. Serrin, On the uniqueness of compressible fluid motions, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **3** (1959) 271-288.

[201] S. Shizuta, S. Kawashima, Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation, *Hokkaido Math. J.* **14** (1985) 249-275.

[202] J. Simon, Compact sets in the space $\mathrm{L}^p(0,T;B)$, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **146** (1987) 65-96.

[203] I. Straškraba, A. Zlotnik, Global properties of solutions to 1D-viscous compressible barotropic fluid equations with density dependent viscosity, *Z. Angew. Math. Phys.* **54** (2003) 593-607.

[204] Y. Sun, C. Wang, Z. Zhang, A Beale-Kato-Majda blow-up criterion for the 3-D compressible Navier-Stokes equations, *J. Math. Pures Appl. (9)* **95** (2011) 36-47.

[205] H. Tang, Y. Zhang, Large time behavior of solutions to a two phase fluid model in $\mathbb{R}^3$, *J. Math. Anal. Appl.* **503** (2021) 125296.

[206] A. Vasseur, C. Yu. Existence of global weak solutions for 3D degenerate compressible Navier-Stokes equations, *Invent. Math.* **206** (2016) 935-974.

[207] A. Valli, An existence theorem for compressible viscous fluids, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **130** (1982) 197-213.

[208] A. Valli, W. Zajaczkowski, Navier-Stokes equations for compressible fluids: global existence and qualitative properties of the solutions in the general case, *Comm. Math. Phys.* **103** (1986) 259-296.

[209] A. Vasseur, H. Wen, C. Yu, Global weak solution to the viscous two-fluid model with finite energy, *J. Math. Pures Appl. (9)* **125** (2019) 247-282.

[210] V. A. Vaigant, A. V. Kazhikhov, On existence of global solutions to the two-dimensional Navier-Stokes equations for a compressible viscous fluid, *Sib. Math. J.* **36** (1995) 1283-1316.

[211] C. Villani, *Optimal Transport: Old and New*, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

[212] D. Wang, C. Yu, Global weak solution to the inhomogeneous Navier-Stokes-Vlasov equations, *J. Differential Equations* **259** (2015) 3976-4008.

[213] G. B. Wallis, *One-dimensional two-fluid flow*, McGraw-Hill, New York, 1979.

[214] H. Wen, On global solutions to a viscous compressible two-fluid model with unconstrained transition to single-phase flow in three dimensions, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **60** (2021) 158.

[215] H. Wen, C. Zhu, Remarks on global weak solutions to a two-fluid type model, *Commun. Pure Appl. Anal.* **20** (2021) 2839-2856.

[216] H. Wen, L. Yao, C. Zhu, Review on mathematical analysis of some two-phase flow models, *Acta Math. Sci.* **38** (2018) 1617-1636.

[217] H. Wen, L. Yao, C. Zhu, A blow-up criterion of strong solution to a 3D viscous liquid-gas two-phase flow model with vacuum, *J. Math. Pures Appl. (9)* **97** (2012) 204-229.

[218] H. Wen, C. Zhu, Blow-up criterions of strong solutions to 3D compressible Navier-Stokes equations with vacuum, *Adv. Math.* **248** (2013) 534-572.

[219] H. Wen, L. Zhu, Global well-posedness and decay estimates of strong solutions to a two-phase model with magnetic field, *J. Differential Equations* **264** (2018) 2377-2406.

[220] F.-A. Williams, Spray comaustion and atomization, *Phys. of Fluids* **1** (1958) 541-545.

[221] F.-A. Williams, *Comaustion theory.* Benjamin Cummings, second edition, 1985.

[222] G. Wu, Y. Zhang, L. Zou, Optimal large-time behavior of the two-phase fluid model in the whole space, *SIAM J. Math. Anal.* **52** (2020) 5748-5774.

[223] Z. Xin, Blow-up of smooth solution to the compressible Navier-Stokes equations with compact density, *Comm. Pure Appl. Math.* **51** (1998) 229-240.

[224] Z. Xin, J. Xu, Optimal decay for the compressible Navier-Stokes equations without additional smallness assumptions, *J. Differential Equations* **274** (2020) 1076-1116.

[225] Z. Xin, W. Yan, On blowup of classical solutions to the compressible Navier-Stokes equations, *Comm. Math. Phys.* **321** (2013) 529-541.

[226] J. Xu, S. Kawashima, Global classical solutions for partially dissipative hyperbolic system of balance laws, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **211** (2014) 513-553.

[227] J. Xu, S. Kawashima, The optimal decay estimates on the framework of Besov spaces for generally dissipative systems, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **218** (2015) 275-315.

[228] J. Xu, S. Kawashima, Diffusive relaxation limit of classical solutions to the damped compressible Euler equations, *J. Differential Equations* **256** (2014) 771-796.

[229] J. Xu, A low-frequency assumption for optimal time-decay estimates to the compressible Navier-Stokes equations, *Comm. Math. Phys.* **371** (2019) 525-560.

[230] L. Yao, J. Yang, Z. Guo. Global classical solution for a three-dimensional viscous liquid-gas two-fluid flow model with vacuum, *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* **30** (2014) 989-1006.

[231] T. Yang, Z.-A. Yao, C. Zhu, Compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity and vacuum, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001) 965-981.

[232] T. Yang, C. Zhu, Compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosity coefficient and vacuum, *Comm. Math. Phys.* **230** (2002) 329-363.

