

Homogeneização de Alguns Problemas de Contorno

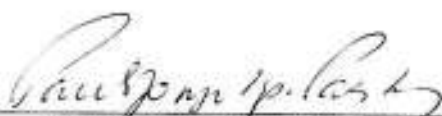
por

Joel Santos Souza

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da
Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários
para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

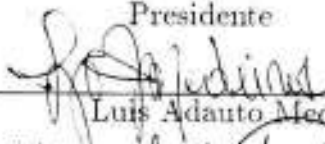
Área de Concentração: Matemática Pura

Aprovada por:

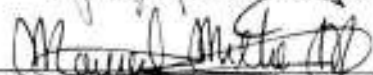


Paulo Jorge Serpa Paes Leme

Presidente



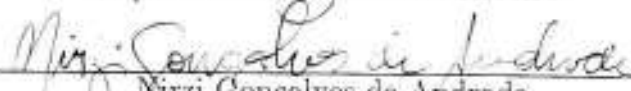
Luis Adauto Medeiros



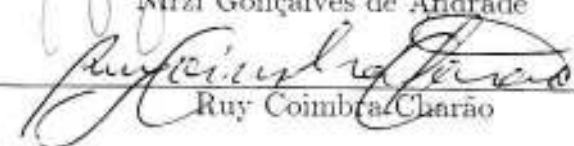
Manuel Milla Miranda



Neyde Felisberto Martins Ribeiro



Nirzi Gonçalves de Andrade



Ruy Coimbra Charão

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

T
1501
5/28/95

*"I can do everything through him
who gives me strength"*

Philippians 4:13, NIV.

À Aleide, minha mãe,
a mulher mais extraordinária
que conheci,
e meus irmãos.

À memória de meu pai,
Joel, o lustrador.

À Neidinha, Filipe e Lucas

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu Deus pela realização deste singelo, porém mui significativo trabalho.

Agradeço a Neidinha, Filipe e Lucas pelo sacrifício que fizeram em prol desta realização.

Agradeço aos professores Paulo Jorge, Luiz Adauto e Milla: pela assistência, que me foi concedida; pelos conhecimentos, que me foram transmitidos; e pela confiança, que em mim depositaram.

Agradeço também aos colegas do IM: Jutuca, Haroldo, Margareth, Marcelo, Valéria, Santos e Midori; pelo companheirismo, amizade e ânimo comunicados, tão importantes no caminhar desta jornada.

Agradeço, por fim, à CAPES e à FAPERJ, pelo suporte financeiro concedido.

A todos, o meu obrigado.

RESUMO

Neste trabalho, consideramos a homogeneização da equação hiperbólica com um termo de pressão, com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas, em domínios com "pequenos" buracos.

Equações do tipo considerado são um modelo simples de equações de elasticidade dinâmica para materiais incompressíveis. Elas também aparecem em problemas acoplados de termo-elasticidade onde um dos parâmetros acoplados (relacionado a propriedades de compressibilidade) tende a infinito.

Nós também consideramos a homogeneização das equações de Navier-Stokes, com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas, em domínios com "pequenos" buracos.

Para estes problemas, demonstramos a convergência do processo de homogeneização, e para a equação hiperbólica com um termo de pressão demonstramos resultados de correção.

Para os resultados de correção hipóteses especiais são necessárias sobre as condições iniciais, que implicam a convergência das energias.

As demonstrações são fundamentadas no quadro funcional abstrato introduzido por G. Allaire, para o estudo da homogeneização das equações de Stokes estacionárias, em domínios com "pequenos" buracos, que é baseado no uso de funções adequadas adaptadas à geometria do problema.

ABSTRACT

In this work we consider the homogenization of the hyperbolic equation with a pressure term with homogeneous Dirichlet boundary conditions in domains with small holes.

Equations of the type considered are a simple model of dynamical elasticity equations for incompressible materials. They also appear in coupled elasto-thermicity problems where one of the coupling parameter (related to compressibility properties) tends to infinity.

We also deal with the homogenization of the Navier-Stokes equations with homogeneous Dirichlet boundary conditions in domains with small holes.

For these problems we prove the convergence of homogenization process, and corrector results for the hyperbolic equation with a pressure term. For the corrector results special requirements are needed on the initial conditions, which imply the convergence of energies. The proofs are performed in the abstract framework introduced by G. Allaire for the study of homogenization of Steady-state Stokes equations in domains with small holes, which is based on the use of suitable test functions adapted to the geometry of the problem.

SUMÁRIO

Introdução	1
Capítulo I – Homogeneização da Equação Hiperbólica com um Termo de Pressão . .	10
I.1. Introdução	10
I.2. Situação Geométrica	12
I.3. O Resultado de Homogeneização para a Equação Hiperbólica com um Termo de Pressão	15
I.4. Enfraquecimento da Hipótese $(2.1)_4$	39
Capítulo II – Resultados de Correção	43
Capítulo III – Homogeneização da Equação de Navier-Stokes	53
Apêndice A	80
A.1. Alguns Resultados de Compacidade	80
A.2. Revisão do Problema de Stokes Estacionário	81
A.3. Resultados Básicos	82
Referências	84

NOTAÇÕES

$\mathcal{D}(\Omega)$ – espaço das funções de classe C^∞ , com suporte compacto em Ω .

Seja $p \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n} \right)$, é o gradiente de p .

$\Delta p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}$ é o laplaciano de p .

Seja $u \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$,

$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, é a divergência de u .

$L^2(\Omega)$ – aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$, com a seguinte norma:

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \phi^2 dx.$$

$L^2(\Omega)/\mathbf{R}$ – o conjunto quociente de $L^2(\Omega)$ pelo conjunto das constantes reais. É o conjunto das funções de $L^2(\Omega)$ definidas a menos de uma constante.

$H_0^1(\Omega)$ – aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$, com a seguinte norma:

$$\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \phi(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \phi^2(x) dx.$$

$H^{-1}(\Omega)$ – dual de $H_0^1(\Omega)$.

$a(u, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n.$

INTRODUÇÃO

O método de homogeneização é uma técnica que possibilita várias aplicações destacando-se entre elas a modelagem de fenômenos físicos. Esta técnica permite modelar fenômenos de transporte e difusão numa escala macroscópica através de informações numa escala microscópica. Como exemplo, o escoamento de um fluido, em um rio ou um lago, com obstáculos, onde estes obstáculos seriam constituídos por uma região com árvores. Numa escala "microscópica", de alguns metros, as equações que descrevem um tal escoamento, são as equações de Navier-Stokes, numa geometria muito complicada. Entretanto, fenômenos de grande interesse ocorrem numa escala de quilômetros, escala macroscópica. As equações desse escoamento nesta escala podem ser bem mais tratáveis quando escritas em termos de grandezas médias, onde os efeitos locais de flutuações são incorporados a certos parâmetros desses novos modelos. Busca-se obter exatamente, o correto tratamento, na escala macroscópica, de efeitos não lineares descritos pela equação de Navier-Stokes numa escala microscópica.

O Tratamento Matemático, em geral, do método de homogeneização se dá em duas abordagens. Um exemplo da primeira é visto em J.L. Lions [27], onde estuda-se o problema:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f, & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon \text{ satisfazendo a certas condições de fronteira,} \end{cases}$$

em que Ω_ε denota um domínio aberto limitado "perfurado" do $\mathbf{R}^n$, obtido de Ω por extração de um certo número de orifícios distribuídos periodicamente com período $\varepsilon > 0$. Problemas deste tipo aparecem no estudo da torsão elástica de um tronco cilíndrico com r cavidades ou furos. É claro que, para cada $\varepsilon > 0$, poderíamos resolver o problema (1) usando métodos variacionais; no entanto, o procedimento dependeria de ε , ou melhor, o espaço no qual se aplicariam os métodos dependeria de ε . Por outro lado, a obtenção de uma solução aproximada de (1), para ε suficientemente pequeno, demandaria muito esforço

do ponto de vista da análise numérica e computacional. É necessário, portanto, um método que nos proporcione uma solução aproximada do problema (1) e que não dependa de ε . Para isto fazemos uso do método de homogeneização.

Para que obtenhamos a homogeneização do problema (1) realizamos um desenvolvimento de ordem qualquer em ε para u_ε :

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \cdots + \varepsilon^j u_j(x, y) + \cdots$$

onde $y = \frac{x}{\varepsilon}$, x representa uma variável macroscópica e y uma variável microscópica.

As funções $u_0, u_1, u_2, \dots$ são construídas independentes de ε , de tal forma que se tenha algum controle de erro, i.e.:

$$\|u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots + \varepsilon^m u_m)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c \varepsilon^m,$$

ou ainda, o erro seja de ordem ε^m , num espaço de Sobolev sobre Ω_ε , para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim podemos afirmar que a solução aproximada do problema (1) será:

$$u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots + \varepsilon^m u_m.$$

A determinação das funções u_j da expansão assintótica se dá impondo-se a condição de que u_ε seja solução do problema (1) e com isto resolve-se, para cada potência de ε , problemas similares ao problema (1) com a vantagem de estes problemas agora serem definidos não mais em Ω_ε porém em todo Ω . Assim são construídas as funções $u_j(x, y)$ da expansão assintótica com $x \in \Omega$ (i.e., definidas em todo Ω).

Esta seria a abordagem através da expansão assintótica. Para uma referência ver também E. Sanchez-Palencia [34]. Fazendo-se uso desta abordagem obtém-se alguma correlação entre os efeitos microscópicos e macroscópicos de fenômenos envolvendo escoamento de fluidos.

Um exemplo da segunda abordagem é visto nos trabalhos [11] e [9], onde não se utiliza uma expansão assintótica para u_ε .

Em [11], em 1982, Doina Cioranescu e François Murat, no estudo abstrato da homogeneização do problemas elípticos consideraram o seguinte problema:

Encontrar u_ε solução de:

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f, & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \end{cases}$$

onde f é dado em $H^{-1}(\Omega)$.

Denotando-se por $\tilde{u}_\varepsilon$ a extensão de u_ε , a todo Ω , definida por:

$$\tilde{u}_\varepsilon = \begin{cases} u_\varepsilon, & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ 0, & \text{nos buracos } T_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_i^\varepsilon, \end{cases}$$

foi mostrado nesse artigo que:

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \text{fraco, em } H_0^1(\Omega), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

onde $\tilde{u}_\varepsilon$ é a única solução do problema (2), para cada $\varepsilon > 0$, fixado, estendida por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado:

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta u + \mu u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

onde μ é uma medida não-negativa de Radon pertencente a $H^{-1}(\Omega)$. Esta medida aparece neste estudo abstrato e está ligada ao comportamento da capacidade do conjunto T_ε , quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Impõe-se para isto a condição de que os buracos sejam "pequenos", i.e., $a_{T_i^\varepsilon}$, o diâmetro dos buracos seja assintoticamente menor ou igual ao "diâmetro crítico" a_ε , dado por:

$$\begin{cases} a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^{n/n-2}, & \text{para } n \geq 3 \\ a_\varepsilon = \delta_\varepsilon \exp(-C_0/\varepsilon^2), & \text{para } n = 2, \end{cases}$$

onde $C_0 > 0$ está fixado, e $\varepsilon^2 \log \delta_\varepsilon \rightarrow 0$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Esta condição possibilita a construção de um quadro funcional de hipóteses, sobre os buracos, que é fundamental na demonstração dos resultados. No caso acima, μ será uma constante estritamente positiva,

quando o diâmetro dos buracos for o crítico. Neste caso, o termo de ordem zero adicional, μv , aparece na equação limite.

Mostra-se ainda, em [11], resultados de correção, ou seja:

$$\tilde{u}_\varepsilon = w_\varepsilon u + R_\varepsilon, \quad \text{com } R_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{forte, em } H_0^1(\Omega),$$

i.e., $w_\varepsilon u$ é uma boa aproximação para a solução de (2).

No artigo apresentado por D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat e E. Zuazua em [9], de 1991, estuda-se a homogeneização da equação da onda:

$$(4) \quad \begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad T > 0 \\ u_\varepsilon = 0, & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon \times (0, T) \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0, & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon'(x, 0) = u_\varepsilon^1, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

com $u_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, $u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $f_\varepsilon \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$, e:

$$\begin{cases} \widetilde{u_\varepsilon^0} \rightharpoonup u_0, & \text{fraco, em } H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{u_\varepsilon^1} \rightharpoonup u_1, & \text{fraco, em } L^2(\Omega), \\ \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f, & \text{fraco, em } L^1(0, T; L^2(\Omega)) \end{cases}$$

Em [9], mostra-se também que:

$$\tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{*} u, \quad \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)),$$

onde $\tilde{u}_\varepsilon$ é a única solução do problema (4), para cada $\varepsilon > 0$, fixado, estendida por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado:

$$(5) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \quad T > 0 \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0, & \text{em } \Omega \\ u'(x, 0) = u_1, & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde μ é uma medida de Radon não negativa, sendo positiva quando o diâmetro dos buracos é o diâmetro crítico. Estuda-se ainda, neste artigo, resultados de correção, i.e. :

$$R_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{forte, em } C^0([0, T]; W_0^{1,1}(\Omega)).$$

Um outro exemplo interessante é visto em G. Alaire [1], de 1989, e em [2], de 1990, onde se faz a homogeneização de problemas envolvendo escoamentos com obstáculos.

No trabalho apresentado em [2] considera-se o seguinte sistema de Stokes:

$$(S_\varepsilon) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}]; \\ \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \text{div } u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

O sistema (S_ε) dá a descrição do fluxo de um fluido viscoso, incompressível, no domínio Ω_ε , sob a ação de uma força exterior f , com condições de fronteira de Dirichlet, sem deslizamento. A viscosidade e a densidade do fluido estão sendo considerados iguais a 1. A velocidade do fluxo é representada por u_ε , e a pressão do fluido por p_ε . A força $f \in [L^2(\Omega)]^n$, sendo $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, um aberto limitado regular, e $\Omega_\varepsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_i^\varepsilon$, $T_i^\varepsilon \subset \Omega$ conjuntos fechados (buracos).

Considera-se ainda o seguinte sistema, definido em todo domínio Ω , que descreve a Lei de Brinkman:

$$(S_0) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)/\mathbf{R}]; \\ \nabla p - \Delta u + Mu = f, \quad \text{em } \Omega \\ \text{div } u = 0, \quad \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde M é uma matriz simétrica e positiva que depende da forma dos buracos T_i^ε , Mu é um termo linear da velocidade de ordem zero.

Considera-se também, em todo domínio Ω , o sistema de Stokes:

$$(S) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)/\mathbf{R}]; \\ \nabla p - \Delta u = f, \quad \text{em } \Omega \\ \text{div } u = 0, \quad \text{em } \Omega \end{cases}$$

E por fim, considera-se o sistema definido em todo Ω , que descreve a Lei de Darcy:

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [L^2(\Omega)]^n \times [H^1(\Omega)/\mathbf{R}] \\ u = M^{-1}(f - \nabla p), \quad \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0, \quad \text{em } \Omega \\ u \cdot \eta = 0, \quad \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

O Problema Homogeneizado consiste em se tomar o limite do problema (S_ε) quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Obtém-se os seguintes resultados, considerando-se o tamanho dos buracos e com algumas hipóteses sobre os mesmos:

Definindo-se a_ε como o diâmetro "crítico" dos buracos, e $a_{T_i^*}$ como o diâmetro dos buracos, em suma, temos três situações:

- i) Quando o diâmetro dos buracos é da mesma ordem que o diâmetro "crítico", i.e., $a_{T_i^*} \cong a_\varepsilon$, temos:

$$(\tilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon)) \rightharpoonup (u, p), \quad \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)/\mathbf{R}],$$

onde (u, p) é a única solução de (S_0) , P_ε é uma extensão da pressão p_ε , e $\tilde{u}_\varepsilon$ é a extensão por 0 em $\Omega - \Omega_\varepsilon$, ou seja, sintetizando teríamos:

$$S_\varepsilon \rightarrow S_0 \text{ (Lei de Brikman), quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

- ii) Quando o diâmetro dos buracos é assintoticamente menor que o "crítico", i.e., $a_{T_i^*} < a_\varepsilon$ (buracos pequenos), temos:

$$(\tilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon)) \rightarrow (u, p), \quad \text{forte, em } [H_0^1(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)/\mathbf{R}],$$

onde (u, p) é a única solução de (S) .

Sintetizando, teríamos:

$$S_\varepsilon \rightarrow S \text{ (Stokes), quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

- iii) Quando o diâmetro dos buracos é assintoticamente maior que o "crítico", i.e., $a_{T_i^*} > a_\varepsilon$, porém reservando-se determinadas proporções (buracos grandes), temos:

$$\left(\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2}, P_\varepsilon(p_\varepsilon)\right) \rightarrow (u, p), \quad \text{forte, em } [L^2(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)/\mathbf{R}],$$

onde (u, p) é a única solução de (D), e $\sigma_\varepsilon = \frac{a_\varepsilon}{a_{T_1^\varepsilon}}$.

Sintetizando, teríamos:

$$S_\varepsilon \rightarrow D, \text{ (Lei de Darcy), quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

O trabalho que desenvolvemos aqui segue nos moldes de [11] e está fundamentalmente baseado nas referências, [1], [2] e [9].

Neste trabalho estudamos a homogeneização de dois problemas de contorno com condições de fronteira de Dirichlet em domínios perfurados com "pequenos" buracos. Para isto seja Ω um conjunto aberto, conexo, limitado do $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$), localmente localizado de um mesmo lado de sua fronteira Γ . Seja $\{\varepsilon\}$ um net de reais estritamente positivos que tende a zero, enquanto $N(\varepsilon)$ tende a infinito. Para cada ε consideramos a família de conjuntos fechados $(T_i^\varepsilon)_{i=1}^{N(\varepsilon)}$ (os buracos), e definimos um conjunto perfurado Ω_ε , por:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_i^\varepsilon.$$

Admitimos que Ω_ε seja também um conjunto aberto, conexo, limitado do $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$), localmente localizado de um mesmo lado de sua fronteira Γ_ε . O primeiro é o problema misto para a equação hiperbólica com um termo de pressão:

$$(6) \quad \begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad T > 0 \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, & \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon \times (0, T) \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0, \quad u_\varepsilon'(x, 0) = u_\varepsilon^1, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

onde as fronteiras Γ e Γ_ε são de Lipschitz.

Esta equação é obtida de J.C. Saut [35], e foi estudada por J.L. Lions em [23], onde se aborda a existência e a unicidade para tal equação. Equações deste tipo aparecem em modelos simples de equações de elasticidade dinâmica para materiais incompressíveis, e também em problemas acoplados de termo-elasticidade, onde um dos parâmetros acoplados, relacionado a propriedades de compressibilidade, tende a infinito.

O segundo, é o problema misto para a equação de Navier-Stokes:

$$(7) \quad \begin{cases} u'_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad T > 0 \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, & \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon \times (0, T) \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0, & \text{em } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

onde as fronteiras de Γ e Γ_ε são de classe C^2 , e $n = 2$ ou 3 .

O estudo da homogeneização de tais problemas é feito pela utilização de algumas técnicas estabelecidas, desde 1977, por Luc Tartar (cf. [38]).

Em toda a apresentação do presente trabalho, os conjuntos Ω_ε serão supostos satisfazerem as condições do quadro funcional abstrato introduzido por G. Allaire em [1] e [2] (ver hipótese (I.2.1) abaixo) para o estudo da homogeneização dos problemas de Stokes, em domínios perfurados com “pequenos” buracos, com condições de fronteira de Dirichlet homogêneas. O caso modelo, para o nosso estudo, é provido por um domínio periodicamente perfurado (com um período 2ε na direção de cada eixo-coordenada) por buracos de diâmetro r_ε , onde r_ε é assintoticamente igual ao “diâmetro crítico” a_ε . Esta condição é fundamental na construção do quadro funcional de hipóteses sobre os buracos. As demonstrações contidas neste trabalho estão baseadas na existência de tal quadro funcional de hipóteses.

Este trabalho é somente concebido para dados de fronteira de Dirichlet homogêneos. Observamos que o caso de condições de Neumann, homogêneas, conduz a resultados completamente diferentes, com o diâmetro crítico sendo neste caso $a_\varepsilon = \varepsilon$ (cf. D. Cioranescu e P. Donato [8], para homogeneização deste problema).

O presente trabalho está organizado como segue: O Capítulo I está dividido em quatro partes. Na Seção I.2 relembramos o quadro funcional abstrato de [1] e [2], sobre a geometria dos buracos. Na Seção I.3, apresentamos o principal resultado do Capítulo I, o Teorema 3.4, que nos dá a convergência do processo de homogeneização da equação hiperbólica com um termo de pressão (6). A semicontinuidade inferior da correspondente energia é também demonstrada. Na Seção I.4, generalizamos o resultado obtido na Seção I.3, enfraquecendo a hipótese (I.2.1)_{iv}.

O Capítulo II, apresenta apenas uma seção, que trata do resultado de correção. Para a obtenção de tal resultado é necessário se fazer hipóteses especiais sobre o dado inicial u_ϵ^0 .

O Capítulo III, constituído também de somente uma seção, apresenta o resultado de homogeneização para a equação de Navier-Stokes (7).

Finalmente, o Apêndice A é dedicado à apresentação de alguns resultados necessários. Na Seção A.1, alguns resultados de compacidade são enunciados. Na Seção A.2, são revistos resultados obtidos com a homogeneização da equação de Stokes estacionária, na mesma situação em que neste trabalho. Na Seção A.3, alguns resultados básicos são enunciados.

CAPÍTULO I

Homogeneização da Equação Hiperbólica com um termo de Pressão

I.1. Introdução

Neste capítulo estudamos a homogeneização de uma equação hiperbólica com um termo de pressão, para materiais incompressíveis, com condições de fronteira de Dirichlet, em domínios perfurados com "pequenos" buracos.

Consideremos o problema misto para a equação hiperbólica com um termo de pressão:

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, T) \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, & \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, & \text{sobre } \Sigma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times (0, T), \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0, u_\varepsilon'(x, 0) = u_\varepsilon^1, & \text{em } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

onde as fronteiras Γ e Γ_ε são de Lipschitz, e $u'(x, t) = u_t(x, t)$.

Nosso objetivo é descrever a convergência das soluções u_ε , para identificarmos a equação satisfeita pelo limite u .