[233] L. Yao, T. Zhang, C. Zhu, Existence of asymptotic behavior of global weak solutions to a 2D viscous liquid-gas two-phase flow model, *SIAM J. Math. Anal*. **42** (2010) 1874-1897.

[234] L. Yao, T. Zhang, C. Zhu, A blow-up criterion for a 2D viscous liquid-gas two-phase flow model, *J. Differential Equations* **250** (2011) 3362-3378.

[235] L. Yao, C. Zhu, Free boundary value problem for a viscous two-phase model with mass-dependent viscosity, *J. Differential Equations* **247** (2009) 2705-2739.

[236] L. Yao, C. Zhu, Existence and uniqueness of global weak solution to a two-phase flow model with vacuum, *Math. Ann*. **349** (2011) 903-928.

[237] L. Yao, C. Zhu, R. Zi, Incompressible limit of viscous liquid-gas two-phase flow model, *SIAM J. Math. Anal.* **44** (2012) 3324-3345.

[238] C. Yu, Global weak solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations, *J. Math. Pures Appl. (9)* **100** (2013) 275-293.

[239] Y. Zeng, L^1 asymptotic behavior of compressible isentropic viscous 1-D flow, *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994) 1053-1082.

[240] T. Zhang, D. Fang, Compressible flows with a density-dependent viscosity coefficient, *SIAM J. Math. Anal.* **41** (2010) 2453-2488.

[241] Y. Zhang, C. Zhu, Global existence and optimal convergence rates for the strong solutions in H^2 to the 3D viscous liquid-gas two-phase flow model, *J. Differential Equations* **258** (2015) 2315-2338.

[242] A. Zlotnik, Uniform estimates and stabilization of symmetric solutions of a system of quasi-linear equations, *Differ. Equ.* **36** (2000) 701-716.

[243] N. Zuber, On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime, *Chem. Engrg. Sci.* **19** (1964) 897-917.

致 谢

回首研究生度过的六年岁月, 若白驹之过隙. 在论文即将完成之际, 想向曾给予我帮助和支持的众多师长、同学、亲友致以衷心的感谢.

首先, 非常幸运来到首都师范大学师从李海梁教授学习. 李老师高屋建瓴的观点、对数学本质深刻的思考、严谨地治学态度将深深影响我以后的学习生涯. 李老师在教授我们专业知识的同时, 更教会我们做学问的方法, 鼓励我们不断尝试与进步, 使我们少走弯路, 是我终身学习的榜样. 数学科学学院给我们提供了良好的学习科研环境, 丰富的学术活动, 拓宽了我们的学术视野. 这些都是我提升的重要阶梯, 我十分荣幸与感恩.

另外, 在首师大我有幸参加过酒全森教授、牛冬娟教授等老师们的课. 同时, 我也荣幸地参加过郝成春研究员、黄飞敏研究员、黄祥娣研究员、李竞研究员、李进开教授等老师们的短期课. 他们深入浅出的讲解使我对偏微分方程及调和分析等方向有了更多的理解. 在巴黎东大访问期间, 我十分感谢 Raphaël Danchin 教授的指点, 也十分荣幸能够和 Timothée Crin-Barat 博士和谈进博士一起合作讨论. 特别感谢陈亚洲、井磊、连如旭、梁闯闯、刘健、麦拉苏、孙家伟、伍亚魁、张兴伟、钟明溁、赵斌、汤厚志等师兄, 孔慧慧、温新梅、赵爽等师姐, 以及马翔宇、张明月、张越、李维娟、左翰文、张德洋等师弟师妹们. 特别感谢 2019 级的博士同学们, 尤其是唐志宝和何清友, 通过思维的碰撞, 共同成长进步. 也感谢其他一直支持与鼓励我的朋友们, 有缘认识优秀的他们是我的荣幸.

最后, 我要特别感谢我的父母和女友陆依婷, 感谢他们的付出与支持才使我有勇气与毅力不断前行.

完成发表文章目录

1. Hai-Liang Li, Ling-Yun Shou, Global well-posedness of one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system, *J. Differential Equations* **280** (2021) 841-890.
2. Hai-Linag Li, Ling-Yun Shou, Asymptotical behavior of one-dimensional compressible Navier-Stokes-Vlasov system, *Sci. Sinica Math.* **51** (2021) 985-1002.
3. Hai-Liang Li, Ling-Yun Shou, Global existence of weak solutions to the drift-flux system for general pressure laws, *Sci. China Math.* Accepted.
4. Hai-Liang Li, Ling-Yun Shou, Global weak solution for compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system, *Commun. Math. Res.* Accepted
5. Timothée Crin-Barat, Qingyou He, Ling-Yun Shou, The hyperbolic-parabolic chemotaxis system modelling vasculogenesis: global dynamics and relaxation limit. Submitted.
6. Ling-Yun Shou, Ya-Ting Wang, Global existence and large time behavior of weak solutions to the two-phase flow. Submitted.
7. Hai-Liang Li, Ling-Yun Shou, Global existence and optimal time-decay rates of the compressible Navier-Stokes-Euler system. Submitted.
8. Hai-Liang Li, Ling-Yun Shou, Global existence and optimal time-decay rates of the compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system. Preprint.
9. Hai-Liang Li, Ling-Yun Shou, Vanishing viscosity limit of the compressible Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system. Preprint.