Como uma primeira hipótese sobre os dados em (1.1), admitimos que:

$$u_\varepsilon^0 \in V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n, \quad u_\varepsilon^1 \in V_\varepsilon \quad \text{e} \quad f_\varepsilon \in W^{1,1}(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n).$$

com:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \widetilde{u_\varepsilon^0} \rightharpoonup u^0, & \text{fraco, em } V \cap [H^2(\Omega)]^n \\ \widetilde{u_\varepsilon^1} \rightharpoonup u^1, & \text{fraco, em } V \\ \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f, & \text{fraco, em } L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n) \\ \widetilde{f_\varepsilon'} \rightharpoonup f', & \text{fraco, em } L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n) \\ \widetilde{f_\varepsilon}(0) \rightharpoonup f(0), & \text{fraco, em } [L^2(\Omega)]^n \end{cases}$$

Como é naturalmente esperado, a extensão $\tilde{u}_\varepsilon$, da solução u_ε de (1.1), converge fraco-estrela em $W^{1,\infty}(0, T; V)$ para a solução u do problema:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' - \Delta u + \nabla p + Mu = f, \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u = 0, \quad \text{sobre } \Omega \times (0, T) \\ u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u^0, u'(x, 0) = u^1, \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

onde M é uma matriz simétrica e positiva cujos elementos são medidas de Radon.

Este resultado é demonstrado no Teorema 3.4 da Seção 3. A semicontinuidade inferior da energia é também demonstrada no Teorema 3.5.

I.2. Situação Geométrica

Em vez de fazermos hipóteses geométricas diretas sobre os buracos T_i^ε , adotamos aqui o quadro funcional abstrato introduzido por G. Allaire em [1] e [2], onde a hipótese sobre a geometria dos buracos é feita admitindo-se a existência de uma família adequada de funções testes. Precisamente, suporemos que: existem funções $(w_k^\varepsilon, q_k^\varepsilon, \mu_k)_{1 \leq k \leq n}$ tais que:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \begin{cases}
 \text{(i)} & w_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)]^n, \quad \|w_k^\varepsilon\|_{[L^\infty(\Omega)]^n} \leq M_o, q_k^\varepsilon \in L^2(\Omega) \\
 \text{(ii)} & \begin{cases} \nabla \cdot w_k^\varepsilon = 0, \text{ em } \Omega \\ w_k^\varepsilon = 0, \text{ nos buracos } T_i^\varepsilon \end{cases} \\
 \text{(iii)} & \begin{cases} w_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k, \text{ fraco, em } [H^1(\Omega)]^n, \text{ e q.s. em } \Omega, \\ \text{onde } e_k \text{ é o } k\text{-ésimo vetor da base canônica do } \mathbf{R}^n, \\ q_k^\varepsilon \rightharpoonup 0, \text{ fraco, em } L^2(\Omega)/\mathbf{R} \end{cases} \\
 \text{(iv)} & \mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^n \\
 \text{(v)} & \text{Para cada seqüência } \nu_\varepsilon \text{ e para cada } \nu \text{ tal que:} \\
 & \begin{cases} \nu_\varepsilon \rightharpoonup \nu, \text{ fraco, em } [H^1(\Omega)]^n \\ \nu_\varepsilon = 0, \text{ sobre os buracos } T_i^\varepsilon \end{cases} \\
 & \text{e para cada } \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ temos:} \\
 & \langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \phi \nu_\varepsilon \rangle_\Omega \rightarrow \langle \mu_k, \phi \nu \rangle_\Omega \\
 \text{(vi)} & \text{Existe uma aplicação linear } R_\varepsilon \text{ tal que:} \\
 & R_\varepsilon \in \mathcal{L}([H_0^1(\Omega)]^n, [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n) \\
 & u \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \Rightarrow R_\varepsilon \tilde{u} = u, \text{ em } \Omega_\varepsilon \\
 & \nabla \cdot u = 0, \text{ em } \Omega \Rightarrow \nabla \cdot (R_\varepsilon u) = 0, \text{ em } \Omega_\varepsilon \\
 & \|R_\varepsilon\|_{[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n} \leq c \|u\|_{[H_0^1(\Omega)]^n}, \text{ e } c \text{ não depende de } \varepsilon.
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Em (2.1), e daqui em diante, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ denota o par dualidade entre $[H^{-1}(\Omega)]^n$ e $[H_0^1(\Omega)]^n$, enquanto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_\varepsilon}$ denotará o par dualidade entre $[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n$ e $[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n$.

Observação 2.1: Para exemplos onde as hipóteses de (2.1) são satisfeitas ver [1] e [2].

Observação 2.2: Nos exemplos acima o diâmetro dos buracos $a_\varepsilon < \varepsilon$, e satisfaz:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \log a_\varepsilon \rightarrow -C_o, & \text{se } n = 2 \\ a_\varepsilon \varepsilon^{-n/n-2} \rightarrow C_o, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

para um dado $C_o > 0$.

O diâmetro a_ε é crítico no seguinte sentido: quando o diâmetro dos buracos é $a_{T_i} \varepsilon$, com $a_{T_i} \varepsilon \ll a_\varepsilon$, i.e., quando:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \log r_\varepsilon \rightarrow -\infty, & \text{se } n = 2, \\ \frac{\varepsilon^{n/n-2}}{r_\varepsilon} \rightarrow +\infty, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

a hipótese (2.1) é satisfeita, mas, em (iii), w_k^ε agora converge fortemente para e_k , em $[H^1(\Omega)]^n$, e em (iv), $\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \phi \nu_\varepsilon \rangle_\Omega$ converge para 0; e assim $\mu_k = 0$, neste caso. Por outro lado, se $a_\varepsilon \ll a_{T_i} \varepsilon$ (o que corresponde a substituir ∞ por 0 em (2.3)), pode-se demonstrar que não existe sequência satisfazendo as hipóteses (i), (ii) e (iii) de (2.1). O tamanho a_ε dado por (2.2) é, portanto, o único para o qual (2.1) é satisfeita com convergência fraca (e não forte) de w_k^ε para e_k , em (iii).

Lema 2.1. Sejam $(w_k^\varepsilon, q_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon)_{1 \leq k \leq n}$ funções que satisfazem as hipóteses (i) a (v) de (2.1). Seja M a matriz definida por suas colunas $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$, e por seus elementos $(\mu_k^i)_{1 \leq i, k \leq n}$ definidos por $\mu_k^i = \mu_k \cdot e_i$. Então para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)_+$ temos:

$$\langle \mu_k^i, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\Omega)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \phi \nabla w_k^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon.$$

Assim, M é uma matriz simétrica e positiva no seguinte sentido:

$$(2.4) \quad \langle M\Phi, \Phi \rangle_{H^{-1}, H_0^{-1}(\Omega)} \geq 0, \text{ para cada } \Phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n.$$

Demonstração: Da hipótese (2.1)_v obtemos:

$$\nu_\varepsilon = w_i^\varepsilon \rightharpoonup \nu = e_i, \quad \text{fraco, em } [H^1(\Omega)]^n$$

Deduz-se então que:

$$(2.5) \quad \langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \varphi_i w_i^\varepsilon \rangle_\Omega \rightarrow \langle \mu_k, \varphi_i e_i \rangle_\Omega, \quad \forall \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mas, integrando-se por partes:

$$\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \varphi_i w_i^\varepsilon \rangle_\Omega = - \int_\Omega q_k^\varepsilon w_i^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_i + \int_\Omega \nabla w_k^\varepsilon \cdot w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i + \int_\Omega \varphi_i \nabla w_k^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon$$

pois $\nabla \cdot w_i^\varepsilon = 0$, em Ω .

Além do mais:

$$\int_\Omega q_k^\varepsilon w_i^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_i \rightarrow 0,$$

pois $q_k^\varepsilon \rightarrow 0$, fraco, em $L^2(\Omega)/\mathbf{R}$, e $w_i^\varepsilon \rightarrow e_i$, forte, em $[L^2(\Omega)]^n$, graças ao teorema de Rellich (inclusão compacta de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$).

Temos também que:

$$\int_\Omega \nabla w_k^\varepsilon \cdot w_i^\varepsilon \nabla \varphi_i \rightarrow 0,$$

pois $\nabla w_k^\varepsilon \rightarrow 0$, fraco, em $[L^2(\Omega)]^{n^2}$, e $w_i^\varepsilon \rightarrow e_i$, forte, em $[L^2(\Omega)]^n$.

Assim resulta que:

$$(2.6) \quad \int_\Omega \varphi_i \nabla w_k^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon \rightarrow \langle \mu_k, \varphi_i e_i \rangle_\Omega$$

De (2.6) deduz-se que a matriz M definida por $Me_k = \mu_k$ é simétrica por ser limite de uma seqüência de matrizes simétricas $(\nabla w_k^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon)_{i \leq k \leq n}$. Por outro lado, tem-se que:

$$\begin{aligned} \langle M\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i,k=1}^n \int_\Omega \varphi_i \varphi_k \nabla w_i^\varepsilon \cdot \nabla w_k^\varepsilon = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k \nabla w_k^\varepsilon \right|^2 \geq 0, \quad \forall \Phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n, \Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n). \end{aligned}$$

Donde M é positiva no seguinte sentido:

$$\langle M\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \geq 0, \quad \forall \Phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n.$$

Além disto, deduz-se de (2.6) que:

$$\mu_k^i = \mu_k \cdot e_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

onde $(\nabla w_k^\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon)$ é uma seqüência limitda de $L^1(\Omega)$. Donde μ_k^i é uma medida de Radon.

1.3. O Resultado de Homogeneização para a Equação Hiperbólica com um Termo de Pressão

O objetivo desta Seção é demonstrar o resultado de homogeneização para a equação hiperbólica com um termo de pressão (Teorema 3.4). A semicontinuidade inferior da energia é também demonstrada (Teorema 3.5).

Considere um domínio limitado Ω de $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) e o domínio Ω_ε (como na Introdução, página 7), obtido removendo-se de Ω um conjunto $T_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_\varepsilon^i$ de "pequenos" buracos para os quais a hipótese (2.1) é satisfeita. Seja $T > 0$ um número real dado. Considere o problema misto para a equação hiperbólica com um termo de pressão:

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, T) \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, & \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, & \text{sobre } \Sigma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times (0, T) \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0, u_\varepsilon'(x, 0) = u_\varepsilon^1, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

onde os dados $u_\varepsilon^0, u_\varepsilon^1, f_\varepsilon$ são supostos satisfazerem:

$$(3.2) \quad u_\varepsilon^0 \in V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n, \quad u_\varepsilon^1 \in V_\varepsilon, \quad f_\varepsilon \in W^{1,1}(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n),$$

onde

$$V_\varepsilon = \{v; v \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n, \operatorname{div} v = 0, \text{ sobre } \Omega_\varepsilon\}, \text{ e}$$

$$H_\varepsilon = \{v; v \in [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n, \operatorname{div} v = 0, \text{ sobre } \Omega_\varepsilon, v \cdot \nu = 0, \text{ sobre } \Gamma_\varepsilon\},$$

sendo ν o vetor unitário normal a Γ_ε dirigido para o exterior de Ω_ε . Os espaços V_ε e H_ε também podem ser descritos da seguinte maneira:

$$H_\varepsilon = \bar{V}_\varepsilon^{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}, \quad \text{e} \quad V_\varepsilon = \bar{V}_\varepsilon^{[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n},$$

onde $\bar{V}_\varepsilon = \{\varphi; \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n, \operatorname{div} \varphi = 0, \text{ em } \Omega_\varepsilon\}$.

Um resultado devido a Lions (ver p.ex. [23]) garante a existência e a unicidade de solução fraca $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t)$ da equação (3.1) homogênea que satisfaz:

$$(3.3) \quad u_\varepsilon \in C^0([0, T]; V_\varepsilon) \cap C^1([0, T]; H_\varepsilon).$$

Além disto, definindo para qualquer $t \in [0, T]$ a energia $E_\varepsilon(\cdot)$ por:

$$(3.4) \quad E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \|u'_\varepsilon(t)\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{n^2}}^2$$

tem-se a seguinte identidade da energia

$$(3.5) \quad E_\varepsilon(t) = E_\varepsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x, s) \cdot u'_\varepsilon(x, s) \, ds,$$

q.s. em $[0, T]$.

Teorema 3.1. Suponha que

$$u_\varepsilon^0 \in V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n, \quad u_\varepsilon^1 \in V_\varepsilon, \quad f_\varepsilon \in W^{1,1}(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n).$$

Então, existe uma única função u_ε satisfazendo:

$$(3.6) \quad u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon)$$

$$(3.7) \quad u'_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon)$$

$$(3.8) \quad u''_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_\varepsilon)$$

$$(3.9) \quad \begin{cases} u''_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } L^1(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0, \quad u'_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^1, & \text{em } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

Demonstração: Procederemos a demonstração em seis etapas.

Etapa i: Estimativas a priori.

Considere o espaço $\tilde{V}_\varepsilon = V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n$. $\tilde{V}_\varepsilon$ é um subespaço separável de V_ε , portanto existe $(w_\nu^\varepsilon)_{\nu \in \mathbb{N}}$, base de $\tilde{V}_\varepsilon$, livre e total em $\tilde{V}_\varepsilon$. Considere agora o subespaço m -dimensional denotado por $\tilde{V}_{\varepsilon m} = [w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, \dots, w_m^\varepsilon]$, gerado pelos m - primeiros vetores w_ν^ε , $\nu = 1, 2, \dots, m$. Então propomos o seguinte problema aproximado:

$$(3.10) \quad \begin{cases} (u_{\varepsilon m}''(t), v) + a(u_{\varepsilon m}(t), v) = (f_\varepsilon(t), v), & \forall v \in \tilde{V}_{\varepsilon m} \\ u_{\varepsilon m}(0) = u_{\varepsilon m}^0 \rightarrow u_\varepsilon^0, & \text{forte, em } V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n \\ u_{\varepsilon m}'(0) = u_{\varepsilon m}^1 \rightarrow u_\varepsilon^1, & \text{forte, em } V_\varepsilon \end{cases}$$

onde $a(u, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$.

Estimativa 1:

Fazendo $v = u_{\varepsilon m}'(t) \in \tilde{V}_{\varepsilon m}$, resulta que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |u_{\varepsilon m}'(t)|^2 + a(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t)) \} = (f_\varepsilon(t), u_{\varepsilon m}'(t)), \quad 0 < t < T.$$

Integrando de 0 a t , $0 < t < T$, obtemos:

$$\begin{aligned} |u_{\varepsilon m}'|^2 + |u_{\varepsilon m}|^2 &= |u_{\varepsilon m}^1|^2 + |u_{\varepsilon m}^0|^2 + 2 \int_0^t (f_\varepsilon(s), u_{\varepsilon m}'(s)) \, ds \leq \\ &\leq c + \int_0^T |f_\varepsilon(s)| \, ds + \int_0^t |f_\varepsilon(t)| |u_{\varepsilon m}'(s)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{[H_0^1(\Omega)]^n}$ e $|\cdot| = |\cdot|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}$.

Do Lema de Gronwall, segue-se que:

$$\begin{cases} u_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V_\varepsilon), \text{ independentemente de } m, \text{ e} \\ u_{\varepsilon m}' \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_\varepsilon), \text{ independentemente de } m. \end{cases}$$

Portanto, existe subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que:

$$(3.11) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon m} \xrightarrow{*} u_\varepsilon, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V_\varepsilon) \\ u_{\varepsilon m}' \xrightarrow{*} u_\varepsilon', & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_\varepsilon) \end{cases}$$

Estimativa 2:

Fazendo $t = 0$, na equação aproximada (3.10) obtemos:

$$(3.12) \quad (u''_{\varepsilon m}(0), v) + ((u_{\varepsilon m}(0), v)) = (f_{\varepsilon}(0), v), \quad \forall v \in \tilde{V}_{\varepsilon m}.$$

Visto que $f_{\varepsilon} \in W^{1,1}(0, T; [L^2(\Omega_{\varepsilon})]^n)$, $f_{\varepsilon} \in C^0([0, T]; [L^2(\Omega_{\varepsilon})]^n)$ e portanto faz sentido calcular $f_{\varepsilon}(0)$, e $f_{\varepsilon}(0) \in [L^2(\Omega_{\varepsilon})]^n$.

Tomando-se $v = u''_{\varepsilon m}(0)$ em (3.12), resulta que:

$$|u''_{\varepsilon m}(0)|^2 = (\Delta u_{\varepsilon m}^0, u''_{\varepsilon m}(0)) + (f_{\varepsilon}(0), u''_{\varepsilon m}(0)).$$

Logo,

$$(3.13) \quad |u''_{\varepsilon m}(0)| \leq |\Delta u_{\varepsilon m}^0| + |f_{\varepsilon}(0)| < c$$

independentemente de m .

Agora, derivando em t , a equação aproximada (3.10), obtemos:

$$(3.14) \quad (u'''_{\varepsilon m}(t), v) + ((u'_{\varepsilon m}(t), v)) = (f'_{\varepsilon}(t), v), \quad \forall v \in \tilde{V}_{\varepsilon m}.$$

Tomando-se $v = u''_{\varepsilon m}(t)$, em (3.14), resulta que:

$$(3.15) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u''_{\varepsilon m}(t)|^2 + \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2) = (f'_{\varepsilon}(t), u''_{\varepsilon m}(t)).$$

Integrando-se (3.15) de 0 a t , obtemos:

$$\begin{aligned} |u''_{\varepsilon m}(t)|^2 + \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 &\leq |u''_{\varepsilon m}(0)|^2 + \|u_{\varepsilon m}^1\|^2 + \int_0^t |f'_{\varepsilon}(s)| ds + \\ &\quad + \int_0^t |f'_{\varepsilon}(s)| |u''_{\varepsilon m}(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Do Lema de Gronwall, de (3.13) e (3.10)₃, resulta que:

$$|u''_{\varepsilon m}(t)|^2 + \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq c,$$

independentemente de m .

Portanto, $u'_{\varepsilon m}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V_\varepsilon)$, e $u''_{\varepsilon m}$ é limitada em $L^\infty(0, T; H_\varepsilon)$, independentemente de m .

Logo, existe subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que:

$$(3.16) \quad \begin{cases} u'_{\varepsilon m} \xrightarrow{*} u'_\varepsilon, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V_\varepsilon), \text{ e} \\ u''_{\varepsilon m} \xrightarrow{*} u''_\varepsilon, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_\varepsilon) \end{cases}$$

Etapas ii: Passagem ao limite.

A Estimativa 1 já era suficiente para a passagem ao limite, assim, fixando-se m_0 , considerando-se $m > m_0$, multiplicando-se a equação aproximada (3.10) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, e integrando-se de 0 a T , obtém-se:

$$(3.17) \quad \int_0^T (u''_{\varepsilon m}(t), v) \theta(t) dt + \int_0^T a(u_{\varepsilon m}(t), v) \theta(t) dt = \int_0^T (f_\varepsilon(t), v) \theta(t) dt$$

para todo $v \in \tilde{V}_{\varepsilon m}$.

Integrando-se por partes a primeira integral, obtém-se:

$$(3.18) \quad - \int_0^T (u'_{\varepsilon m}(t), v) \theta'(t) dt + \int_0^T a(u_{\varepsilon m}(t), v) \theta(t) dt = \int_0^T (f_\varepsilon(t), v) \theta(t) dt$$

Tomando-se o limite quando m tende para o infinito, observando-se (3.11), conclui-se que:

$$(3.19) \quad - \int_0^T (u'_\varepsilon(t), v) \theta'(t) dt + \int_0^T a(u_\varepsilon(t), v) \theta(t) dt = \int_0^T (f_\varepsilon(t), v) \theta(t) dt$$

para todo $v \in \tilde{V}_{\varepsilon m_0}$.

Sendo os $\tilde{V}_{\varepsilon m_0}$ densos em V_ε , conclui-se que (3.19) é válida para toda $v \in V_\varepsilon$, e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$.

Ainda de (3.19), temos

$$(3.20) \quad - \int_0^T (u'_\varepsilon(t), v) \theta'(t) dt + \int_0^T \langle -\Delta u_\varepsilon(t), v \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \theta(t) dt = \int_0^T (f_\varepsilon(t), v) \theta(t) dt,$$

para toda $v \in V_\varepsilon$, e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$. Então, definindo-se $g_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) + \Delta u_\varepsilon(t) \in V'_\varepsilon$, de (3.20), obtemos:

$$(3.21) \quad - \int_0^T u'_\varepsilon(t) \theta'(t) dt = \int_0^T g_\varepsilon(t) \theta(t) dt, \quad \text{em } V'_\varepsilon.$$

Visto que $u_\varepsilon \in W^{1,\infty}(0, T; V_\varepsilon)$ e $f_\varepsilon \in L^1(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$, segue-se que u'_ε e $g_\varepsilon \in L^1(0, T; V'_\varepsilon)$ e satisfazem (3.21). Então, pelo Lema 1.1 de Temam, [39], resulta que:

$$(3.22) \quad u'_\varepsilon(t) = \zeta + \int_0^t g_\varepsilon(s) ds, \quad \zeta \in V'_\varepsilon, \text{ constante, } t \in [0, T].$$

Portanto,

$$(3.23) \quad u'_\varepsilon \in C^0([0, T]; V'_\varepsilon).$$

Ainda de (3.22), obtemos que:

$$(3.24) \quad \langle u''_\varepsilon, \theta \rangle = \langle g_\varepsilon, \theta \rangle, \quad \text{para todo } \theta \in \mathcal{D}(0, T),$$

o que implica em que $u''_\varepsilon \in L^1(0, T; V'_\varepsilon)$ e $u''_\varepsilon = g_\varepsilon$, em $L^1(0, T; V'_\varepsilon)$, i.e.,

$$(3.25) \quad u''_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } L^1(0, T; V'_\varepsilon).$$

Etapa iii: Introdução da pressão.

De (3.19) temos que:

$$(3.26) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v \right) + a(u_\varepsilon, v) = (f_\varepsilon, v), \quad \forall v \in V_\varepsilon, \text{ q.s. em } [0, T].$$

Definamos agora:

$$U_\varepsilon(t) = \int_0^t u_\varepsilon(s) ds, \quad F_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(s) ds.$$

Assim, $U_\varepsilon \in C^0([0, T]; V_\varepsilon)$ e $F_\varepsilon \in C^0([0, T]; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$. Integrando (3.26) de 0 a t , obtemos que:

$$\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t) - u_\varepsilon^1, v \right) + ((U_\varepsilon(t), v)) = (F_\varepsilon(t), v), \quad \forall v \in V_\varepsilon, \forall t \in [0, T].$$

Daí, segue-se que:

$$\left\langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t) - u_\varepsilon^1 - \Delta U_\varepsilon(t) - F_\varepsilon(t), v \right\rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} = 0, \quad \forall v \in V_\varepsilon, \forall t \in [0, T].$$

Pela Proposição I.1.1, Temam [39, p.14], para cada $t \in [0, T]$, existe $G_\varepsilon(t) \in \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon)$ tal que:

$$(3.27) \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - u_\varepsilon^1 - \Delta U_\varepsilon(t) - F_\varepsilon(t) = \text{grad } G_\varepsilon(t).$$

Pela Proposição I.1.2-ii, Temam [39], $G_\varepsilon(t) \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ pois $D_i G_\varepsilon(t) \in H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Assim,

$$\text{grad } G_\varepsilon \in C^0([0, T]; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)$$

e portanto

$$G_\varepsilon \in C^0([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)).$$

Isto nos possibilita diferenciar (3.27), na variável t , no sentido das distribuições em Q_ε . Colocando-se $p_\varepsilon = -\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial t}$, resulta que:

$$(3.28) \quad u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; [\mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon)]^n).$$

Pela regularidade dos termos que aparecem em (3.28), obtemos que:

$$(3.29) \quad u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } L^1(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n).$$

Etapa iv: Verificação das condições iniciais.

Pelo Corolário A.1.2, e (3.11), temos que:

$$\langle \theta, u_{\varepsilon m}(t) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \rightarrow \langle \theta, u_\varepsilon(t) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$, e para qualquer $t \in [0, T]$.

Em particular, para $t = 0$,

$$\langle \theta, u_{\varepsilon m}(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \rightarrow \langle \theta, u_\varepsilon(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$.

Mas, de (3.10)₂,

$$u_{\varepsilon m}(0) \rightharpoonup u_\varepsilon^0, \text{ fraco, em } V_\varepsilon,$$

isto é,

$$\langle \theta, u_{\varepsilon m}(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \rightarrow \langle \theta, u_\varepsilon^0 \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$.

Da unicidade do limite segue que $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0$. Ainda pelo Corolário A.1.2, e (3.16), temos que:

$$\langle \theta, u'_{\varepsilon m}(t) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \rightarrow \langle \theta, u'_\varepsilon(t) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$, e para qualquer $t \in [0, T]$. Em particular, para $t = 0$

$$\langle \theta, u'_{\varepsilon m}(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \rightarrow \langle \theta, u'_\varepsilon(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$.

Mas de (3.10)₃,

$$u'_{\varepsilon m}(0) \rightharpoonup u_\varepsilon^1, \text{ fraco, em } V_\varepsilon,$$

isto é,

$$\langle \theta, u'_{\varepsilon m}(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \rightarrow \langle \theta, u_\varepsilon^1 \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$.

Da unicidade do limite segue que $u'_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^1$.

Etapa v: Unicidade.

Para provarmos a unicidade, consideremos $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ e $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon)$ duas soluções dadas pelo Teorema 3.1. Então o par $(w_\varepsilon, q_\varepsilon) = (u_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon, p_\varepsilon - \hat{p}_\varepsilon)$ é uma solução de:

$$(3.30) \quad \begin{cases} w''_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon + \nabla q_\varepsilon = 0, & \text{em } L^1(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \\ \operatorname{div} w_\varepsilon = 0, & \text{em } Q_\varepsilon \\ w_\varepsilon = 0, & \text{sobre } \Sigma_\varepsilon \\ w_\varepsilon(0) = w'_\varepsilon(0) = 0 \end{cases}$$

Temos que $w'_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon) \hookrightarrow L^\infty(0, T; [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$, portanto faz sentido compor (3.30)₁ com w'_ε , e assim:

$$\int_0^t \langle w''_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon + \nabla q_\varepsilon, w'_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon} ds = 0, \quad \text{com } 0 < t < T.$$

Do que resulta:

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} |w'_\varepsilon(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|w_\varepsilon(s)\|^2 ds - \int_0^t (q_\varepsilon, \operatorname{div} w'_\varepsilon) ds = 0.$$

Dai obtemos que:

$$|w'_\varepsilon(t)|^2 + \|w_\varepsilon(t)\|^2 = 0,$$

provando que $w_\varepsilon = 0$, em $[0, T]$. Resulta também que p_ε é única a menos de uma adição de uma função de t .

Etapa vi: Final da demonstração.

Demonstramos que, pela extração de uma subsequência ainda denotada por $(u_{\varepsilon m})$, a subsequência $(u_{\varepsilon m})$ satisfaz (3.11)₁ e (3.16), ou seja:

$$u_{\varepsilon m} \xrightarrow{*} u_\varepsilon, \quad \text{fraco-estrela, em } W^{1,\infty}(0, T; V_\varepsilon),$$

e o limite u_ε satisfaz (3.9).

A unicidade da solução de (3.6)–(3.9), permite-nos deduzir que toda a sequência $(u_{\varepsilon m})$ satisfaz (3.11)₁ e (3.16).

Isto completa a demonstração. ■

Teorema 3.2. (Regularidade da solução).

A solução do problema do Teorema 3.1 possui a seguinte regularidade:

$$(3.31) \quad u_\varepsilon \in C^0([0, T]; V_\varepsilon) \cap C^1([0, T]; H_\varepsilon).$$

Para demonstrarmos o Teorema 3.2 necessitaremos do seguinte lema.

Lema 3.3 (Gronwall).

Seja $m \in L^1(0, T; \mathbf{R})$ tal que $m \geq 0$ q.s. em $]0, T[$ e $a \geq 0$ constante real. Suponha que $g \in L^\infty(0, T)$, $g \geq 0$, sobre $]0, T[$, verificando a desigualdade:

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq \sqrt{2} a^2 + 2 \int_0^t m(s)g(s) ds,$$

para todo $t \in]0, T[$. Então:

$$g(t) \leq 2 \left(a + \int_0^t m(s) ds \right), \quad \text{em } [0, T].$$

Demonstração: Ver Brezis [5], Gomes [13] ou Medeiros [28].

Demonstração do Teorema 3.2: Consideremos $f_{\varepsilon m} \in C^1([0, T]; C^0(\overline{\Omega}))$ tal que:

$$(3.32) \quad f_{\varepsilon m} \rightarrow f_{\varepsilon}, \quad \text{forte, em } L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n).$$

Seja agora $(u_{\varepsilon m})_{m \in \mathbf{N}}$ a seqüência de soluções aproximadas que aproxima a solução u_{ε} . Então, se $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$, da equação aproximada (3.10), temos:

$$(3.33) \quad (u''_{\varepsilon m}(t) - u''_{\varepsilon n}(t), v) + ((u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t), v)) = (f_{\varepsilon m}(t) - f_{\varepsilon n}(t), v),$$

para todo $v \in \tilde{V}_{\varepsilon m}$.

Tomando-se $v = u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t)$ em (3.33), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t)|^2 + \|u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)\|^2) = (f_{\varepsilon m}(t) - f_{\varepsilon n}(t), u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t)).$$

Integrando de 0 a t , $0 < t < T$, obtemos:

$$\begin{aligned} & |u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t)|^2 + \|u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)\|^2 = \\ & = |u^1_{\varepsilon m} - u^1_{\varepsilon n}|^2 + \|u^0_{\varepsilon m} - u^0_{\varepsilon n}\|^2 + 2 \int_0^t (f_{\varepsilon m}(s) - f_{\varepsilon n}(s), u'_{\varepsilon m}(s) - u'_{\varepsilon n}(s)) ds. \end{aligned}$$

Dai resulta que:

$$\begin{aligned}
 (3.34) \quad & (|u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t)|^2 + \|u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)\|^2) \leq \\
 & \leq 2(|u_{\varepsilon m}^1 - u_{\varepsilon n}^1|^2 + \|u_{\varepsilon m}^0 - u_{\varepsilon n}^0\|^2) + 2 \int_0^t (f_{\varepsilon m}(s) - f_{\varepsilon n}(s), u'_{\varepsilon m}(s) - u'_{\varepsilon n}(s)) ds \leq \\
 & \leq \sqrt{2} \, 2 \frac{(|u_{\varepsilon m}^1 - u_{\varepsilon n}^1| + \|u_{\varepsilon m}^0 - u_{\varepsilon n}^0\|)^2}{\sqrt{2}} + 4 \int_0^t |f_{\varepsilon m}(s) - f_{\varepsilon n}(s)| |u'_{\varepsilon m}(s) - u'_{\varepsilon n}(s)| ds.
 \end{aligned}$$

Se definirmos:

$$g(t) = |u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t)| + \|u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)\|,$$

$$m(t) = |f_{\varepsilon m}(t) - f_{\varepsilon n}(t)|,$$

obtemos da desigualdade (3.34) que:

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq \sqrt{2}a^2 + 2 \int_0^t m(s)g(s) ds,$$

onde

$$a = \frac{|u_{\varepsilon m}^1 - u_{\varepsilon n}^1| + \|u_{\varepsilon m}^0 - u_{\varepsilon n}^0\|}{\sqrt{2}}$$

Assim, do Lema 3.3, segue que:

$$\begin{aligned}
 (3.35) \quad & |u'_{\varepsilon m} - u'_{\varepsilon n}| + \|u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)\| \leq \\
 & \leq c(|u_{\varepsilon m}^1 - u_{\varepsilon n}^1| + \|u_{\varepsilon m}^0 - u_{\varepsilon n}^0\|) + \int_0^T |f_{\varepsilon m}(t) - f_{\varepsilon n}(t)| dt.
 \end{aligned}$$

Portanto, das convergências (3.10)₂, (3.10)₃ e (3.32), e de (3.34), segue que:

$$\begin{aligned}
 & \max_{0 \leq t \leq T} |u'_{\varepsilon m}(t) - u'_{\varepsilon n}(t)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty \\
 & \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{\varepsilon m}(t) - u_{\varepsilon n}(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Então, $(u_{\varepsilon m})_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0, T]; V_\varepsilon)$, e $(u'_{\varepsilon m})_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0, T]; H_\varepsilon)$.

Isto implica em que:

$$(3.36) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon m} \rightarrow \zeta, & \text{em } C^0([0, T]; V_{\varepsilon}) \\ u'_{\varepsilon m} \rightarrow \xi, & \text{em } C^0([0, T]; H_{\varepsilon}) \end{cases}$$

Logo, de (3.11), concluímos que $\zeta = u_{\varepsilon}$, $\xi = u'_{\varepsilon}$. ■

Após termos obtido a solução da equação hiperbólica com um termo de pressão, no domínio Ω_{ε} , para $\varepsilon > 0$, fixado, vamos agora obter a solução desta equação em todo o domínio Ω . Vamos, para isto, fazer $\varepsilon \rightarrow 0$. Isto é o que chamamos de resultado de homogeneização, que é dado no seguinte teorema.

Teorema 3.4. Suponha que (2.1) seja satisfeita e considere uma sequência de dados satisfazendo:

$$(3.37) \quad \begin{cases} \widetilde{u}_{\varepsilon}^0 \rightharpoonup u^0, & \text{fraco, em } V \cap [H^2(\Omega)]^n \\ \widetilde{u}_{\varepsilon}^1 \rightharpoonup u^1, & \text{fraco, em } V \\ \widetilde{f}_{\varepsilon} \rightharpoonup f, & \text{fraco, em } L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n) \\ \widetilde{f}'_{\varepsilon} \rightharpoonup f', & \text{fraco, em } L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n) \\ \widetilde{f}_{\varepsilon}(0) \rightharpoonup f(0), & \text{fraco, em } [L^2(\Omega)]^n \end{cases}$$

A sequência de soluções u_{ε} do Teorema 3.1 então satisfaz:

$$(3.38) \quad \begin{cases} \widetilde{u}_{\varepsilon} \xrightarrow{*} u, & \text{fraco-estrela, em } W^{1,\infty}(0, T; V), \text{ e} \\ P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}) \rightharpoonup p, & \text{fraco, em } L^1(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R}) \end{cases}$$

onde P_{ε} é o operador, prolongamento da pressão, definido na Proposição A.2.2, do Apêndice, e (u, p) é a única solução do sistema homogeneizado:

$$(3.39) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + Mu + \nabla p = f, & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{em } Q \\ u = 0, & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1, & \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H) \end{cases}$$

Demonstração: Procederemos a demonstração em seis etapas.

Etapa i: Estimativas a priori.

Temos, de (3.11)₁, (3.16), e do Teorema de Banach-Steinhaus, que:

$$(3.40) \quad \begin{cases} \|\widetilde{u_\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} \leq c, & \forall \varepsilon > 0 \\ \|\widetilde{u'_\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u'_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} \leq c, & \forall \varepsilon > 0 \\ \|\widetilde{u''_\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u''_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq c, & \forall \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Assim resulta que:

$$\begin{cases} \widetilde{u_\varepsilon} & \text{é limitada, em } L^\infty(0,T;V), \text{ independentemente de } \varepsilon > 0, \\ \widetilde{u'_\varepsilon} & \text{é limitada, em } L^\infty(0,T;V), \text{ independentemente de } \varepsilon > 0, \\ \widetilde{u''_\varepsilon} & \text{é limitada, em } L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n), \text{ independentemente de } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Logo, existe subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que:

$$(3.41) \quad \begin{cases} \widetilde{u_\varepsilon} \xrightarrow{*} u, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0,T;V), \\ \widetilde{u'_\varepsilon} \xrightarrow{*} u', & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0,T;V), \text{ e} \\ \widetilde{u''_\varepsilon} \xrightarrow{*} u'', & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n) \end{cases}$$

Agora, de (3.29), obtemos que:

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \|\nabla p_\varepsilon\|_{L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)} &\leq c \int_0^T \|u''_\varepsilon(t)\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n} dt + \\ &+ c \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|_{[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n} dt + c \int_0^T c \|f_\varepsilon(t)\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n} dt. \end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$(3.43) \quad \|p_\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R})} \leq c \|\nabla p_\varepsilon\|_{L^1(0,T;[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq c,$$

Fazendo-se uso do Teorema de Dunford (Teorema A.3.1) vamos mostrar que o conjunto $K = \{P_\varepsilon(p_\varepsilon), \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbf{R})$.

Vamos fazê-lo em três etapas:

i) K é limitado em $L^1(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R})$.

Com efeito, do Teorema A.2.2-ii, e de (3.43), temos:

$$\|P_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R})} \leq c \|p_\varepsilon\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R})} \leq c,$$

independentemente de ε .

ii) $t \mapsto |P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))|_{L^2(\Omega)/\mathbf{R}}$ é uniformemente integrável, i.e.,

$$\int_E |P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))|_{L^2(\Omega)/\mathbf{R}} dt \rightarrow 0, \quad \text{quando } \mu(E) \rightarrow 0,$$

uniformemente em K .

Com efeito, do Teorema A.2.2-ii, de (3.42) e (3.43),

$$\begin{aligned} \int_E |P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))|_{L^2(\Omega)/\mathbf{R}} dt &\leq c \int_E |p_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}} dt \leq \\ &\leq c \int_E \|\nabla p_\varepsilon(t)\|_{[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n} dt \leq \\ &\leq c \int_E |u_\varepsilon''(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n} dt + \int_E \|u_\varepsilon(t)\|_{[H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n} dt + c \int_E |f_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n} dt \leq \\ &\leq c\mu(E) + c\mu(E) + c \int_E |\tilde{f}_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega)]^n} dt. \end{aligned}$$

Mas, de (3.37)₃, tem-se que o conjunto $\{\tilde{f}_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$; e portanto as funções $t \mapsto |\tilde{f}_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}$ são uniformemente integráveis sobre $[0, T]$, (ver [12, Teorema 4, p. 104]). Assim temos a afirmação satisfeita.

iii) $\{\int_E P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))dt, \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^2(\Omega)$, $\forall E \subset [0, T]$, mensurável.

Com efeito, novamente do Teorema A.2.2-ii, e de (3.43),

$$\begin{aligned} \left| \int_E P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))dt \right|_{L^2(\Omega)} &\leq \int_E |P_\varepsilon(p_\varepsilon(t))|_{L^2(\Omega)} dt \leq \\ &\leq c \int_E |p_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \leq c \int_0^T |p_\varepsilon(t)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \leq c, \end{aligned}$$

uniformemente em ε . Portanto,

$$\left\{ \int_E P_\varepsilon(p_\varepsilon(t)) dt, \varepsilon > 0 \right\}$$

é relativamente compacto na topologia fraca de $L^2(\Omega)$, $\forall E \subset [0, T]$, mensurável.

Das três afirmações acima obtém-se que $K = \{P_\varepsilon(p_\varepsilon), \varepsilon > 0\}$ é relativamente compacto na topologia fraca de $L^1(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R})$. Logo, existe subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que:

$$(3.44) \quad P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p, \quad \text{fraco, em } L^1(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R}).$$

Etapa ii: Passagem ao limite.

Do Teorema 3.1, temos que:

$$(3.45) \quad \begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } L^1(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, & \text{em } Q_\varepsilon. \end{cases}$$

Compondo a equação (3.45)₁ com $\psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x)$, onde $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e w_k^ε como no quadro abstrato de hipóteses (2.1), obtemos:

$$(3.46) \quad \begin{aligned} & \langle u_\varepsilon'', \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon} + \langle -\Delta u_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon} \\ & + \langle \nabla p_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon} = \langle f_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde $(\cdot, \cdot)_{Q_\varepsilon}$, aqui e daqui em diante, denota a dualidade entre $L^1(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)$ e $L^\infty(0, T; [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$.

Integrando por partes, na variável x , o 2º termo de (3.46), obtemos:

$$(3.47) \quad \begin{aligned} \langle -\Delta u_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} &= \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (\psi w_k^\varepsilon \varphi) dx dt = \\ &= \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi \nabla w_k^\varepsilon \varphi dx dt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$(3.48) \quad \begin{aligned} \langle -\Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} &= \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \nabla (\psi u_\varepsilon \varphi) dx dt = \\ &= \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi \nabla u_\varepsilon \varphi dx dt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Daí resulta que:

$$(3.49) \quad \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi \nabla w_k^\varepsilon \varphi dx dt = \langle -\Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} - \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla \varphi dx dt.$$

Substituindo (3.49), em (3.47), obtemos:

$$(3.50) \quad \begin{aligned} \langle -\Delta u_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} &= \langle -\Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} - \\ &\int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla \varphi dx dt + \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes, na variável x , o 3º termo de (3.46), obtemos:

$$(3.51) \quad \langle \nabla p_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} = - \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx dt,$$

pois $\operatorname{div} w_k^\varepsilon = 0$, em Q_ε .

Substituindo (3.50) e (3.51), em (3.46), obtém-se que:

$$(3.52) \quad \begin{aligned} \langle u_\varepsilon'', \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} &+ \langle -\Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} - \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla \varphi dx dt + \\ &+ \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi \nabla w_k^\varepsilon \nabla \varphi dx dt - \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx dt = \langle f_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Agora multiplicando (3.45)₂ por $\psi q_k^\varepsilon \varphi$ e integrando em Q_ε , obtemos:

$$(3.53) \quad \int_{Q_\varepsilon} \psi q_k^\varepsilon \varphi \nabla \cdot u_\varepsilon dx dt = 0.$$

Integrando por partes, na variável x , obtemos:

$$(3.54) \quad \langle \nabla q_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} + \int_{Q_\varepsilon} \psi q_k^\varepsilon \nabla \varphi \cdot u_\varepsilon dx dt = 0.$$

Somando (3.52) e (3.54) resulta que:

$$\begin{aligned}
 (3.55) \quad & \langle u''_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} + \langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} - \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla \varphi \, dx dt + \\
 & \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \nabla \varphi \, dx dt - \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx dt + \\
 & + \int_{Q_\varepsilon} q_k^\varepsilon \psi u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx dt = \langle f_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Análise dos termos, em (3.55):

1º Termo: Após integrarmos, em t , duas vezes por partes, e aplicando Fubini, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 (3.56) \quad & \langle u''_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} = \int_{Q_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \psi'' w_k^\varepsilon \varphi \, dx dt = \\
 & = \int_{\Omega} w_k^\varepsilon \varphi \cdot \left(\int_0^T \psi' \tilde{u}_\varepsilon \, dt \right) dx.
 \end{aligned}$$

Mas, da hipótese (2.1.iii)₁, e do Teorema de Rellich-Kondrachoff, para uma subseqüência ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos que:

$$(3.57) \quad w_k^\varepsilon \rightarrow e_k, \quad \text{forte, em } [L^2(\Omega)]^n,$$

e de (3.40)₁,

$$\int_0^T \psi'' \tilde{u}_\varepsilon \, dt \rightarrow \int_0^T \psi'' u \, dt, \quad \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n,$$

e ainda para uma subseqüência, temos que:

$$(3.58) \quad \int_0^T \psi'' \tilde{u}_\varepsilon \, dt \rightarrow \int_0^T \psi'' u \, dt, \quad \text{forte, em } [L^2(\Omega)]^n.$$

Assim, de (3.57) e (3.58), obtemos a seguinte convergência em (3.56):

$$(3.59) \quad \langle u''_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} \rightarrow \int_{\Omega} e_k \varphi \cdot \left(\int_0^T \psi'' u \, dt \right) dx.$$

2º Termo: Temos que:

$$(3.60) \quad \langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \psi \rangle_{Q_\varepsilon} = \left\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \left(\int_0^T \psi \tilde{u}_\varepsilon dt \right) \varphi \right\rangle_\Omega.$$

Agora, definindo $\mathcal{U}_\varepsilon(x) = \int_0^T \psi \tilde{u}_\varepsilon dt$, resulta que:

$$(3.61) \quad \begin{cases} \mathcal{U}_\varepsilon(x) \rightharpoonup \int_0^T \psi u dt, & \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n, \text{ e} \\ \mathcal{U}_\varepsilon(x) = 0, & \text{em } T_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_i^\varepsilon \end{cases}$$

Assim, de (3.61) e da hipótese (2.1)_v, obtemos a seguinte convergência em (3.60):

$$(3.62) \quad \langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} \rightarrow \left\langle \mu_k, \left(\int_0^T \psi u dt \right) \varphi \right\rangle_\Omega.$$

3º Termo: Aplicando Fubini, obtemos que:

$$(3.63) \quad \int_{P_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi u \nabla \varphi dx dt = \int_\Omega \nabla w_k^\varepsilon \cdot \left(\int_0^T \psi \tilde{u}_\varepsilon dt \right) \nabla \varphi dx.$$

Da hipótese (2.1)_{iii}, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo segue-se que:

$$\nabla w_k^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{fraco, em } [L^2(\Omega)]^{n^2},$$

e de (3.61)₁, do Teorema de Rellich-Kondrachoff, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos que:

$$(3.64) \quad \mathcal{U}_\varepsilon(x) \rightarrow \int_0^T \psi u dt, \quad \text{forte, em } [L^2(\Omega)]^n.$$

Assim, obtemos a seguinte convergência em (3.63):

$$(3.65) \quad \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi u \nabla \varphi dx dt \rightarrow 0.$$

4º **Termo:** Aplicando Fubini, obtemos que:

$$(3.66) \quad \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \nabla \varphi \, dx dt = \int_{\Omega} w_k^\varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \left(\int_0^T \psi \tilde{u}_\varepsilon \, dt \right) dx.$$

De (3.61)₁, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos:

$$(3.67) \quad \nabla \left(\int_0^T \psi \tilde{u}_\varepsilon \, dt \right) \rightharpoonup \nabla \left(\int_0^T \psi u \, dt \right), \text{ fraco, em } [L^2(\Omega)]^{n^2}.$$

Assim, de (3.46) e (3.67), obtemos a seguinte convergência em (3.66):

$$(3.68) \quad \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \nabla \varphi \, dx dt \rightarrow \int_{\Omega} e_k \nabla \varphi \cdot \nabla \left(\int_0^T \psi u \, dt \right) dx.$$

5º **Termo:** Aplicando Fubini, obtemos que:

$$(3.69) \quad \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx dt = \int_{\Omega} w_k^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \left(\int_0^T \psi Q_\varepsilon(p_\varepsilon) dt \right) dx,$$

pois, $Q_\varepsilon(p_\varepsilon(t)) \equiv p_\varepsilon(t)$, em Ω_ε , q.s. em $[0, T]$, e $w_k^\varepsilon = 0$, em $\Omega - \Omega_\varepsilon$.

Mas, de (3.37)₂, segue-se que:

$$(3.70) \quad \int_0^T \psi Q_\varepsilon(p_\varepsilon) dt \rightharpoonup \int_0^T \psi p \, dt, \text{ fraco, em } L^2(\Omega).$$

Assim, de (3.57) e (3.70), obtemos a seguinte convergência, em (3.69):

$$(3.71) \quad \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx dt \rightarrow \int_{\Omega} e_k \cdot \nabla \varphi \left(\int_0^T \psi p \, dt \right) dx,$$

6º **Termo:** Aplicando Fubini, obtemos que:

$$(3.72) \quad \int_{Q_\varepsilon} q_k^\varepsilon \psi u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx dt = \int_{\Omega} q_k^\varepsilon \nabla \varphi \cdot \left(\int_0^T \psi \tilde{u}_\varepsilon \, dt \right) dx.$$

Mas, da hipótese (2.1.iii)₁, e de (3.64), obtemos a seguinte convergência, em (3.72):

$$(3.73) \quad \int_{Q_\varepsilon} q_k^\varepsilon \psi u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx dt \rightarrow 0.$$

7º **Termo:** Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos que:

$$(3.74) \quad \int_{Q_\varepsilon} f_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \varphi \, dx dt = \int_{\Omega} w_k^\varepsilon \varphi \cdot \left(\int_0^T \psi \tilde{f}_\varepsilon dt \right) dx,$$

e da hipótese (3.63)₃, resulta que:

$$(3.75) \quad \int_0^T \psi \tilde{f}_\varepsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi f dt, \quad \text{fraco, em } [L^2(\Omega)]^n.$$

Assim, de (3.57) e (3.75), obtemos a seguinte convergência, em (3.74):

$$(3.76) \quad \int_{Q_\varepsilon} f_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \varphi \, dx dt \rightarrow \int_{\Omega} e_k \varphi \cdot \left(\int_0^T \psi f dt \right) dx.$$

Agora, passando ao limite da equação (3.55), fazendo $\varphi = \varphi_k$, somando em k e considerando $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$, combinando (3.59), (3.62), (3.65), (3.68)

(3.71), (3.73), (3.76), e aplicando Fubini, obtemos:

$$(3.77) \quad \begin{aligned} & \left\langle \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\Omega} u \cdot \Phi \, dx \right), \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} + \langle \langle M\Phi, u \rangle_{\Omega}, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} + \\ & + \left\langle \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \Phi \, dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} + \langle \langle \nabla p, \Phi \rangle_{\Omega}, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} = \\ & = \left\langle \int_{\Omega} f \cdot \Phi \, dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0,T)} \end{aligned}$$

Visto que M é simétrica, resulta que:

$$(3.78) \quad \begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} (u, \Phi) + (Mu, \Phi)_{\Omega} + ((u, \Phi)) + \langle \nabla p, \Phi \rangle_{\Omega} = (f, \Phi), \\ & \text{em } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall \Phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, segue-se que (3.78) é válida para todo $v \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

Etapa iii: Verificação das condições iniciais.

Pelo Corolário A.1.2, e de (3.40)₁ e (3.40)₂, temos que:

$$\langle \theta, \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_{V',V} \rightarrow \langle \theta, u(t) \rangle_{V',V},$$

para qualquer $\theta \in V'$, e para qualquer $t \in [0, T]$. Em particular, para $t = 0$,

$$\langle \theta, \tilde{u}_\varepsilon(0) \rangle_{V',V} \rightarrow \langle \theta, u(0) \rangle_{V',V},$$

para qualquer $\theta \in V'$.

Mas, de (3.36)₁,

$$\tilde{u}_\varepsilon(0) \rightharpoonup u^0, \quad \text{fraco, em } V,$$

isto é,

$$\langle \theta, \tilde{u}_\varepsilon(0) \rangle_{V',V} \rightarrow \langle \theta, u^0 \rangle_{V',V},$$

para qualquer $\theta \in V'$.

Da unicidade do limite segue-se que $u(0) = u^0$. Ainda pelo Corolário A.1.2, e de (3.16), temos que:

$$u'_{\varepsilon m}(t) \rightharpoonup u'_\varepsilon(t), \quad \text{fraco, em } V_\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

Assim, do Teorema de Banach-Steinhaus, obtemos que:

$$\|\widetilde{u'_\varepsilon}(t)\|_V = \|u'_\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon} \leq \liminf_{m \rightarrow 0} \|u'_{\varepsilon m}(t)\|_{V_\varepsilon} \leq c,$$

$\forall t \in [0, T]$, independentemente de ε .

Portanto, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, resulta que:

$$\widetilde{u'_\varepsilon}(t) \rightharpoonup u'(t), \quad \text{fraco, em } V, \quad \forall t \in [0, T].$$

isto é,

$$\langle \theta, \widetilde{u'_\varepsilon}(t) \rangle_{V',V} \rightarrow \langle \theta, u'(t) \rangle_{V',V},$$

para qualquer $\theta \in V'$, e para qualquer $t \in [0, T]$. Em particular, para $t = 0$,

$$\langle \theta, \widetilde{u'_\varepsilon}(0) \rangle_{V', V} \rightarrow \langle \theta, u'(0) \rangle_{V', V},$$

para qualquer $\theta \in V'$.

Mas, de (3.36)₂,

$$\widetilde{u'_\varepsilon}(0) \rightharpoonup u^1, \quad \text{fraco, em } V,$$

isto é,

$$\langle \theta, \widetilde{u'_\varepsilon}(0) \rangle_{V', V} \rightarrow \langle \theta, u^1 \rangle_{V', V},$$

para qualquer $\theta \in V'$.

Da unicidade do limite, segue-se que $u'(0) = u^1$.

Etapa iv: Unicidade.

Para provarmos a unicidade, consideremos (u_1, p_1) e (u_2, p_2) duas soluções dadas pelo Teorema 3.4. Então o par, $(w, q) = (u_1 - u_2, p_1 - p_2)$, é uma solução de:

$$(3.79) \quad \begin{cases} w'' - \Delta w + Mw + \nabla q = 0, & \text{em } L^1(0, T; [H^{-1}(\Omega)]^n) \\ \operatorname{div} w = 0, & \text{sobre } Q \\ w = 0, & \text{sobre } \Sigma \\ w(0) = w'(0) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Temos que $w' \in L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L^\infty(0, T; [H_0^1(\Omega)]^n)$, portanto faz sentido compor (3.79)₁ com w' , e assim:

$$(3.80) \quad \int_0^t \langle w'' - \Delta w + Mw + \nabla q, w' \rangle_\Omega ds = 0, \quad \text{com } 0 < t < T.$$

Do que resulta:

$$(3.81) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} |w'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|w(s)\|^2 ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \langle Mw(s), w(s) \rangle_\Omega ds - \int_0^t \langle q(s), \operatorname{div} w'(s) \rangle ds = 0. \end{aligned}$$

Visto que $\operatorname{div} w' = 0$ em Q , de (3.81), resulta que:

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + \langle Mw(t), w(t) \rangle_\Omega = 0,$$

provando que $w = 0$, em $[0, T]$, uma vez que $\langle Mw(t), w(t) \rangle_\Omega \geq 0$. Daí resulta que p é única a menos de uma adição de uma função de t .

Etapa v: Regularidade da solução.

De (3.36), obtemos que $\tilde{U}_\varepsilon \in C^0([0, T]; V)$ e $\tilde{u}'_\varepsilon \in C^0([0, T]; H)$. Assim, das convergências (3.41)₁ e (3.42)₂, segue-se que:

$$u \in C^0([0, T]; V) \quad \text{e} \quad u' \in C^0([0, T]; H).$$

Etapa vi: Final da demonstração.

Demonstramos que, pela extração de uma subsequência (ainda denotada por ε), a subsequência $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ satisfaz (3.38), com o limite (u, p) satisfazendo (3.39).

A unicidade da solução de (3.39) permite-nos deduzir que a sequência inteira satisfaz (3.38).

Isto completa a demonstração. ■

Temos o seguinte resultado de convergência pontual (no tempo) e propriedade de semicontinuidade inferior da energia.

Teorema 3.5. Suponha que as hipóteses do Teorema 3.4 sejam satisfeitas. Então, para qualquer $t \in [0, T]$, fixado, temos:

$$(3.82) \quad \tilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \quad \text{fraco, em } V$$

$$(3.83) \quad \tilde{u}'_\varepsilon(t) \rightharpoonup u'(t), \quad \text{fraco, em } H$$

$$(3.84) \quad \int_\Omega |\nabla u(x, t)|^2 dx + \langle Mu(x, t), u(x, t) \rangle_\Omega \leq \\ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2 dx$$

$$(3.85) \quad \int_\Omega |u'(x, t)|^2 dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |u'_\varepsilon(x, t)|^2 dx$$

$$(3.86) \quad E(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(t),$$

onde a energia $E_\varepsilon(\cdot)$, para qualquer $t \in [0, T]$, é definida por:

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} |u'_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 + \frac{1}{2} |\nabla u_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{n^2}}^2$$

e

$$E(t) = \frac{1}{2} |u'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \frac{1}{2} |\nabla u(t)|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}}^2 + \frac{1}{2} \langle Mu(t), u(t) \rangle_\Omega$$

Demonstração: Temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{*} u, \quad \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V) \\ \widetilde{u'_\varepsilon} \xrightarrow{*} u', \quad \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L^1(0, T; H) \end{array} \right.$$

Portanto, pela Proposição A.1.1, resulta que:

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \quad \text{fraco, em } V, \quad \forall t \in [0, T],$$

o que nos dá (3.82).

De (3.16), e pelo Corolário A.1.2, resulta que:

$$u'_{\varepsilon m}(t) \rightharpoonup u'_\varepsilon(t), \quad \text{fraco, em } V_\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

Dai, pela convexidade e semicontinuidade inferior da norma, segue-se que:

$$\|\widetilde{u'_\varepsilon}(t)\|_V = \|u'_\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u'_{\varepsilon m}(t)\|_{V_\varepsilon} \leq c,$$

independentemente de ε , $\forall t \in [0, T]$.

Assim, para uma subsucessão ainda denotada pelo mesmo símbolo, obtemos que:

$$\widetilde{u'_\varepsilon}(t) \rightharpoonup u'(t), \quad \text{fraco, em } V, \quad \forall t \in [0, T],$$

o que nos dá (3.83), uma vez que $V \hookrightarrow H$.

Para a obtenção de (3.84) observamos que:

$$(3.87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) \in V \\ \tilde{u}_\varepsilon(x, t) = 0, \quad \text{sobre } T_\varepsilon, \text{ e} \\ \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) \rightharpoonup u(\cdot, t), \quad \text{fraco, em } V, \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Logo, pelo Teorema A.2.1, segue a desigualdade (3.84).

Agora, para a obtenção de (3.85), observamos que, de (3.83), resulta imediatamente

$$|u'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |u'_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega)]^n},$$

daí,

$$|u'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \leq [\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |u'_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}]^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |u'_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2,$$

que nos dá (3.85).

Agora, somando as desigualdades (3.84) e (3.85) obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \langle Mu(x, t), u(x, t) \rangle_{\Omega} \leq \\ & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |u'_\varepsilon(x, t)|^2 dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2 dx \leq \\ & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u'_\varepsilon(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2 dx \right), \end{aligned}$$

assim obtemos que:

$$E(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(t)$$

que nos dá (3.86).

1.4 Enfraquecimento da Hipótese (2.1)_{iv}

Nesta seção vamos mostrar que a hipótese (2.1)_{iv}, a saber:

$$(2.1)_{iv} \quad \mu_k \in [W^{-1, \infty}(\Omega)]^n, \quad 1 \leq k \leq N,$$

não é necessária para demonstrar os resultados que foram enunciados. Mais precisamente, substituiremos (2.1)_{iv} por (2.1)_{iv}' :

$$(2.1)_{iv}' \quad \mu_k \in [H^{-1}(\Omega)]^n, \quad 1 \leq k \leq N.$$

É fácil ver que a hipótese (2.1)_{iv}' é suficiente para fazer sentido à hipótese (2.1)_v.

Agora apresentamos um lema de 1950, devido a J. Deny, que é fundamental para o que pretendemos.

Lema 4.1. Seja Ω um aberto qualquer do $\mathbf{R}^n$, e μ uma medida positiva de Radon tal que $\mu \in H^{-1}(\Omega)$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então tem-se que $u \in L^1(\Omega, d\mu)$, e:

$$\langle \mu, u \rangle_\Omega = \int_\Omega u d\mu.$$

Demonstração: (cf. H. Brezis e F.E. Browder [6, Th. 9, p. 256]).

Definição. Uma medida de Radon é positiva no seguinte sentido:

$$\forall \varphi \in C_c(\Omega), \text{ com } \varphi \geq 0, \quad \int_\Omega \varphi d\mu \geq 0,$$

onde $C_c(\Omega)$ é o conjunto das funções contínuas com suporte compacto em Ω .

A próxima proposição permite fazer sentido $\langle M, uv \rangle_\Omega$, quando $M \in [H^{-1}(\Omega)]^n$, e $u, v \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Isto nos possibilitará obter resultados similares aos da Seção 3.

Proposição 4.2. Suponha que as hipóteses em (2.1) sejam satisfeitas apenas substituindo-se $(2.1)_{iv}$ por $(2.1)'_{iv}$. Seja uma sequência $z_\varepsilon \in [H_0^1(\Omega)]^n$ tal que:

$$\begin{cases} z_\varepsilon \rightharpoonup z, & \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n \\ \nabla \cdot z_\varepsilon \rightarrow \nabla \cdot z, & \text{forte, em } L^2(\Omega) \\ z_\varepsilon = 0, & \text{sobre os buracos } (T_i^\varepsilon)_{i=1}^{N(\varepsilon)} \end{cases}$$

então tem-se que:

$$(4.2) \quad \int_\Omega |\nabla z|^2 + \int_\Omega \sum_{1 \leq i, j \leq n} z_i z_j d\mu_j^i \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\nabla z_\varepsilon|^2,$$

$$(4.3) \quad 0 < \int_\Omega \sum_{1 \leq i, j \leq n} z_i z_j d\mu_j^i < +\infty,$$

ou seja, $z \in L^2(\Omega; dM)$, onde

$$L^2(\Omega; dM) = \left\{ z \in [L^2(\Omega)]^n; \left| \int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} z_i z_j d\mu_j^i \right| < +\infty \right\}.$$

Demonstração: (cf. G. Allaire [1, Lema I.6.2, p. 68]).

Teorema 4.3. Suponha que as hipóteses do Teorema 3.4 sejam satisfeitas, apenas substituindo-se $(2.1)_{iv}$ por $(2.1)'_{iv}$.

Então, a sequência de soluções u_ε do problema do Teorema 3.1 satisfaz:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{*} u, & \text{fraco-estrela, em } W^{1,\infty}(0, T; V), \text{ e} \\ P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p, & \text{fraco, em } L^1(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R}) \end{cases}$$

onde P_ε é o operador, prolongamento da pressão, definido na Proposição A.2.2, e o par (u, p) é uma solução do sistema homogeneizado:

$$(4.5) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u + Mu + \nabla p = f, & \text{em } \mathcal{D}'(0, T; [\mathcal{D}'(\Omega)]^n) \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, & \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; H) \end{cases}$$

Demonstração: Praticamente é a mesma do Teorema 3.4.

Temos também o seguinte resultado de convergência pontual no tempo, e propriedade de semicontinuidade da energia.

Teorema 4.4. Suponha que as hipóteses Teorema do 4.3 sejam satisfeitas. Então, para qualquer $t \in [0, T]$, fixado, temos:

$$(4.6) \quad \tilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \quad \text{fraco, em } V$$

$$(4.7) \quad \widetilde{u'_\varepsilon}(t) \rightharpoonup u'(t), \quad \text{fraco, em } H.$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i(x, t) u_j(x, t) d\mu_j^i &\leq \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

$$(4.9) \quad \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |u'_\varepsilon(x, t)|^2 dx$$

$$(4.10) \quad E(t) \leq \liminf E_\varepsilon(t),$$

onde a energia $E_\varepsilon(\cdot)$, para qualquer $t \in [0, T]$, é definida por:

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} |u'_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 + \frac{1}{2} |\nabla u_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{n^2}}^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2} |u'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \frac{1}{2} |\nabla u(t)|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}}^2 + \int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i(x, t) u_j(x, t) d\mu_j^i$$

Demonstração: É análoga à demonstração do Teorema 3.5, apenas sendo diferente no que diz respeito a (4.8). Assim, para a obtenção de (4.8), observamos que:

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) \in V \\ \tilde{u}_\varepsilon(x, t) = 0, \quad \text{sobre os buracos} \quad (T_i^\varepsilon)_{i=1}^{N(\varepsilon)} \\ \tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t), \quad \text{fraco, em } V, \quad \forall t \in [0, T] \end{array} \right.$$

Logo, da Proposição 4.2, segue-se a desigualdade (4.8). ■

CAPÍTULO II

Resultados de Correção

Este Capítulo é dedicado ao estabelecimento e demonstração do resultado de correção, para isto algumas hipóteses especiais são feitas sobre o dado inicial u_ε^0 . A demonstração segue ao longo das linhas de S. Brahim-Otsmane, G.A. Francfort e F. Murat [7], e de D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat e E. Zuazua [9], que adaptaram para a equação da onda as idéias introduzidas por Luc Tartar [38] no caso elíptico.

Hipóteses

Com relação ao dado inicial u_ε^0 admitiremos que:

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u_\varepsilon^0, p_\varepsilon^0) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}] \\ \exists f^0 \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ tal que:} \\ \nabla p_\varepsilon^0 - \Delta u_\varepsilon^0 = f^0, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ \nabla \cdot u_\varepsilon^0 = 0, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \end{array} \right.$$

Como uma consequência do Teorema A.2.3 deduzimos que:

$$(1.2) \quad (\widetilde{u_\varepsilon^0}, P_\varepsilon(p_\varepsilon^0)) \rightharpoonup (u^0, p^0), \quad \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)/\mathbf{R}]$$

onde $u^0 = u^0(x)$ e $p^0 = p^0(x)$ é a solução de:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla p^0 - \Delta u^0 + Mu^0 = f^0, \quad \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot u^0 = 0, \quad \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad |\nabla \widetilde{u_\varepsilon^0}|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}}^2 \rightarrow |\nabla u^0|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}}^2 + \langle Mu, u \rangle_\Omega.$$

Uma das principais etapas da demonstração do resultado de correção é a convergência da energia em $C^0([0, T])$, assim que antes de enunciarmos tal resultado passamos a demonstração da convergência da energia.

Proposição 1.1. Suponha que as hipóteses do Teorema I.3.4 sejam satisfeitas e considere a sequência de dados u_ε^0 satisfazendo a hipótese (1.1) e

$$(1.5) \quad \tilde{f}_\varepsilon \rightarrow f, \text{ forte, em } L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n),$$

então:

$$(1.6) \quad E_\varepsilon(t) \rightarrow E(t), \text{ em } C^0([0, T]).$$

Demonstração: Temos as seguintes identidades:

$$(1.7) \quad E_\varepsilon(t) = E_\varepsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x, s) u'_\varepsilon(x, s) dx ds,$$

$$(1.8) \quad E(t) = E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) u'(x, s) dx ds,$$

com

$$(1.9) \quad E_\varepsilon(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon^1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx$$

$$(1.10) \quad E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dx + \frac{1}{2} \langle Mu^0, u^0 \rangle_{\Omega}$$

Em virtude de (I.3.41)₁, e da hipótese (1.5), temos:

$$(1.11) \quad \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(x, s) u'_\varepsilon(x, s) dx ds \rightarrow \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) u'(x, s) dx ds.$$

Por outro lado, (1.4) e (I.3.37)₂, devido a imersão compacta $V \hookrightarrow [L^2(\Omega)]^n$, implicam para uma subsequência, que:

$$(1.12) \quad E_\varepsilon(0) \rightarrow E(0).$$

Portanto, de (1.11) e (1.12), temos que:

$$(1.13) \quad E_\varepsilon(t) \rightarrow E(t), \quad \text{pontualmente, em } [0, T].$$

Além disso, dado qualquer $t \in [0, T]$, e $h > 0$ suficientemente pequeno temos:

$$\begin{aligned} |E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t)| &\leq \int_t^{t+h} \int_\Omega |\tilde{f}_\varepsilon(x, s)| |\tilde{u}'_\varepsilon(x, s)| dx ds \leq \\ &\leq \|\tilde{u}'_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^n)} \int_t^{t+h} \|\tilde{f}_\varepsilon(s)\|_{[L^2(\Omega)]^n} ds. \end{aligned}$$

Visto que $\tilde{u}'_\varepsilon$ é limitada em $L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$ e $\tilde{f}_\varepsilon$ converge forte em $L^1(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$ isto implica em que:

$$(1.14) \quad |E_\varepsilon(t+h) - E_\varepsilon(t)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0, \text{ uniformemente em } \varepsilon.$$

o que mostra que a família de funções $\{E_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ é equicontínua.

Logo, de (1.13), (1.14) e do Teorema de Arzelá-Ascoli, segue-se (1.6). ■

Definamos agora,

$$(1.15) \quad e_\varepsilon(v)(t) = \frac{1}{2} |v'(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 + \frac{1}{2} |\nabla v(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{n^2}}^2,$$

para $v \in C^0([0, T]; [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n) \cap C^1([0, T]; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$, e

$$(1.16) \quad e(v)(t) = \frac{1}{2} |v'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \frac{1}{2} |\nabla v(t)|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}}^2 + \frac{1}{2} \langle Mv(t), v(t) \rangle_\Omega$$

para $v \in C^0([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^n) \cap C^1([0, T]; [L^2(\Omega)]^n)$.

A partir destas definições, apresentamos o seguinte resultado:

Proposição 1.2. Suponha que as hipóteses da Proposição 1.1 sejam satisfeitas, então:

$$(1.17) \quad e_\varepsilon(u_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi) \rightarrow e(u - \varphi), \quad \text{em } C^0([0, T]),$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0, T; [\mathcal{D}(\Omega)]^n)$, onde a matriz W_ε é a matriz formada pelos vetores coluna $w_k^\varepsilon, 1 \leq k \leq n$.

Demonstração: Temos que:

$$(1.18) \quad \begin{aligned} e_\varepsilon(u_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi)(t) &= e_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) + e_\varepsilon(W_\varepsilon \varphi)(t) - \int_{\Omega} \tilde{u}'_\varepsilon(x, t) W_\varepsilon(x) \varphi'(x, t) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_\varepsilon(x, t) \cdot \nabla (W_\varepsilon(x) \varphi(x, t)) dx \end{aligned}$$

Passaremos sucessivamente ao limite em cada termo do lado direito de (4.23).

Primeiro Termo: Visto que $e_\varepsilon(u_\varepsilon)(t) = E_\varepsilon(t)$, temos da Proposição 1.1, que:

$$(1.19) \quad e_\varepsilon(u_\varepsilon)(\cdot) \rightarrow e(u)(\cdot), \quad \text{em } C^0([0, T]).$$

Segundo Termo: Derivando-se no tempo mostra-se que a função é limitada em $W^{1,\infty}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$, pelo Teorema de Rellich-Kondrachoff.

Assim, usando (I.2.1)_{iii}, obtemos que:

$$(1.20) \quad |W_\varepsilon \varphi'(\cdot)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 = |W_\varepsilon \varphi'(\cdot)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \rightarrow |\varphi'(\cdot)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2,$$

$$\text{em } C^0([0, T]).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\nabla(W_\varepsilon \varphi)(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{n^2}}^2 &= |\nabla(W_\varepsilon \varphi)(t)|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}}^2 = \\ &= - \langle \Delta W_\varepsilon \varphi(t), W_\varepsilon \varphi(t) \rangle_{\Omega} - 2 \int_{\Omega} \nabla W_\varepsilon \nabla \varphi(t) \cdot W_\varepsilon \varphi(t) dx - \int_{\Omega} |W_\varepsilon|^2 \varphi(t) \Delta \varphi(t) dx. \end{aligned}$$

Em vista de (I.2.1)_{iii} e (I.2.1)_{iv} podemos passar o limite em cada termo do lado direito, e observando que cada termo é limitado em $W^{1,\infty}(0, T)$, obtemos:

$$(1.21) \quad - \int_{\Omega} |W_\varepsilon|^2 \varphi(t) \Delta \varphi(t) dx \rightarrow - \int_{\Omega} \varphi(t) \cdot \Delta \varphi(t) dx,$$

$$\text{em } C^0([0, T]).$$

$$(1.22) \quad - 2 \int_{\Omega} \nabla W_\varepsilon \nabla \varphi(t) \cdot W_\varepsilon \varphi(t) dx \rightarrow 0, \quad \text{em } C^0([0, T])$$

$$(1.23) \quad - \langle \Delta W_\varepsilon \varphi(t), W_\varepsilon \varphi(t) \rangle_{\Omega} \rightarrow \langle M \varphi(t), \varphi(t) \rangle_{\Omega}, \quad \text{em } C^0([0, T])$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} - \langle \Delta W_\varepsilon \varphi(t), W_\varepsilon \varphi(t) \rangle_\Omega &= - \left\langle \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \Delta w_i^\varepsilon, \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) w_j^\varepsilon \right\rangle_\Omega = \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i(t) \Delta w_i^\varepsilon, \varphi_j(t) w_j^\varepsilon \rangle_\Omega = \\ &= \sum_{i,j=1}^n [\langle \varphi_i(t) (\nabla q_i^\varepsilon - \Delta w_i^\varepsilon), \varphi_j(t) w_j^\varepsilon \rangle_\Omega - \langle \varphi_i(t) \nabla q_i^\varepsilon, \varphi_j(t) w_j^\varepsilon \rangle_\Omega]. \end{aligned}$$

Mas, de (I.2.1)_v, temos que:

$$\langle \nabla q_i^\varepsilon - \Delta w_i^\varepsilon, \varphi_i \varphi_j w_j^\varepsilon \rangle_\Omega \rightarrow \langle \mu_i, \varphi_i \varphi_j e_j \rangle_\Omega,$$

pois de (I.2.1)_{iii},

$$\varphi_i \varphi_j w_j^\varepsilon \rightarrow \varphi_i \varphi_j e_j, \quad \text{fraco, em } [H^1(\Omega)]^n,$$

e de (I.2.1)_{ii}, $\varphi_i \varphi_j w_j^\varepsilon = 0$, nos buracos T_i^ε .

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} - \langle \nabla q_i^\varepsilon, \varphi_i \varphi_j w_i^\varepsilon \rangle_\Omega &= \int_\Omega q_i^\varepsilon \operatorname{div}(\varphi_i \varphi_j w_i^\varepsilon) dx = \\ &= \int_\Omega q_i^\varepsilon \nabla(\varphi_i \varphi_j) \cdot w_i^\varepsilon dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

por (I.2.1)_{iii}.

Assim resulta (1.23).

Combinando (1.20)-(1.23) deduzimos que:

$$(1.24) \quad e_\varepsilon(W_\varepsilon \varphi)(\cdot) \rightarrow e(\varphi)(\cdot), \quad \text{em } C^0([0, T]).$$

Terceiro Termo: Devido a Proposição A.1.1 temos (ver 3.41):

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u'_\varepsilon(x) \psi(x) dx \rightarrow \int_\Omega u'(x) \psi(x) dx, \quad \text{em } C^0([0, T]),$$

para todo $\psi \in [L^\infty(\Omega)]^n$, do que deduzimos:

$$(1.25) \quad \int_{\Omega} \widetilde{u}'_\varepsilon(x_i) \cdot W_\varepsilon(x) \psi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u'(x_i) \cdot \psi(x) dx, \text{ em } C^0([0, T]),$$

visto que:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_{\Omega} \widetilde{u}'_\varepsilon(x, t) (W_\varepsilon(x) - I) \psi(x) dx \right| &\leq \\ &\leq \|\widetilde{u}'_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^n)} \|\psi\|_{[L^\infty(\Omega)]^n} \|W_\varepsilon - I\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

em virtude de (I.2.1)_{iii}.

Agora, aproximando $\varphi'(x, t)$ em $C^0([0, T]; [L^2(\Omega)]^n)$ por funções da forma $\sum_{i=1}^k \eta_i(t) \psi_i(x)$,

onde η_i são funções contínuas sobre $[0, T]$, e as $\psi_i \in [L^\infty(\Omega)]^n$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, deduzimos, de (1.25), e da limitação de W_ε em $[L^\infty(\Omega)]^{n^2}$ que:

$$(1.26) \quad \int_{\Omega} \widetilde{u}'_\varepsilon(x, t) W_\varepsilon(x) \varphi'(x, t) dx \rightarrow \int_{\Omega} u'(x, t) \varphi'(x, t) dx, \text{ em } C^0([0, T]).$$

Quarto Termo: Considerando o último termo em (1.18), temos:

$$(1.27) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_\varepsilon(x, t) \cdot \nabla (W_\varepsilon(x) \varphi(x, t)) dx = \langle -\Delta W_\varepsilon \varphi(t), \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_{\Omega} \\ -2 \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon(x, t) \cdot \nabla W_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x, t) dx - \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon(x, t) \cdot W_\varepsilon(x) \Delta \varphi(x, t) dx. \end{cases}$$

Agora consideremos a função:

$$t \mapsto -2 \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon(x, t) \cdot \nabla W_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x, t) dx - \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon(x, t) \cdot W_\varepsilon(x) \Delta \varphi(x, t) dx.$$

Do Teorema I.3.4, $\tilde{u}_\varepsilon$ é limitada em $W^{1, \infty}(0, T; [L^2(\Omega)]^n)$ assim a família de funções em consideração é limitada em $W^{1, \infty}(0, T)$, sendo relativamente compacta em $C^0([0, t])$, devido à imersão $W^{1, \infty}(0, T) \xhookrightarrow{c} C^0([0, T])$. Isto implica em que:

$$(1.28) \quad \begin{cases} -2 \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon(x, t) \cdot \nabla W_\varepsilon(x) \nabla \varphi(x, t) dx - \int_{\Omega} \tilde{u}_\varepsilon(x, t) W_\varepsilon(x) \Delta \varphi(x, t) dx \rightarrow \\ - \int_{\Omega} u(x, t) \cdot \Delta \varphi(x, t) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t) dx, \\ \text{em } C^0([0, T]). \end{cases}$$

Considere agora o termo restante $\langle -\Delta W_\varepsilon(x)\varphi(t), \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_\Omega$. Temos que:

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \langle -\Delta W_\varepsilon \varphi(t), \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_\Omega &= - \left\langle \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \Delta w_i^\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon(t) \right\rangle_\Omega = \\ &= \sum_{i=1}^n [\langle \varphi_i(t) (-\Delta w_i^\varepsilon + \nabla q_i^\varepsilon), \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_\Omega - \langle \varphi_i(t) \nabla q_i^\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_\Omega]. \end{aligned}$$

Mas, de (1.2.1)_v, temos que:

$$(1.30) \quad \langle (-\Delta w_i^\varepsilon + \nabla q_i^\varepsilon), \varphi_i(t) \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_\Omega \rightarrow \langle \mu_i, \varphi_i(t) u(t) \rangle_\Omega$$

pois da Proposição A.1.1,

$$\varphi_i(t) \tilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup \varphi_i(t) u(t), \quad \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n \hookrightarrow [H^1(\Omega)]^n, \quad \forall t \in [0, T],$$

e $\varphi_i(t) \tilde{u}_\varepsilon(t) = 0$, nos buracos T_i^ε .

Por outro lado temos que:

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \langle -\nabla q_i^\varepsilon, \varphi_i(t) \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_\Omega &= \int_\Omega q_i^\varepsilon \operatorname{div}(\varphi_i(t) \tilde{u}_\varepsilon(t)) dx = \\ &= \int_\Omega q_i^\varepsilon \nabla \varphi_i(t) \tilde{u}_\varepsilon(t) dx, \end{aligned}$$

$$(1.32) \quad \int_\Omega q_i^\varepsilon \nabla \varphi_i(t) \tilde{u}_\varepsilon(t) dx \rightarrow 0,$$

por (1.2.1)_{iii} e do Corolário A.1.2, pois $V \hookrightarrow [L^2(\Omega)]^n$.

Combinando (1.29) a (1.32) deduzimos que:

$$(1.33) \quad \langle -\Delta W_\varepsilon \varphi_i, \tilde{u}_\varepsilon \rangle_\Omega \rightarrow \langle M \varphi, u \rangle_\Omega, \quad \text{em } C^0([0, T]).$$

De (1.18), (1.19), (1.24), (1.26), (1.28) e (1.33) obtemos (1.17).

A demonstração da Proposição 1.2 está agora completa. ■

A seguir apresentamos o resultado de correção.

Teorema 1.3. Suponha que as hipóteses da Proposição 1.1 sejam satisfeitas, se u denota a única solução da equação homogeneizada (1.3.39), então a sequência de soluções (u_ε) de (1.3.1) satisfaz:

$$(1.34) \quad \widetilde{u'_\varepsilon} \rightarrow u', \quad \text{em } C^0([0, T]; [L^2(\Omega)]^n)$$

$$(1.35) \quad \tilde{u}_\varepsilon = W_\varepsilon u + R_\varepsilon, \quad \text{com}$$

$$(1.36) \quad R_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{em } C^0([0, T], [W_0^{1,1}(\Omega)]^n)$$

Além disso, se $u \in C^0([0, T]; [C^0(\overline{\Omega})]^n)$, então:

$$(1.37) \quad R_\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{em } C^0([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^n).$$

Observação 1.1. Observemos que combinando (1.3.84) e (1.3.85) com (1.6) temos para qualquer $t \in [0, T]$,

$$(1.38) \quad \begin{cases} |u'_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 \rightarrow |u'(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \\ |\nabla u_\varepsilon|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{n^2}}^2 \rightarrow |\nabla u|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}}^2 + \langle Mu, u \rangle_\Omega \end{cases}$$

Por outro lado, de (1.3.83) e (1.38)₁, pelo Teorema de Riesz, em [32], obtemos que

$$(1.39) \quad u'_\varepsilon(t) \rightarrow u'(t), \quad \text{forte, em } [L^2(\Omega)]^n,$$

para qualquer $t \in [0, T]$ fixado. Esta afirmação não é tão forte quanto (1.34), mas é um primeiro passo nessa direção.

Demonstração do Teorema 1.3: Do Teorema 1.3.4 sabemos que:

$$(1.40) \quad u \in C^0([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^n) \cap C^1([0, T]; [L^2(\Omega)]^n).$$

Considere uma sequência φ_k em $\mathcal{D}(0, T; [\mathcal{D}(\Omega)]^n)$ tal que:

$$(1.41) \quad \varphi_k \rightarrow u, \quad \text{em } C^0([0, T]; [H_0^1(\Omega)]^n) \cap C^1([0, T]; [L^2(\Omega)]^n),$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Da Proposição 1.2 temos:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \|(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi_k)'\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)}^2 + \|\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{n^2})}^2 \} \\ \leq 2\|\varepsilon(u - \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T)}$$

e assim

$$(1.42) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \|(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi_k)'\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)} + \|\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{n^2})} \} = 0$$

Agora observamos que:

$$(1.43) \quad \|\tilde{u}_\varepsilon - u'\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)} \leq \|\tilde{u}'_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi'_k\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)} + \\ + \|(W_\varepsilon - I)\varphi'_k\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)} + \|\varphi'_k - u'\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)}.$$

Combinando (1.41), (1.42), (1.43) e a hipótese (I.2.1)_{iii} facilmente deduzimos que:

$$\tilde{u}'_\varepsilon \rightarrow u', \quad \text{em} \quad C^0([0,T];[L^2(\Omega)]^n).$$

Portanto (1.34) está demonstrado.

Por outro lado, temos:

$$(1.44) \quad \|\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{n^2})} + \|\nabla(W_\varepsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{n^2})} \leq \\ \leq c\|\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{n^2})} + \|\nabla W_\varepsilon(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;[L^1(\Omega)]^{n^2})} \\ \leq c\|\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^{n^2})} + \|\nabla W_\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \|\varphi_k - u\|_{C([0,T];[L^2(\Omega)]^n)} \\ + c\|W_\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];[H_0^1(\Omega)]^n)}$$

Por (I.2.1), (1.41), (1.42) e (1.44) concluímos que:

$$\nabla R_\varepsilon = \nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u) \rightarrow 0, \quad \text{em} \quad C^0([0,T];[L^1(\Omega)]^{n^2}).$$

Assim (1.36) está demonstrado.

Vamos finalmente considerar o caso onde $u \in C^0([0,T];[C^0(\bar{\Omega})]^n)$. Em tal caso, a sequência aproximante φ_k pode ser escolhida de modo a satisfazer, além de (1.41), a hipótese

$$(1.45) \quad \varphi_k \rightarrow u, \quad \text{em} \quad C^0([0,T];[C^0(\bar{\Omega})]^n).$$

Neste caso podemos estimar $\nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u)$ em $L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})$ e não somente em $L^\infty(0, T; [L^1(\Omega)]^{n^2})$, como em (1.44). De fato temos:

$$\begin{aligned} & \|\nabla(W_\varepsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})} \leq \\ & \leq \|\nabla W_\varepsilon(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^{n^2})} + \|W_\varepsilon \nabla(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^n)} \\ & \leq \|\nabla W_\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}} \|\varphi_k - u\|_{C^0([0, T]; C(\bar{\Omega})^n)} + \|W_\varepsilon\|_{[L^\infty(\Omega)]^{n^2}} \|\varphi_k - u\|_{L^\infty(0, T; [H_0^1(\Omega)]^n)}. \end{aligned}$$

Similarmente a (1.44), isto implica:

$$\nabla R_\varepsilon = \nabla(\tilde{u}_\varepsilon - W_\varepsilon u) \rightarrow 0, \quad \text{em } C^0([0, T]; [L^2(\Omega)]^n),$$

o que dá o resultado desejado (1.37). ■

A demonstração do Teorema 1.1 está agora completa.

Observação 1.2. De (1.6), (1.34) e das definições de E_ε e E , tem-se realmente que:

$$(1.46) \quad \begin{cases} \|\tilde{u}'_\varepsilon(\cdot)\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 \rightarrow \|u'(\cdot)\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2, & \text{em } C^0([0, T]) \\ \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\cdot)\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^{n^2}}^2 \rightarrow \|\nabla u(\cdot)\|_{[L^2(\Omega)]^{n^2}}^2 + \langle Mu(\cdot), u(\cdot) \rangle_\Omega, & \text{em } C^0([0, T]). \end{cases}$$

CAPÍTULO III

Homogeneização da Equação de Navier-Stokes

Neste capítulo estudamos a homogeneização da equação de Navier-Stokes, para fluidos incompressíveis, com condições de fronteira de Dirichlet, em domínios perfurados com "pequenos" buracos. Nosso objetivo é demonstrar o resultado de homogeneização para a equação de Navier-Stokes (Teorema 1.7). A semicontinuidade da energia será também demonstrada (Teorema 1.9).

Seja Ω_ε um conjunto aberto, conexo, limitado do $\mathbf{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), localmente localizado de um mesmo lado de sua fronteira Γ_ε , de classe C^2 , obtido removendo-se de Ω um conjunto $T_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_\varepsilon^i$ de "pequenos" buracos para os quais a hipótese (I.2.1) é satisfeita. Finalmente seja $T > 0$. Consideremos o problema misto para a equação de Navier-Stokes:

$$(1.1) \quad \begin{cases} u'_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0, T) \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, & \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, & \text{sobre } \Sigma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times (0, T), \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_\varepsilon^0, & \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

onde são feitas as seguintes hipóteses sobre os dados:

$$(1.2) \quad u_\varepsilon^0 \in V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n, \quad f_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_\varepsilon), \quad f'_\varepsilon \in L^2(0, T; H_\varepsilon).$$

Resultados clássicos apresentados em Temam (cf. p.e. [39]) garantem a existência e a unicidade de solução de (1.1).

O teorema seguinte apresenta estes resultados, para ν suficientemente grande, ou f_ε e u_ε^0 suficientemente pequenos, quando $n = 3$. Antes, porém, enunciaremos alguns lemas técnicos que serão necessários na demonstração do Teorema. Estes lemas podem ser encontrados no Capítulo III, de Temam [39], juntamente com as suas respectivas demonstrações.

Para enunciarmos tais lemas definamos uma forma trilinear contínua, b , sobre V , dada por:

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j \, dx.$$

Se $u \in V$, então

$$b(u, v, v) = 0, \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n.$$

Para u, v em V , denotamos por $B(u, v)$ o elemento de V' , definido por:

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w) = b(u, v, w), \quad \forall w \in V,$$

e colocamos

$$B(u) = B(u, u) \in V', \quad \forall u \in V.$$

Lema 1.1. Suponha que $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n = 2, 3$) seja limitado e de classe C^2 . Se $u \in V \cap [H^2(\Omega)]^n$, então $Bu \in [L^2(\Omega)]^n$, e:

$$|Bu| \leq c_1 |u|^{1/2} \|u\| |Au|^{1/2}, \quad \text{se } n = 2,$$

$$|Bu| \leq c_2 \|u\|^{3/2} |Au|^{1/2}, \quad \text{se } n = 3.$$

Lema 1.2. Se $n = 2$, para qualquer conjunto aberto Ω ,

$$\|\nu\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} |\nu|_{L^2(\Omega)}^{1/2} |\text{grad } \nu|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \quad \forall \nu \in H_0^1(\Omega)$$

Lema 1.3. Se $n = 2$,

$$|b(u, v, w)| \leq 2^{1/2} |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|\nu\| |w|^{1/2} \|w\|^{1/2}, \quad \forall u, v, w \in [H_0^1(\Omega)]^n.$$

Lema 1.4. Se u_μ converge para u , em $L^2(0, T; V)$, fracamente, e em $L^2(0, T; H)$, fortemente, então para qualquer função vetorial w com componentes em $C^1(\overline{Q})$,

$$\int_0^T b(u_\mu(t), u_\mu(t), w(t)) dt \rightarrow \int_0^T b(u(t), u(t), w(t)) dt.$$

Lema 1.5. Se $n = 3$, para qualquer conjunto aberto Ω :

$$\|\nu\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/2} |\nu|_{L^2(\Omega)}^{1/4} |\text{grad } \nu|_{L^2(\Omega)}^{3/4}, \quad \forall \nu \in [H_0^1(\Omega)]^n.$$

Teorema 1.6. Suponha que $n = 2$ ou 3 , e

$$u_\varepsilon^0 \in V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n, \quad f_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_\varepsilon), \quad f'_\varepsilon \in L^2(0, T; H_\varepsilon).$$

Então, existe uma única função u_ε satisfazendo:

$$(1.3) \quad u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon) \cap L^2(0, T; [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$$

$$(1.4) \quad u'_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_\varepsilon) \cap L^2(0, T; V_\varepsilon)$$

e

$$(1.5) \quad \begin{cases} u'_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0, & \text{em } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

Demonstração: Procederemos a demonstração em seis etapas.

Etapa i: Estimativas a priori.

Sejam $(w_\nu^\varepsilon)_{\nu \in \mathbb{N}}, (\lambda_\nu^\varepsilon)_{\nu \in \mathbb{N}}$ respectivamente, as auto-funções e os auto-valores do problema espectral:

$$(1.6) \quad ((w_j^\varepsilon, v)) = \lambda_j^\varepsilon (w_j^\varepsilon, v), \quad \text{para todo } v \in V_\varepsilon,$$

associado ao problema estacionário de Stokes.

Problema aproximado: Consideremos o subespaço m -dimensional de $\tilde{V}_\varepsilon = V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n$ denotado por $\tilde{V}_{\varepsilon m} = [w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, \dots, w_m^\varepsilon]$, gerado pelas m primeiras auto-funções w_ν^ε , $\nu = 1, 2, \dots, m, \dots$. Então, propomos o seguinte problema aproximado:

Encontrar $u_{\varepsilon m}(t) \in \tilde{V}_{\varepsilon m}$ tal que:

$$(1.7) \quad \begin{cases} (u'_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) + \nu((u_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon)) + b(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) = (f_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon), \\ j = 1, \dots, m; \quad t \in [0, T], \\ u_{\varepsilon m}(0) = u_{\varepsilon m}^0 \rightarrow u_\varepsilon^0, \quad \text{forte, em } V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n \end{cases}$$

Estimativa 1: A primeira estimativa a priori é obtida da seguinte maneira. Multiplicamos a equação aproximada (1.7)₁ por $g_{jem}(t)$ e somamos estas equações para $j = 1, \dots, m$. Tomando em conta que $b(u, v, v) = 0, \forall u, v \in [H_0^1(\Omega)]^n$, obtemos:

$$(1.8) \quad (u'_{em}(t), u_{em}(t)) + \nu \|u_{em}(t)\|^2 = (f_\varepsilon(t), u_{em}(t)).$$

Então escrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u_{em}(t)|^2 + 2\nu \|u_{em}(t)\|^2 &= 2(f_\varepsilon(t), u_{em}(t)) \leq \\ &\leq 2c |f_\varepsilon(t)| \|u_{em}(t)\| \leq \nu \|u_{em}(t)\|^2 + \frac{c^2}{\nu} |f_\varepsilon(t)|^2, \end{aligned}$$

portanto,

$$(1.9) \quad \frac{d}{dt} |u_{em}(t)|^2 + \nu \|u_{em}(t)\|^2 \leq \frac{c^2}{\nu} |f_\varepsilon(t)|^2.$$

Integrando (1.9) de 0 a s obtemos, em particular, que:

$$\begin{aligned} |u_{em}(s)|^2 &\leq |u_{em}^0|^2 + \frac{c^2}{\nu} \int_0^s |f_\varepsilon(t)|^2 dt \leq \\ &\leq |u_\varepsilon^0|^2 + \frac{c^2}{\nu} \int_0^s |f_\varepsilon(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

isto se projetarmos u_ε^0 em H_ε sobre o espaço gerado por $w_1^\varepsilon, \dots, w_m^\varepsilon$. Assim,

$$(1.10) \quad \sup_{s \in [0, T]} |u_{em}(s)|^2 \leq |u_\varepsilon^0|^2 + \frac{c^2}{\nu} \int_0^T |f_\varepsilon(t)|^2 dt,$$

o que implica em que:

$$(1.11) \quad u_{em} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_\varepsilon) \text{ independentemente de } m.$$

Agora integramos (1.9) de 0 a T para obtermos:

$$\begin{aligned} |u_{em}(T)|^2 + \nu \int_0^T \|u_{em}(t)\|^2 dt &\leq |u_{em}^0|^2 + \frac{c^2}{\nu} \int_0^T |f_\varepsilon(t)|^2 dt \\ &\leq |u_\varepsilon^0|^2 + \frac{c^2}{\nu} \int_0^T |f_\varepsilon(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

e assim:

$$(1.12) \quad u_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^2(0, T; V_\varepsilon).$$

Estimativa 2: Devido a base especial, podemos escrever (1.7)₁, como:

$$(1.13) \quad (u'_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) + \nu(Au_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) + (Bu_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) = (f_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon),$$

pois por (1.6),

$$(1.14) \quad ((w_j^\varepsilon, v)) = (Aw_j^\varepsilon, v) = \lambda_j(w_j^\varepsilon, v), \quad \forall v \in V_\varepsilon.$$

Tem-se então que, após a multiplicação por λ_j , podemos escrever (1.13) como segue:

$$((u'_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon)) + \nu(Au_{\varepsilon m}(t), Aw_j^\varepsilon) + (Bu_{\varepsilon m}(t), Aw_j^\varepsilon) = (f_\varepsilon(t), Aw_j^\varepsilon).$$

Multiplicamos esta relação por $g_{j\varepsilon m}(t)$ e somamos para $j = 1, \dots, m$; e obtemos:

$$(1.15) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \nu |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 + (Bu_{\varepsilon m}(t), Au_{\varepsilon m}(t)) = (f_\varepsilon(t), Au_{\varepsilon m}(t)).$$

Consideraremos primeiro, o caso $n = 2$. Do Lema 1.1, temos que:

$$|Bu_{\varepsilon m}(t)| \leq c_1 |u_{\varepsilon m}(t)|^{1/2} \|u_{\varepsilon m}(t)\| |Au_{\varepsilon m}(t)|^{1/2},$$

e assim deduzimos de (1.15) que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \nu |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 \leq \\ & \leq |f_\varepsilon(t)| |Au_{\varepsilon m}(t)| + c_1 |u_{\varepsilon m}(t)|^{1/2} \|u_{\varepsilon m}(t)\| |Au_{\varepsilon m}(t)|^{3/2} \leq \\ & \leq \frac{\nu}{4} |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 + \frac{1}{\nu} |f_\varepsilon(t)|^2 + \frac{\nu}{4} |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 + c_2 |u_{\varepsilon m}(t)|^2 \|u_{\varepsilon m}(t)\|^4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1.16) \quad \frac{d}{dt} \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \nu |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 \leq \frac{2}{\nu} |f_\varepsilon(t)|^2 + 2c_2 |u_{\varepsilon m}(t)|^2 \|u_{\varepsilon m}(t)\|^4.$$

Em particular, fazendo $\sigma_{\varepsilon m}(t) = 2c_2|u_{\varepsilon m}(t)|^2||u_{\varepsilon m}(t)||^2$, obtemos:

$$\frac{d}{dt}||u_{\varepsilon m}(t)||^2 \leq \frac{2}{\nu}|f_{\varepsilon}(t)|^2 + \sigma_{\varepsilon m}(t)||u_{\varepsilon m}(t)||^2.$$

Como $u_{\varepsilon m} \in L^{\infty}(0, T; H_{\varepsilon}) \cap L^2(0, T; V_{\varepsilon})$ independentemente de m , segue-se que:

$$\int_0^T \sigma_{\varepsilon m}(t) dt \leq c,$$

e daí resulta que:

$$(1.17) \quad u_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^{\infty}(0, T; V_{\varepsilon}) \text{ independentemente de } m.$$

Voltando a (1.16), obtemos após integrarmos de 0 a T ,

$$\begin{aligned} ||u_{\varepsilon m}(T)||^2 + \nu \int_0^T |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 dt &\leq ||u_{\varepsilon m}^0||^2 + \\ &+ \frac{2}{\nu} \int_0^T |f_{\varepsilon}(t)|^2 dt + 2c_2 \int_0^T |u_{\varepsilon m}(t)|^2 ||u_{\varepsilon m}(t)||^4 dt. \end{aligned}$$

De (1.17), e da equivalência da norma $|Au|_{[L^2(\Omega_{\varepsilon})]^n}$ à norma induzida de $[H^2(\Omega_{\varepsilon})]^n$, sobre $V_{\varepsilon} \cap [H^2(\Omega_{\varepsilon})]^n$, segue-se que:

$$(1.18) \quad u_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^2(0, T; [H^2(\Omega_{\varepsilon})]^n).$$

Agora consideremos o caso em que $n = 3$. Novamente, do Lema 1.1, temos que:

$$|Bu_{\varepsilon m}(t)| \leq c_3||u_{\varepsilon m}(t)||^{3/2} |Au_{\varepsilon m}(t)|^{1/2},$$

e assim deduzimos de (1.15) que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||u_{\varepsilon m}(t)||^2 + \nu |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 &\leq \\ &\leq |f_{\varepsilon}(t)| |Au_{\varepsilon m}(t)| + c_3 ||u_{\varepsilon m}(t)||^{3/2} |Au_{\varepsilon m}(t)|^{3/2} \leq \\ &\leq \frac{\nu}{4} |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 + \frac{1}{\nu} |f_{\varepsilon}(t)|^2 + \frac{\nu}{4} |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 + c_3 ||u_{\varepsilon m}(t)||^6. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1.19) \quad \frac{d}{dt} \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \nu |Au_{\varepsilon m}(t)|^2 \leq \frac{2}{\nu} |f_{\varepsilon}(t)|^2 + 2c_3 \|u_{\varepsilon m}(t)\|^6.$$

Temos que,

$$c \|u\|_{[H^2(\Omega_{\varepsilon})]^n} \leq |Au|_{[L^2(\Omega_{\varepsilon})]^n}, \quad \forall u \in V_{\varepsilon} \cap [H^2(\Omega_{\varepsilon})]^n,$$

e assim, (1.19) fica

$$(1.20) \quad \frac{d}{dt} \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 + c\nu \|u_{\varepsilon m}(t)\|_{[H^2(\Omega_{\varepsilon})]^n}^2 \leq \frac{2}{\nu} N(f_{\varepsilon})^2 + 2c_3 \|u_{\varepsilon m}(t)\|^6,$$

onde $N(f_{\varepsilon}) = |f_{\varepsilon}|_{L^{\infty}(0,T;H_{\varepsilon})}$.

Agora desejamos que:

$$(1.21) \quad \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq \mu, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad \text{onde} \quad T_1 = \frac{3}{4c_3\mu^2},$$

desde que $\|u_{\varepsilon m}^0\| \leq \|u_{\varepsilon}^0\|$, sendo isto satisfeito se $u_{\varepsilon m}^0 = P_m u_{\varepsilon}^0$ for a projeção de u_{ε}^0 sobre o espaço gerado por $w_1^{\varepsilon}, \dots, w_m^{\varepsilon}$, em V_{ε} . De fato, seja

$$z = \max \left(\frac{\mu}{2}, \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 \right),$$

onde

$$\mu = 4 \max \left(\|u_{\varepsilon}^0\|^2, \frac{2}{c\nu^2} N(f_{\varepsilon})^2 \right).$$

Então, por um resultado bem conhecido de G. Stampachia [36], a função z é em q.t.p. diferenciável e:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = 0, & \text{se } \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq \frac{\mu}{2} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} (\|u_{\varepsilon m}(t)\|^2), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto, de (1.20), e da definição de μ , temos:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} \leq 2c_3 z^3 \\ z(0) = \frac{\mu}{2} \end{cases}$$

de modo que:

$$\frac{1}{\mu^2} \leq \frac{4.(1 - c_2 t \mu^2)}{\mu^2} \leq \frac{1}{z^2}, \quad \text{para } t \leq T_1 = \frac{3}{4c_3 \mu^2}.$$

Assim temos que (2.21) é satisfeita e portanto a sequência u_{em} é limitada em $L^\infty(0, T_*; V_\varepsilon)$, independentemente de m , onde $T^* = \min(T, T_1)$, e então, como antes, u_{em} é também limitada em $L^2(0, T_*, [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$, independentemente de m .

Escolhendo-se u_ε^0 e f_ε , de modo que $\|u_\varepsilon^0\|$ seja suficientemente pequeno, e, $N(f_\varepsilon)$ seja suficientemente pequeno ou ν suficientemente grande, segue-se que $T_1 \geq T$, e portanto $T^* = T$.

Estimativa 3: Multiplicamos a equação aproximada (1.7)₁ por $g'_{jem}(t)$ e somamos as equações resultantes para $j = 1, \dots, m$. Isto nos dá:

$$|u'_{em}(t)|^2 + \nu((u_{em}(t), u'_{em}(t))) + b(u_{em}(t), u_{em}(t), u'_{em}(t)) = (f_\varepsilon(t), u'_{em}(t)).$$

Em particular, no tempo $t = 0$,

$$(1.22) \quad |u'_{em}(0)|^2 = (f_\varepsilon(0), u'_{em}(0)) + \nu(\Delta u_{em}^0, u'_{em}(0)) - b(u_{em}^0, u_{em}^0, u'_{em}(0)),$$

portanto,

$$(1.23) \quad |u'_{em}(0)| \leq |f_\varepsilon(0)| + \nu|\Delta u_{em}^0| + |Bu_{em}^0|.$$

É claro de (1.7)₂ que:

$$(1.24) \quad |\Delta u_{em}^0| \leq c_0 \|u_{em}^0\|_{[H^2(\Omega_\varepsilon)]^n} \leq c_0 \|u_\varepsilon^0\|_{[H^2(\Omega_\varepsilon)]^n},$$

basta para isto escolhermos u_{em}^0 como a projeção ortogonal, em $V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n$, de u_ε^0 sobre o espaço gerado por $w_1^\varepsilon, \dots, w_m^\varepsilon$.

Agora, para Bu_{em}^0 , temos, pela desigualdade de Hölder,

$$(1.25) \quad \begin{aligned} b(u_{em}^0, u_{em}^0, v) &\leq c_1 \|u_{em}^0\|_{L^4(\Omega)} \|\text{grad } u_{em}^0\|_{L^4(\Omega)} |v| \leq \\ &\leq c_2 \|u_{em}^0\| \cdot \|u_{em}^0\|_{H^2(\Omega)} |v|, \quad \text{para } v \in [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n, \end{aligned}$$

pois pelo Lema 1.2, se $n = 2$,

$$(1.26) \quad \|u_{\varepsilon m}^0\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} \leq 2^{1/4} |u_{\varepsilon m}^0|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/2} |\text{grad } u_{\varepsilon m}^0|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/2}$$

e pela observação da pág. 313, de Temam [39], esta mesma desigualdade é válida em $H^1(\Omega)]^n$, assim:

$$(1.27) \quad |\text{grad } u_{\varepsilon m}^0| \leq c(\Omega) |\text{grad } u_{\varepsilon m}^0|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/2} |u_{\varepsilon m}^0|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/2}.$$

Logo, de (1.26), (1.27) e da imersão de $H^1(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$, segue-se (1.25), e daí obtém-se que:

$$(1.28) \quad |Bu_{\varepsilon m}^0| \leq c_2 \|u_{\varepsilon m}^0\| \|u_{\varepsilon m}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c_2 \|u_{\varepsilon m}^0\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

Finalmente, (1.23), (1.24) e (1.28) mostram que:

$$(1.29) \quad u'_{\varepsilon m}(0) \text{ é limitada em } H_\varepsilon, \text{ independentemente de } m.$$

Podemos derivar a equação aproximada $(1.7)_1$, na variável t , e como $f'_\varepsilon \in L^2(0, T; H_\varepsilon)$, obtemos:

$$(1.30) \quad \begin{aligned} & (u''_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) + \nu((u'_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon)) + b(u'_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) + \\ & + b(u_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) = (f'_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Multiplicamos (1.30) por $g'_{j\varepsilon m}(t)$ e somamos as equações resultantes para $j = 1, \dots, m$, e encontramos:

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 + 2\nu \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 + 2b(u'_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) = \\ = 2(f'_\varepsilon(t), u'_{\varepsilon m}(t)), \end{aligned}$$

uma vez que $b(u, v, v) = 0, \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n$. Do Lema 1.3, se $n = 2$, temos que:

$$|b(u'_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t))| \leq 2^{1/2} |u'_{\varepsilon m}(t)| \cdot \|u'_{\varepsilon m}(t)\| \cdot \|u_{\varepsilon m}(t)\|.$$

Dai, obtemos que:

$$2|b(u'_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t))| \leq \nu \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 + \frac{2}{\nu} \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2 |u'_{\varepsilon m}(t)|^2.$$

Assim, deduzimos, de (1.31), que:

$$(1.32) \quad \frac{d}{dt} |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 + \frac{\nu}{2} \|u'_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq \frac{2c^2}{\nu} |f'_\varepsilon(t)|^2 + \phi_{\varepsilon m}(t) \cdot |u'_{\varepsilon m}(t)|^2,$$

onde $\phi_{\varepsilon m}(t) = \frac{2}{\nu} \|u_{\varepsilon m}(t)\|^2$.

Então, segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 \exp \left(- \int_0^t \phi_{\varepsilon m}(s) ds \right) \right\} &\leq \frac{2}{\nu} c^2 |f'_\varepsilon(t)|^2 \exp \left(- \int_0^t \phi_{\varepsilon m}(s) ds \right) \\ &\leq \frac{2}{\nu} c^2 |f'_\varepsilon(t)|^2, \end{aligned}$$

portanto,

$$(1.33) \quad |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 \leq \left\{ |u'_{\varepsilon m}(0)|^2 + \frac{2}{\nu} c^2 \int_0^t |f'_\varepsilon(s)|^2 ds \right\} \exp \left(\int_0^t \phi_{\varepsilon m}(s) ds \right).$$

Visto que a função $u_{\varepsilon m}$ é limitada em $L^2(0, T; V_\varepsilon)$, independentemente de m , e devido a (1.29), o lado direito de (1.33) é uniformemente limitado, para $t \in [0, T]$, e m , assim:

$$(1.34) \quad u'_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_\varepsilon), \text{ independentemente de } m.$$

Com (1.34), concluímos facilmente de (1.32) que:

$$(1.35) \quad u'_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^2(0, T; V_\varepsilon), \text{ independentemente de } m.$$

Agora consideremos o caso $n = 3$. De (1.23), (1.24) e (1.28), temos que:

$$(1.36) \quad |u'_{\varepsilon m}(0)| \leq d_1 = |f_\varepsilon(0)| + \nu c_0 \|u_\varepsilon^0\|_{[H^2(\Omega_\varepsilon)]^n} + c_2 \|u_\varepsilon^0\|_{[H^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2.$$

Usando o fato de que:

$$(1.37) \quad |b(u, v, w)| \leq c \|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|, \quad \forall u, v, w \in V_\varepsilon,$$

deduzimos da equação (1.31) que:

$$(1.38) \quad \frac{d}{dt} |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 + 2(\nu - c||u_{\varepsilon m}(t)||) ||u'_{\varepsilon m}(t)||^2 \leq 2|f'_\varepsilon(t)| |u'_{\varepsilon m}(t)|.$$

De (1.9) e (1.10), temos que:

$$(1.39) \quad \begin{aligned} \nu ||u_{\varepsilon m}(t)||^2 &\leq \frac{c^2}{\nu} |f_\varepsilon(t)|^2 - 2(u_{\varepsilon m}(t), u'_{\varepsilon m}(t)) \leq \\ &\leq \frac{c^2}{\nu} |f_\varepsilon(t)|^2 - 2|u_{\varepsilon m}(t)| |u'_{\varepsilon m}(t)| \leq \\ &\leq \frac{d_2}{\nu} + 2 \left(|u_\varepsilon^0|^2 + \frac{T d_2}{\nu} \right)^{1/2} |u'_{\varepsilon m}(t)|, \end{aligned}$$

onde

$$(1.40) \quad d_2 = c^2 |f_\varepsilon|_{L^\infty(0, T; H_\varepsilon)}^2.$$

Usando (1.36), concluímos de (1.39) que, em $t = 0$,

$$(1.41) \quad \nu ||u_{\varepsilon m}(0)||^2 \leq \frac{d_2}{\nu} + 2d_1 \left(|u_\varepsilon^0|^2 + \frac{T d_2}{\nu} \right)^{1/2} = d_3.$$

A hipótese mencionada na apresentação do teorema é que ν é suficientemente grande, ou, f_ε e u_ε^0 suficientemente pequenos, isto é:

$$(1.42) \quad d_4 = \frac{d_2}{\nu} + (1 + d_1^2) \left(|u_\varepsilon^0|^2 + \frac{T d_2}{\nu} \right)^{1/2} \exp \left(\int_0^T |f'_\varepsilon(s)| ds \right) < \frac{\nu^3}{c^2}.$$

Visto que $d_3 \leq d_4$, obtemos, como uma consequência de (1.41) e (1.42), que:

$$\nu ||u_{\varepsilon m}(0)||^2 \leq d_3 \leq d_4 < \frac{\nu^3}{c^2},$$

e então

$$\nu - c||u_{\varepsilon m}(0)|| > 0.$$

Deduzimos desta desigualdade que $\nu - c||u_{\varepsilon m}(t)||$ permanece positiva em algum intervalo com a origem em 0. Denotemos por $T_{\varepsilon m}$ o primeiro $t < T$ tal que:

$$\nu - c||u_{\varepsilon m}(t)|| = 0,$$

ou, se isto não acontecer, $T_{\varepsilon m} = T$. Então,

$$(1.43) \quad \nu - c||u_{\varepsilon m}(t)|| \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T_{\varepsilon m}.$$

Com (1.43), concluímos de (1.38) que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 &\leq 2|f'_\varepsilon(t)| |u'_{\varepsilon m}(t)| \\ \frac{d}{dt} (1 + |u'_{\varepsilon m}(t)|^2) &\leq |f'_\varepsilon(t)| (1 + |u'_{\varepsilon m}(t)|^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ (1 + |u'_{\varepsilon m}(t)|^2) \exp \left(- \int_0^t |f'_\varepsilon(s)| ds \right) \right\} &\leq 0, \\ 1 + |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 &\leq (1 + |u'_{\varepsilon m}(0)|^2) \exp \left(\int_0^t |f'_\varepsilon(s)| ds \right), \end{aligned}$$

e por (1.36),

$$(1.44) \quad 1 + |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 \leq (1 + d_1^2) \exp \left(\int_0^T |f'_\varepsilon(s)| ds \right), \quad 0 \leq t \leq T_{\varepsilon m}.$$

De (1.39), (1.42) e (1.44), obtemos que:

$$\nu ||u_{\varepsilon m}(t)||^2 \leq d_4, \quad 0 \leq t \leq T_{\varepsilon m},$$

ou ainda,

$$\nu - c||u_{\varepsilon m}(t)|| \geq \nu - c\sqrt{\frac{d_4}{\nu}}, \quad 0 \leq t \leq T_{\varepsilon m}.$$

Então $T_{\varepsilon m} = T$, e (1.38) implica que:

$$\frac{d}{dt} |u'_{\varepsilon m}(t)|^2 + 2 \left(\nu - c\sqrt{\frac{d_4}{\nu}} \right) ||u'_{\varepsilon m}(t)||^2 \leq 2|f'_\varepsilon(t)| |u'_\varepsilon(t)|, \quad 0 \leq t \leq T,$$

e facilmente deduzimos desta relação que:

$$(1.45) \quad u'_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^2(0, T; V_\varepsilon) \cap L^\infty(0, T; H_\varepsilon).$$

Etapa ii: Passagem ao limite da equação.

Temos das Estimativa 1 e da Estimativa 3 que:

$$(1.46) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^2(0, T; V_\varepsilon), \text{ independentemente de } m, \text{ e} \\ u'_{\varepsilon m} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_\varepsilon) \hookrightarrow L^2(0, T; H_\varepsilon), \text{ independentemente de } m. \end{cases}$$

Assim, do Teorema de Compacidade de Aubin-Lions, obtemos para uma subsequência ainda denotada pelo mesmo símbolo que:

$$(1.47) \quad u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_\varepsilon, \text{ forte, em } L^2(0, T; H_\varepsilon),$$

e das limitações em (1.46), ainda para uma subsequência denotada pelo mesmo símbolo, segue-se que:

$$(1.48) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_\varepsilon, \text{ fraco, em } L^2(0, T; V_\varepsilon) \\ u'_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_\varepsilon, \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_\varepsilon) \end{cases}$$

Os resultados de convergência (1.47) e (1.48) possibilitam-nos passar ao limite da equação.

Seja agora $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$. Multiplicamos a equação aproximada (1.7)₁ por $\psi(t)$, e isto resulta na equação:

$$(1.49) \quad \begin{aligned} & \int_0^T (u'_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) \psi'(t) dt + \nu \int_0^T ((u_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon)) \psi(t) dt + \\ & + \int_0^T b(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) \psi(t) dt = \int_0^T (f_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Passar ao limite dos termos lineares é fácil, porém para o termo não linear necessitamos fazer uso do Lema 1.4 que garante que:

$$\int_0^T b(u_{\varepsilon m}(t), u_{\varepsilon m}(t), w_j^\varepsilon) \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon) \psi(t) dt.$$

Assim, no limite quando $m \rightarrow \infty$, obtemos a equação:

$$(1.50) \quad \int_0^T (u'_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon) \psi'(t) dt + \nu \int_0^T ((u_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon)) \psi(t) dt + \\ + \int_0^T b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon) \psi(t) dt = \int_0^T (f_\varepsilon(t), w_j^\varepsilon) \psi(t) dt,$$

que é satisfeita, por linearidade, para qualquer combinação linear finita de w_j^ε , e pelo argumento da continuidade, (1.50) é ainda verdadeira para qualquer $v \in V_\varepsilon$.

Assim, de (1.50), temos que:

$$(1.51) \quad \int_0^T (u'_\varepsilon(t), v) \psi'(t) dt + \nu \int_0^T ((u_\varepsilon(t), v)) \psi(t) dt + \\ + \int_0^T b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f_\varepsilon(t), v) \psi(t) dt,$$

para toda $v \in V_\varepsilon$ e $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$. Portanto, de (1.51), concluímos que:

$$u'_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); V'_\varepsilon).$$

Mas, como $u'_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_\varepsilon)$, $\Delta u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)$, $B u_\varepsilon \in L^4(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$ e $f_\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_\varepsilon)$, obtemos que:

$$(1.52) \quad u'_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + B u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } L^4(0, T; V'_\varepsilon).$$

Etapa iii: Introdução da pressão.

De (1.51), temos que:

$$(1.53) \quad (u'_\varepsilon(t), v) + \nu((u_\varepsilon(t), v)) + (B u_\varepsilon(t), v) = (f_\varepsilon(t), v),$$

q.s. em $[0, T]$, $\forall v \in V_\varepsilon$.

Definamos agora:

$$U_\varepsilon(t) = \int_0^t u_\varepsilon(s) ds, \quad B_\varepsilon(t) = \int_0^t B u_\varepsilon(s) ds, \quad F_\varepsilon(t) = \int_0^t f_\varepsilon(s) ds.$$

Assim, temos que:

$$U_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon, F_\varepsilon \in C^0([0, T]; V'_\varepsilon).$$

Integrando (1.53) de 0 a t , obtemos que:

$$(u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon^0, v) + \nu((U_\varepsilon(t), v)) + (\mathcal{B}_\varepsilon(t), v) = (F_\varepsilon(t), v), \quad \forall v \in V_\varepsilon, \forall t \in [0, T].$$

Dai, segue-se que:

$$\langle u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon^0 - \nu \Delta U_\varepsilon(t) + \mathcal{B}_\varepsilon(t) - F_\varepsilon(t), v \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} = 0,$$

$\forall v \in V_\varepsilon, \forall t \in [0, T]$.

Pela Proposição I.1.1, de Temam [39, p. 14], para cada $t \in [0, T]$, existe $G_\varepsilon(t) \in \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon)$ tal que:

$$(1.54) \quad u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon^0 - \nu \Delta U_\varepsilon(t) + \mathcal{B}_\varepsilon(t) - F_\varepsilon(t) = \text{grad } G_\varepsilon(t).$$

Pela Proposição I.1.2-ii, de Temam [39], $G_\varepsilon(t) \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, pois $D_i G_\varepsilon(t) \in H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Assim, $\text{grad } G_\varepsilon \in C^0([0, T]; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)$ e portanto $G_\varepsilon \in C^0([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))$. Isto nos possibilita derivar (1.54), na variável t , no sentido das distribuições em Q_ε . Colocando-se $p_\varepsilon = \frac{-\partial G_\varepsilon}{\partial t}$, resulta que:

$$(1.55) \quad u'_\varepsilon(t) - \nu \Delta u_\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^n (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \text{grad } p_\varepsilon = f_\varepsilon, \text{ em } L^4(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n).$$

Etapa iv: Verificação da condição inicial.

De (1.17) e (1.21), na Estimativa 2, temos que:

$$(1.56) \quad u_{\varepsilon m} \xrightarrow{*} u_\varepsilon, \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V_\varepsilon),$$

e de (1.34) e (1.45), na Estimativa 3, temos que:

$$(1.57) \quad u'_{\varepsilon m} \xrightarrow{*} u'_\varepsilon, \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_\varepsilon) \hookrightarrow L^1(0, T; H_\varepsilon).$$

Assim, de (1.56) e (1.57), pelo Corolário A.1.2, temos que:

$$\langle \theta, u_{\varepsilon m}(t) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \longrightarrow \langle \theta, u_\varepsilon(t) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$, e para qualquer $t \in [0, T]$.

Em particular, para $t = 0$,

$$\langle \theta, u_{\varepsilon m}(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \longrightarrow \langle \theta, u_\varepsilon(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$.

Mas, de (1.7)₂,

$$u_{\varepsilon m}(0) \rightharpoonup u_\varepsilon^0, \quad \text{fraco, em } V_\varepsilon,$$

isto é,

$$\langle \theta, u_{\varepsilon m}(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon} \longrightarrow \langle \theta, u_\varepsilon(0) \rangle_{V'_\varepsilon, V_\varepsilon},$$

para qualquer $\theta \in V'_\varepsilon$.

Da unicidade do limite, e do Teorema de Hahn-Banach, segue-se que $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0$.

Etapa v: Unicidade.

Vamos primeiro ao caso $n = 2$. Sejam u_ε e $\hat{u}_\varepsilon$ duas soluções nas condições do Teorema 1.6, e seja $w_\varepsilon = u_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon$. Então:

$$(1.58) \quad (w'_\varepsilon(t), v) + \nu((w_\varepsilon(t), v)) + b(u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), v) - b(\hat{u}_\varepsilon(t), \hat{u}_\varepsilon(t), v) = 0,$$

$\forall v \in V$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, t)$,

$$w_\varepsilon(0) = 0.$$

Temos que,

$$(1.59) \quad b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, v) - b(\hat{u}_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon, v) = b(w_\varepsilon, u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, w_\varepsilon, v) - b(w_\varepsilon, w_\varepsilon, v).$$

Assim, substituindo (1.59) em (1.58), e fazendo $v = w_\varepsilon(t)$, obtemos que

$$(1.60) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_\varepsilon(t)|^2 + \nu ||w_\varepsilon(t)||^2 = -b(w_\varepsilon, u_\varepsilon, w_\varepsilon) \leq \\ & \leq \sum_{i,j=1}^2 |w_{\varepsilon j}|_{L^4(\Omega_\varepsilon)}^{1/2} \left| \frac{\partial u_{\varepsilon i}}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |w_{\varepsilon i}|_{L^4(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

pela Desigualdade de Hölder.

Agora, pelo Lema 1.2, temos que:

$$\|\nu\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} \leq 2^{1/4} \|\nu\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/2} \|\operatorname{grad} \nu\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/2}, \quad \forall \nu \in H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Assim, de (1.60), obtemos que:

$$(1.61) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_\varepsilon(t)|^2 + \nu \|w_\varepsilon(t)\|^2 \leq c \sum_{i,j=1}^2 |w_{\varepsilon j}|^{1/2} \|w_{\varepsilon j}\|^{1/2} \|u_{\varepsilon i}\| |w_{\varepsilon i}|^{1/2} \|w_{\varepsilon i}\|^{1/2}.$$

Temos que:

$$\|u_{\varepsilon i}\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon\|_{V_\varepsilon}, \quad \forall u_\varepsilon = (u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2}) \in V_\varepsilon, \quad e$$

$$|w_{\varepsilon j}|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/2} \leq |w_\varepsilon|_{H_\varepsilon}^{1/2}, \quad \forall w_\varepsilon = (w_{\varepsilon 1}, w_{\varepsilon 2}) \in H_\varepsilon.$$

Logo, de (1.61), concluímos que:

$$(1.62) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_\varepsilon(t)|^2 + \nu \|w_\varepsilon(t)\|^2 \leq c |w_\varepsilon| \|w_\varepsilon\| \|u_\varepsilon\|.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} |w_\varepsilon(t)|^2 + 2\nu \|w_\varepsilon(t)\|^2 \leq 2\nu |w_\varepsilon(t)|^2 + \frac{c^2}{2\nu} |w_\varepsilon(t)|^2 \|u_\varepsilon(t)\|^2,$$

ou seja,

$$(1.63) \quad \frac{d}{dt} |w_\varepsilon(t)|^2 \leq \theta_\varepsilon(t) |w_\varepsilon(t)|^2, \quad \text{onde} \quad \theta_\varepsilon(t) = \frac{c^2}{2\nu} \|u_\varepsilon(t)\|^2.$$

De (1.63), pelo Lema de Gronwall, resulta que

$$w_\varepsilon(t) = 0, \quad \text{em} \quad [0, T].$$

Agora, vamos ao caso $n = 3$. Temos de (1.60), que:

$$(1.64) \quad \frac{d}{dt} |w_\varepsilon(t)|^2 + 2\nu \|w_\varepsilon(t)\|^2 = -2b(w_\varepsilon, u_\varepsilon, w_\varepsilon).$$

Então limitamos o lado direito de (1.64), por:

$$(1.65) \quad |b(w_\varepsilon, u_\varepsilon, w_\varepsilon)| \leq c \|w_\varepsilon\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} \|w_\varepsilon\|,$$

pela desigualdade de Hölder, e usando o fato de que

$$b(w_\varepsilon, u_\varepsilon, w_\varepsilon) = -b(w_\varepsilon, w_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

Agora, pelo Lema 1.5, temos que:

$$(1.66) \quad \|\nu\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} \leq 2^{1/2} \|\nu\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{1/4} \|\text{grad } \nu\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{3/4}, \quad \forall \nu \in H_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Assim, de (1.65) e (1.66) obtemos que:

$$(1.67) \quad \begin{aligned} |b(w_\varepsilon, u_\varepsilon, w_\varepsilon)| &\leq c \|w_\varepsilon\|^{1/4} \|w_\varepsilon\|^{7/4} \|u_\varepsilon\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} \leq \\ &\leq \nu \|w_\varepsilon(t)\|^2 + c \|w_\varepsilon(t)\|^2 \|u_\varepsilon(t)\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)}^8. \end{aligned}$$

Daí, resulta que:

$$\frac{d}{dt} |w_\varepsilon(t)|^2 \leq \theta_\varepsilon(t) |w_\varepsilon(t)|^2, \quad \text{onde } \theta_\varepsilon = c \|u_\varepsilon(t)\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)}^8.$$

Como $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon) \hookrightarrow L^8(0, T; [L^4(\Omega_\varepsilon)]^n)$, tem-se que a função $t \mapsto \|u_\varepsilon(t)\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)}^8$ é integrável e a demonstração se conclui como no caso $n = 2$.

Etapas vi: Final da demonstração.

Demonstramos pela extração de uma subsequência ainda denotada por $u_{\varepsilon m}$, que a subsequência $u_{\varepsilon m}$ satisfaz (1.56) e (1.48)₂, com o limite u_ε satisfazendo (1.5).

A unicidade da solução de (1.3)-(1.5), permite-nos deduzir que toda a sequência $(u_{\varepsilon m})$ satisfaz (1.56) e (1.48)₂, e uma vez que $u_\varepsilon \in L^2(0, T; V_\varepsilon \cap [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$ e $u'_\varepsilon \in L^2(0, T; V_\varepsilon)$ concluimos que $u_\varepsilon \in C^0([0, T]; V_\varepsilon)$.

Teorema 1.7. Suponha que (I.2.1) seja satisfeita e considere uma sequência de dados satisfazendo:

$$(1.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{u}_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0, \quad \text{fraco, em } V \cap [H^2(\Omega)]^n \\ \widetilde{f}_\varepsilon \xrightarrow{*} f, \quad \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H) \\ \widetilde{f}'_\varepsilon \rightharpoonup f', \quad \text{fraco, em } L^2(0, T; H) \\ \widetilde{f}_\varepsilon(0) \rightharpoonup f(0), \quad \text{fraco, em } H \end{array} \right.$$

Então, a sequência de soluções do problema do Teorema 1.4 satisfaz:

$$(1.69) \quad \left| \begin{array}{l} \widetilde{u_\varepsilon} \xrightarrow{*} u, \quad \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V) \\ P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p, \quad \text{fraco, em } L^4(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R}) \end{array} \right|$$

onde Q_ε é o operador, prolongamento da pressão, definido na Proposição A.2.2, e (u, p) é a única solução do sistema homogeneizado:

$$(1.70) \quad \left| \begin{array}{l} u' - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nu M u + \nabla p = f, \quad \text{em } Q \\ \operatorname{div} u = 0, \quad \text{em } Q \\ u = 0, \quad \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = u^0, \quad \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0, T]; V) \end{array} \right|$$

Demonstração: Procederemos a demonstração em seis etapas.

Etapa i: Estimativas a priori.

Temos da Estimativa 2, e da Estimativa 3, do Teorema 1.6, que:

$$\left| \begin{array}{l} u_{\varepsilon m} \xrightarrow{*} u_\varepsilon, \quad \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V_\varepsilon), \text{ e} \\ u'_{\varepsilon m} \rightharpoonup u'_\varepsilon, \quad \text{fraco, em } L^2(0, T; V_\varepsilon) \end{array} \right|$$

Assim, do Teorema de Banach-Steinhaus, temos que:

$$(1.71) \quad \left| \begin{array}{l} \|\widetilde{u_\varepsilon}\|_{L^\infty(0, T; V)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_{\varepsilon m}\|_{L^\infty(0, T; V_\varepsilon)} \leq c, \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \|\widetilde{u'_\varepsilon}\|_{L^2(0, T; V)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u'_{\varepsilon m}\|_{L^2(0, T; V_\varepsilon)} \leq c, \quad \forall \varepsilon > 0 \end{array} \right|$$

Assim, resulta que:

$$\left| \begin{array}{l} \widetilde{u_\varepsilon} \text{ é limitada, em } L^\infty(0, T; V), \text{ independentemente de } \varepsilon > 0 \\ \widetilde{u'_\varepsilon} \text{ é limitada, em } L^2(0, T; V), \text{ independentemente de } \varepsilon > 0 \end{array} \right|$$

Logo, existe subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que:

$$(1.72) \quad \begin{cases} \tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{*} u, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V) \\ \widetilde{u'_\varepsilon} \rightharpoonup u', & \text{fraco, em } L^2(0, T; V) \end{cases}$$

Agora, de (1.55), obtemos que:

$$(1.73) \quad \nabla p_\varepsilon = -u'_\varepsilon + \nu \Delta u_\varepsilon - Bu_\varepsilon + f_\varepsilon, \quad \text{em } L^4(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \cap L^2(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$$

Da limitação de cada termo do lado direito de (1.73), em $L^4(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n) \cap L^2(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)$, independentemente de ε , segue-se que ∇p_ε é limitado nesse espaço, em particular:

$$\|\nabla p_\varepsilon\|_{L^4(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq c, \quad \text{independentemente de } \varepsilon.$$

Mas, como,

$$\|p_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}} \leq c \|\nabla p_\varepsilon(t)\|_{[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n}, \quad \text{q.s. em } t \in [0, T]$$

(cf. Temam [39, Lema I.2.-ii, pág. 15]) e ainda do Teorema A.2.2-ii, temos que:

$$\|Q_\varepsilon(p_\varepsilon(t))\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}} \leq c \|p_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}}, \quad \text{q.s. em } t \in [0, T].$$

Assim, obtemos que:

$$\|Q_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{L^4(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R})} \leq c \|p_\varepsilon\|_{L^4(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R})} \leq c \|\nabla p_\varepsilon\|_{L^4(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq c,$$

independentemente de ε .

Logo, existe subsucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que:

$$(1.75) \quad Q_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p, \quad \text{fraco, em } L^4(0, T; L^2(\Omega)/\mathbf{R})$$

Etapa ii: Passagem ao limite.

Do Teorema 1.6, temos que

$$(1.76) \quad \begin{cases} u'_\varepsilon - \nu \nabla u_\varepsilon + Bu_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, & \text{em } Q_\varepsilon \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, & \text{em } Q_\varepsilon \end{cases}$$

Compondo a equação (1.76) com $\psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x)$, onde $v \in \mathcal{D}(0, T)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e w_k^ε como no quadro funcional abstrato (1.2.1), obtemos:

$$(1.77) \quad \begin{aligned} & \langle u'_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon} + \nu \langle -\Delta u_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon} + \\ & + \langle Bu_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon} + \langle \nabla p_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon} = \\ & = \langle f_\varepsilon, \psi(t)w_k^\varepsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q_\varepsilon}$, aqui e daqui em diante, denotará a dualidade entre $L^2(0, T; [H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n)$ e $L^2(0, T; [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n)$. Procedendo como na passagem ao limite do Teorema 1.3.4, obtemos que:

$$(1.78) \quad \begin{aligned} & \langle u'_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} + \nu \langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \psi u_\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} - \\ & - \nu \int_{Q_\varepsilon} \nabla w_k^\varepsilon \cdot \psi u_\varepsilon \nabla \varphi \, dx dt + \nu \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi w_k^\varepsilon \nabla \varphi \, dx dt + \\ & + \langle Bu_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} - \int_{Q_\varepsilon} p_\varepsilon \psi w_k^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ & + \nu \int_{Q_\varepsilon} q_k^\varepsilon \psi u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx dt = \langle f_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Análise dos termos, em (1.78):

1º Termo: Aplicando Fubini, obtemos que:

$$(1.79) \quad \langle u'_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} = \int_{\Omega} w_k^\varepsilon \varphi \cdot \left(\int_0^T \psi \widetilde{u'_\varepsilon} \, dt \right) dx.$$

Mas, da hipótese (1.2.1-iii)₂, e do Teorema de Rellich-Kondrachoff, para uma sub-sucessão, ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos que:

$$(1.80) \quad w_k^\varepsilon \rightharpoonup \varepsilon_k, \quad \text{forte, em } [L^2(\Omega)]^n,$$

e de (1.72)₂,

$$\int_0^T \psi \widetilde{u'_\varepsilon} \, dt \rightharpoonup \int_0^T \psi u' \, dt, \quad \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n$$

e ainda para uma subsucessão, temos que:

$$(1.81) \quad \int_0^T \psi \widetilde{u'_\varepsilon} dt \rightarrow \int_0^T \psi u' dt, \quad \text{forte, em } [L^2(\Omega)]^n.$$

Assim, de (1.80) e (1.81), obtemos a seguinte convergência em (1.79):

$$(1.82) \quad \langle u'_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} \rightarrow \int_\Omega e_k \varphi \cdot \left(\int_0^T \psi u' dt \right) dx.$$

O único termo, além do primeiro termo, que é diferente, em relação à equação do Teorema 1.3.4, é o quinto termo, assim analisaremos apenas mais este termo.

5º Termo: Temos que:

$$(1.83) \quad \langle Bu_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} = \int_0^T \psi b(u_\varepsilon, u_\varepsilon, w_k^\varepsilon \varphi) dt,$$

onde

$$b(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon, w_k^\varepsilon \varphi) = \langle (\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \tilde{u}_\varepsilon, w_k^\varepsilon \varphi \rangle_\Omega.$$

Para analisarmos a convergência deste termo, necessitaremos do seguinte lema.

Lema 1.8. Suponha que $n = 2$ ou 3 , e seja uma sequência (φ_ε) tal que:

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi, & \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n, \text{ e} \\ \nabla \cdot \varphi_\varepsilon = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Então,

$$(\varphi_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi_\varepsilon \rightarrow (\varphi \cdot \nabla) \varphi, \quad \text{forte, em } [H^{-1}(\Omega)]^n$$

Demonstração: Cf. G. Allaire [1, Lema I.7.1].

De (1.72), temos que:

$$\begin{cases} \tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{*} u, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V) \\ \widetilde{u'_\varepsilon} \rightharpoonup u', & \text{fraco, em } L^1(0, T; H) \end{cases}$$

Assim, da Proposição A.1.1, obtemos que:

$$(1.84) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), & \text{fraco, em } V \hookrightarrow [H_0^1(\Omega)]^n, \text{ e} \\ \nabla \cdot \tilde{u}_\varepsilon(t) = 0, & \text{em } \Omega, \text{ para todo } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Logo, pelo Lema 1.8, temos que:

$$(1.85) \quad (\tilde{u}_\varepsilon(t) \cdot \nabla) \tilde{u}_\varepsilon(t) \rightarrow (u(t) \cdot \nabla) u(t), \text{ forte, em } [H^{-1}(\Omega)]^n, \forall t \in [0, T]$$

e

$$(1.86) \quad w_k^\varepsilon \varphi \rightharpoonup e_k \varphi, \text{ fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n,$$

de (I.2.1-iii)₂.

Portanto, de (1.85) e (1.86), obtemos que:

$$\psi(t) \langle (\tilde{u}_\varepsilon(t) \cdot \nabla) \tilde{u}_\varepsilon(t), w_k^\varepsilon \varphi \rangle_\Omega \rightarrow \psi(t) \langle (u(t) \cdot \nabla) u(t), e_k \varphi \rangle_\Omega,$$

$\forall t \in [0, T]$.

Como, do Lema 1.1,

$$| \langle (\tilde{u}_\varepsilon(t) \cdot \nabla) \tilde{u}_\varepsilon(t), w_k^\varepsilon \varphi \rangle_\Omega | = | b(\tilde{u}_\varepsilon(t), \tilde{u}_\varepsilon(t), w_k^\varepsilon, \varphi) | \leq | g(t) |^4 \in L^1(0, T),$$

logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos a seguinte convergência em (1.83):

$$(1.87) \quad \langle Bu_\varepsilon, \psi w_k^\varepsilon \varphi \rangle_{Q_\varepsilon} \rightarrow \int_0^T \psi \langle (u \cdot \nabla) u, e_k \varphi \rangle_\Omega dt.$$

Agora, passando ao limite da equação (1.78), fazendo $\varphi = \varphi_k$, somando em k , considerando $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$, combinando (1.82) e (1.87), e aplicando Fubini, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_\Omega u' \cdot \Phi dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0, T)} + \langle \nu \langle M\Phi, u \rangle_\Omega, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0, T)} + \\ & + \left\langle \nu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \Phi dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0, T)} + \langle \langle Bu, \Phi \rangle_\Omega, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0, T)} \\ & \langle \langle \nabla p, \Phi \rangle_\Omega, \psi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0, T)} = \left\langle \int_\Omega f \cdot \Phi dx, \psi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(0, T)}. \end{aligned}$$

Visto que M é simétrica, resulta que:

$$(1.88) \quad (u' \Phi) + \nu \langle Mu, \Phi \rangle + \nu \langle (u, \Phi) \rangle + \langle Bu, \Phi \rangle_{\Omega} + \langle \nabla p, \Phi \rangle_{\Omega} = \langle f, \Phi \rangle, \\ \text{em } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall \Phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n.$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, segue-se que (1.88) é válida para todo $v \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

Etapla iii: Verificação da condição inicial.

De (1.84)₁, temos que:

$$\langle \theta, \tilde{u}_\varepsilon(t) \rangle_{V', V} \rightarrow \langle \theta, u(t) \rangle_{V', V},$$

para qualquer $\theta \in V'$, e para qualquer $t \in [0, T]$. Em particular, para $t = 0$,

$$\langle \theta, \tilde{u}_\varepsilon(0) \rangle_{V', V} \rightarrow \langle \theta, u(0) \rangle_{V', V},$$

para qualquer $\theta \in V'$.

Mas, de (1.68)₁,

$$\tilde{u}_\varepsilon(0) \rightharpoonup u^0, \quad \text{fraco, em } V,$$

isto é,

$$\langle \theta, \tilde{u}_\varepsilon(0) \rangle_{V', V} \rightarrow \langle \theta, u^0 \rangle_{V', V},$$

para qualquer $\theta \in V'$.

Da unicidade do limite, e do Teorema de Hahn-Banach, tem-se que $u(0) = u^0$.

Etapla iv: Unicidade.

Sejam (u_1, p_1) e (u_2, p_2) duas soluções dadas pelo Teorema 1.7. Então o par $(w, q) = (u - \tilde{u}, p - \hat{p})$ é uma solução de:

$$(1.89) \quad \begin{cases} w' - \nu \Delta w + Bu - B\tilde{u} + \nu Mw + \nabla q = 0, & \text{sobre } [0, T] \\ \operatorname{div} w = 0, & \text{em } Q \\ w = 0, & \text{sobre } \Sigma \\ w(0) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Assim compondo a equação (1.89)₁ com $v \in [H_0^1(\Omega)]^n$, obtém-se que:

$$\langle w'(t), v \rangle_\Omega + \nu a(w(t), v) + b(u, u, v) = b(\hat{u}, \hat{u}, v) + \nu \langle Mw(t), v \rangle_\Omega + \langle \nabla q, v \rangle = 0.$$

Daí resulta em que:

$$(1.90) \quad \begin{aligned} \langle w'(t), v \rangle_\Omega + \nu a(w(t), v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) \\ - b(w, w, v) + \langle Mw(t), v \rangle_\Omega + \langle \nabla p, v \rangle_\Omega = 0, \end{aligned}$$

$\forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$, uma vez que $b(u, u, v) - b(\hat{u}, \hat{u}, v) = b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v)$.

Fazendo em (1.90), $v = w(t)$, obtemos:

$$(1.91) \quad \frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\nu||w(t)||^2 + 2\nu \langle Mw(t), w(t) \rangle_\Omega \leq 2b(w, u, w) = 2b(w, w, u).$$

Então limitamos o lado direito por:

$$(1.92) \quad |b(w, w, u)| \leq C_0 ||w||_{L^4(\Omega)} ||w||_{H_0^1(\Omega)} ||u||_{L^4(\Omega)},$$

pela Desigualdade de Hölder.

Daí, fazendo uso do Lema 1.5, no caso de $n = 3$, e do Lema 1.2, no caso de $n = 2$, resulta que:

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq f(t)|w(t)|^2,$$

onde a função $t \mapsto f(t)$ é integrável, donde concluímos que:

$$w(t) = 0, \quad \text{em } [0, T].$$

Etapa v: Regularidade da solução.

Temos que $u_\varepsilon \in C^0([0, T]; V_\varepsilon)$, assim $\tilde{u}_\varepsilon \in C^0([0, T], V)$. Agora, como:

$$\tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{*} u, \quad \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V)$$

concluímos que $u \in C^0([0, T]; V)$.

Etapa vi: Final da demonstração.

Demonstramos, pela extração de uma subsequência (ainda denotada por ε), que as subsequências u_ε e $Q_\varepsilon(p_\varepsilon)$ satisfazem (1.69), com o limite (u, p) satisfazendo (1.70). A unicidade da solução de (1.70) permite-nos deduzir que a sequência inteira satisfaz (1.69). Isto completa a demonstração. ■

Teorema 1.9. Suponha que as hipóteses do Teorema 1.7 sejam satisfeitas com a hipótese adicional de que:

$$\widetilde{u_\varepsilon^0} \rightharpoonup u^0, \quad \text{fraco, em } W,$$

onde

$$W = \text{fecho de } V \text{ em } [H_0^2(\Omega)]^n,$$

sendo,

$$V = \{u \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n; \operatorname{div} u = 0\}.$$

Então, para qualquer $t \in [0, T]$, fixado, temos:

$$(1.93) \quad \tilde{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \quad \text{fraco, em } V$$

$$(1.94) \quad \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \langle Mu(x, t), u(x, t) \rangle_{\Omega} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2 dx.$$

$$(1.95) \quad \int_0^t \int_{\Omega} |Au(x, s)|^2 dx ds \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |Au_\varepsilon(x, s)|^2 dx ds$$

$$(1.96) \quad E(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(t),$$

onde a energia $E_\varepsilon(\cdot)$, para qualquer $t \in [0, T]$, é definida por:

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} |\nabla u_\varepsilon(t)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t |Au_\varepsilon(s)|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^n}^2 ds$$

e

$$E(t) = \frac{1}{2} |\nabla u(t)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t |Au(s)|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 ds + \frac{1}{2} \langle Mu(t), u(t) \rangle_{\Omega}.$$

Demonstração: Temos de (1.84)₁ que:

$$\hat{u}_\varepsilon(t) \rightharpoonup u(t), \quad \text{fraco, em } V, \quad \forall t \in [0, T],$$

o que nos dá (1.93). Para a obtenção de (1.94), basta aplicar a Proposição A.2.1.

Agora, da Estimativa 2 do Teorema 1.6, (ver p.ex. (1.18)), temos que, em particular:

$$u_{\varepsilon m} \text{ é limitada, em } L^2(0, T; [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n), \quad t \in [0, T],$$

e portanto,

$$u_{\varepsilon m} \rightharpoonup u_\varepsilon, \quad \text{fraco, em } L^2(0, t; [H^2(\Omega_\varepsilon)]^n), \quad t \in [0, T],$$

ou ainda,

$$Au_{\varepsilon m} \rightharpoonup Au_\varepsilon, \quad \text{fraco, em } L^2(0, t; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n), \quad t \in [0, T].$$

Assim, da convexidade e da semicontinuidade inferior da norma, temos que:

$$\left| \widetilde{Au_\varepsilon} \right|_{L^2(0, t; [L^2(\Omega)]^n)} = |Au_\varepsilon|_{L^2(0, t; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |Au_{\varepsilon m}|_{L^2(0, t; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^n)} < c$$

para $t \in [0, T]$, independentemente de ε , e daí resulta, para uma subsucessão, que:

$$\widetilde{Au_\varepsilon} \rightharpoonup Au, \quad \text{fraco, em } L^2(0, t; [L^2(\Omega)]^n),$$

e por conseguinte, obtemos que:

$$\int_0^t \int_\Omega |Au(x, s)|^2 dx ds \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_\Omega |\widetilde{Au_\varepsilon}(x, s)|^2 dx ds,$$

o que nos dá (1.95).

Agora, somando as desigualdades (1.94) e (1.95), obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |\nabla u(x, t)|^2 dx + \langle Mu(x, t), u(x, t) \rangle_\Omega + \int_0^t \int_\Omega |Au(x, s)|^2 dx ds \leq \\ & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(s, t)|^2 dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\widetilde{Au_\varepsilon}(x, s)|^2 dx ds \leq \\ & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} |\widetilde{Au_\varepsilon}(x, s)|^2 dx ds \right), \end{aligned}$$

e assim obtemos que:

$$E(t) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(t),$$

o que nos dá (1.96). ■

Apêndice A

A.1 – Alguns Resultados de Compacidade

Proposição A.1.1. Sejam X e Y espaços de Banach reflexivos com $X \hookrightarrow Y$ compacta e densamente, e suponha que:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_\varepsilon \xrightarrow{*} g, \text{ fraco estrela, em } L^\infty(0, T; X) \\ g'_\varepsilon \rightarrow g', \text{ fraco, em } L^1(0, T; Y) \end{array} \right.$$

Então, g_ε converge para g , em $C^0([0, T]; X)$, i.e.,

$$(A.1.1) \quad \langle g_\varepsilon(\cdot), v \rangle_{X, X'} \rightarrow \langle g(\cdot), v \rangle_{X, X'}, \text{ em } C^0([0, T]),$$

para todo $v \in X'$.

Demonstração: (Ver em D. Cioranescu, F. Murat, P. Donato e E. Zuazua [9, p.262]).

Corolário A.1.2. Suponha que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_\varepsilon \xrightarrow{*} v, \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; V) \\ \tilde{v}'_\varepsilon \xrightarrow{*} v', \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H) \hookrightarrow L^1(0, T; H) \end{array} \right.$$

Então:

$$(A.1.2) \quad \langle \theta, \tilde{v}_\varepsilon(\cdot) \rangle_\Omega \rightarrow \langle \theta, v(\cdot) \rangle_\Omega, \text{ em } C^0([0, T]),$$

para qualquer $\theta \in V'$.

Demonstração: Temos que $V \hookrightarrow H$, compacta e densamente; assim, fazendo $g_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon$, $X = V$, e $Y = H$, da Proposição A.1.1, obtemos o resultado.

A.2. – Revisão do Problema de Stokes Estacionário

Proposição A.2.1: Suponha que as hipóteses $(2.1)_i$ a $(2.1)_v$ sejam satisfeitas. Então, para toda sequência z_ε tal que:

$$(A.2.1) \quad \begin{cases} z_\varepsilon \rightharpoonup z, & \text{fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n \\ \nabla \cdot z_\varepsilon \rightarrow \nabla \cdot z, & \text{forte, em } L^2(\Omega) \\ z_\varepsilon = 0, & \text{sobre os buracos } (T_i)_{i=1}^{N(\varepsilon)}, \end{cases}$$

temos que:

$$(A.2.2) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla z_\varepsilon|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla z|^2 + \langle Mz, z \rangle_{\Omega}.$$

Demonstração: (Ver em G. Allaire [1, p.45] e [2, p.16]).

Operador de extensão para a pressão.

Seguindo a idéia de Tartar (ver [37]), constrói-se um operador de extensão para a pressão baseado na hipótese $(2.1)_{vi}$.

Proposição A.2.2. Se existe um operador linear R_ε satisfazendo $(2.1)_{vi}$, então o operador Q_ε definido por:

$$(A.2.3) \quad \langle \nabla [P_\varepsilon(p_\varepsilon)], u \rangle_{\Omega} = \langle \nabla p_\varepsilon, R_\varepsilon u \rangle_{\Omega_\varepsilon}$$

para cada $u \in [H_0^1(\Omega)]^n$, é um operador linear contínuo de $L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}$ em $L^2(\Omega)/\mathbf{R}$ tal que para cada $p_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}$, tem-se:

- i) $P_\varepsilon(p_\varepsilon) = p_\varepsilon$, em $L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}$.
- ii) $\|P_\varepsilon(p_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)/\mathbf{R}} \leq c \|p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}}$.
- iii) $\|\nabla [P_\varepsilon(p_\varepsilon)]\|_{[H^{-1}(\Omega)]^n} \leq c \|\nabla p_\varepsilon\|_{[H^{-1}(\Omega_\varepsilon)]^n}$,

onde c é uma constante que não depende de p_ε ou ε .

Demonstração: (Ver em G. Allaire [1, Prop. 1.2.5, p.25] e [2, Prop. 1.1.4, p.9]).

Proposição A.2.3. Seja $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ solução do sistema de Stokes (A.2.4):

$$(A.2.4) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^n \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbf{R}] \text{ tal que:} \\ \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f, \text{ em } \Omega_\varepsilon, \text{ com } f \in [L^2(\Omega)]^n \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0, \text{ em } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

Seja $\tilde{u}_\varepsilon$ o prolongamento da velocidade por 0 em $\Omega - \Omega_\varepsilon$.

Seja $P_\varepsilon(p_\varepsilon)$ o prolongamento da pressão, onde P_ε é o operador definido na Proposição A.2.2. Supondo-se que a hipótese (2.1) seja satisfeita, e notando-se que M é a matriz composta pelos vetores coluna $(\mu_k)_{k=1}$ (ver Lema 1.2.1), então:

$$(\tilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon)) \rightharpoonup (u, p), \text{ fraco, em } [H_0^1(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)/\mathbf{R}],$$

onde (u, p) é a única solução do sistema homogeneizado (A.2.5):

$$(A.2.5) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u, p) \in [H_0^1(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)/\mathbf{R}] \text{ tal que:} \\ \nabla p - \Delta u + Mu = f, \text{ em } \Omega \\ \nabla \cdot u = 0, \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$(A.2.6) \quad |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \rightarrow |\nabla u|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 + \langle Mu, u \rangle_\Omega$$

Demonstração: (Ver em G. Allaire [1, Th.1.3.1 e Th. 1.4.3, p.35 e p.50] e [2, Th.1.1.8 e Prop. 1.2.2, p.12 e p.16]).

A.3 – Resultados Básicos

Teorema A.3.1 (Dunford). Seja (Ω, Σ, μ) um espaço medida finito e X um espaço de Banach tal que X e X' têm a propriedade de Radon-Nikodym. Um subconjunto K de $L^1(\mu, X)$ é fracamente relativamente compacto, se:

- i) K é limitado (em $L^1(\mu, X)$)
- ii) K é uniformemente integrável, i.e., $\int_E \|f\|_X d\mu \rightarrow 0$, quando $\mu(E) \rightarrow 0$, uniformemente, em K .
- iii) Para cada $E \in \Sigma$, o conjunto $\{\int_E f d\mu, f \in K\}$ é fracamente relativamente compacto (em X).

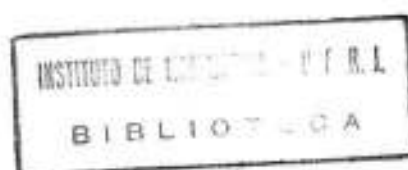
Demonstração: (Ver em J. Diestel e J.J. Uhl, J.R., [12, p.101]).

Proposição A.3.2 (Phillips). Espaços de Banach reflexivos têm a propriedade de Radon-Nikodym.

Demonstração: (Ver em [12, Corolário 13, p.76]).

Teorema A.3.3. Um subconjunto K de $L^1(\mu, X)$ fracamente compacto é necessariamente uniformemente integrável.

Demonstração: (Ver em [12, p.104]).



Referências

- [1] G. Allaire, "*Homogénéisation des équations de Navier-Stokes*", Thèse, Université Paris VI, (1989).
- [2] G. Allaire, "*Homogenization of Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes*", DMT/DEDR/IRD-CEN, SACLAY-YVETE, Paris, (1990).
- [3] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, "*Asymptotic analysis for periodic structures*", North Holland Publishing Co., (1978).
- [4] H. Brezis, "*Analyse Fonctionnelle Theorie et Applications*", Masson, Paris, (1983).
- [5] H. Brezis, "*Operateurs mazimaux monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert*", North Holland Publishing Co., Amsterdam, (1973).
- [6] H. Brezis and F.E. Browder, "*Some properties of higher order Sobolev spaces*", J. Math. Pures et Appl., 61, pp. 242-259, (1982).
- [7] S. Brahim-Otsmane, G.A.Francfort and F.Murat, "*Correctores for the homogenization of the wave and heat equations*", J. Math. Pures et Appl., 71, no. 3, pp. 197-231, (1992).
- [8] D. Cioranescu and P. Donato, "*Exact internal controllability in perforated domains*", J. Math. Pures et Appl., 68, pp.185-213, (1989).
- [9] D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat and E. Zuazua, "*Homogenization and correctors for the wave equation in domains with small holes*", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18, pp. 251-293, (1991).
- [10] D. Cioranescu, P. Donato and E. Zuazua, "*Exact boundary controllability for the wave equation in domains with small holes*", J. Math. Pures et Appl., 71, pp. 343-377, (1992).
- [11] D. Cioranescu and F. Murat, "*Um terme étrange venu d'ailleurs*", in Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Collège de France Seminar, vol.II and III, ed. by Brezis and J.L. Lions, Research Notes in Mathematics, 60 and 70, pp. 93-138 and 154-178, Pitman, (1982).
- [12] J. Diestel and J.J. Uhl, "*Vector Measures*", Mathematical Surveys, 15, American Mathematical Society, Providence, (1977).

- [13] A.M. Gomes, "*Semigrupos não lineares e equações diferenciais nos espaços de Banach*", Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1992).
- [14] M. Grum-Rehome, "*Caractérisation du sous différentiel d'intégrales convexes dans les espaces de Sobolev*", J. Math. Pures et Appl., 56, pp. 149-156, (1977).
- [15] R. Finn, "*Mathematical questions relating to viscous fluid flow in an exterior domain*", Rock Mountain Journal of Mathematics, vol.3, 1, pp. 107-140, (1973).
- [16] L.F. Ho, "*Observabilité frontière de l'équation des ondes*", C.R. Acad. Sc. Paris, 302, pp. 443-446, (1986).
- [17] H. Kacimi, "*Homogénéisation de problèmes de Dirichlet avec des petits trous*", Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI, (1987).
- [18] H. Kacimi, F. Murat, "*Estimation de l'erreur dans des problèmes de Dirichlet où apparaît un terme étrange*", Partial differential equations and the calculus of variations: vol.II, Essays in honor of Ennio De Giorgi, ed. by F. Colombini, A. Marino, L. Modica and S. Spagnolo, Birkhäuser, pp. 661-696, Boston, (1989).
- [19] R.V. Kohn, M. Vogelius, "*A new model for thin plates with rapidly varying thickness II: a convergence proof*", Quant. Appl. Math., 43, pp. 1-22, (1985).
- [20] O.A. Ladyzhenskaya, "*The mathematical theory of viscous incompressible flow*", Gordon and Breach, (1969).
- [21] O.A. Ladyzhenskaya, M.I. Visik, "*Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator*", Uspehi Mat. Nauki (NS), 11, n.672, pp. 41-97, (1956).
- [22] J. Lesmes, "*Teoria das distribuições e equações diferenciais*", Monografias de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1972).
- [23] J.L. Lions, "*On some hyperbolic equations with pressure term*", Collège de France, Departament de Mathématiques, 3 rue d'Ulm, 75005, Paris, (1990).
- [24] J.L. Lions, "*Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*", Les Press de l'Université de Montreal, Montreal, Canada, (1965).
- [25] J.L. Lions, E. Magenes, "*Problèmes aux limites non homogènes et applications*", vol.I, Dunod, Paris, (1968).

- [26] J.L. Lions, "*Quelques méthodes de résolution des problèmes non linéaires*", Dunod, Paris, (1969).
- [27] J.L. Lions, "*Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure*", Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 10, 1, pp. 125-140, (1980).
- [28] L.A. Medeiros, "*Exact controllability for the wave equations - HUM*", 37º Seminário Brasileiro de Análise, Maio, (1993).
- [29] L.A. Medeiros, M. Milla Miranda, "*Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais*", IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).
- [30] L.A. Medeiros, P.H. Rivera, "*Iniciação aos espaços de Sobolev*", IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [31] M. Milla Miranda, "*Traço para o dual dos espaços de Sobolev*", Bol. Soc. Paran. Mat. (2ª série), vol.11, n. 2, pp. 103-120, (1988).
- [32] F. Riesz, "*Sur la Convergence en Moyenne*", Acta Sci. Math., vol. 4, pp. 58-64, 182-185, (1928).
- [33] E. Sanchez-Palencia, "*Non-homogeneous media and vibration theory*", Lecture notes in physics, 127, Berlin and New York, Springer Verlag, (1980).
- [34] E. Sanchez-Palencia, "*Boundary-value problems in domains containing perforated walls*", Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, vol. 3, ed. by H. Brézis & J.L. Lions, Research notes in mathematics 70, pp. 309-325, Pitman, London, (1982).
- [35] J.C. Saut, "*Some remarks on the limit of viscoelastic fluids as the relaxation time tends to zero*", in Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, edited by E. Kröner and Kirchgässner, Lecture notes in Physics, vol. 249, mai 86, Springer Verlag, Berlin and New York, pp. 364-369, (1986).
- [36] G. Stampacchia, "*Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*", Presses de l'Université de Montréal, (1966).
- [37] L. Tartar, "*Convergence of the homogenization process*", Appendix of [34].
- [38] L. Tartar, "*Cours Peccot au Collège de France*", mar, (1977), partially written in: F. Murat, *H-convergence*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger, duplicated, 34p., (1978).

- [39] R. Temam. *"Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis"*. North-Holland, Amsterdam, (1979).